Nome:	
Nr. Mat.	
Firma:	
C.L.:	Info. ‖ Elet. ‖ Telec.

Teoria dei Sistemi e del Controllo
Compito A del 6 Dicembre 2011
Domande ed esercizi

1. Scrivere la forma esplicita della *matrice di transizione dello stato* $\mathbf{\Phi}(k,h)$ nel caso di sistemi dinamici lineari discreti tempo-invarianti:

$$\mathbf{\Phi}(k,h) = \mathbf{A}^{k-h}$$

2. Scrivere la soluzione generale dell'equazione differenziale matriciale $\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A}\mathbf{x}(t) + \mathbf{B}\mathbf{u}(t)$ a partire dalla condizione iniziale $\mathbf{x}(0)$ all'istante $t_0 = 0$:

$$\mathbf{x}(t) = e^{\mathbf{A}t}\mathbf{x}(0) + \int_0^t e^{\mathbf{A}(t-\tau)}\mathbf{B}\mathbf{u}(\tau)d\tau$$

3. Scrivere la soluzione esplicita dell'equazione alle differenze $\mathbf{x}(k+1) = \mathbf{A}\mathbf{x}(k) + \mathbf{B}\mathbf{u}(k)$ essendo $\mathbf{x}(h)$ lo stato all'istante iniziale h.

$$\mathbf{x}(k) = \mathbf{A}^{k-h}\mathbf{x}(h) + \sum_{j=h}^{k-1} \mathbf{A}^{k-j-1}\mathbf{B}\mathbf{u}(j)$$

4. Calcolare la matrice di raggiungibilità $\mathcal{R}^+$ e la matrice di osservabilità $\mathcal{O}^-$ del seguente sistema:

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{x}}(t) = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \mathbf{x}(t) + \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} u(t) \\ y(t) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \mathbf{x}(t) \end{cases} \qquad \mathcal{R}^+ = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \mathcal{O}^- = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix},$$

Il sistema è: ○ raggiungibile? ⊗ non raggiungibile? ○ osservabile? ⊗ non osservabile?

Fornire una base $\mathcal{B}_R$ del sottospazio raggiungibile $\mathcal{X}^+$ e una base $\mathcal{B}_O$ del sottospazio non osservabile $\mathcal{E}^-$:

$$\mathcal{X}^+ = \mathrm{Im}\,[\mathcal{B}_R] = \mathrm{Im}\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \qquad \mathcal{E}^- = \mathrm{Im}\,[\mathcal{B}_O] = \mathrm{Im}\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

5. La seguente rappresentazione simbolica:

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{x}}(t) & = & \mathbf{f}(\mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t), t) \\ \mathbf{y}(t) & = & \mathbf{g}(\mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t), t) \end{cases}$$

viene utilizzata per descrivere un sistema con le seguenti caratteristiche:

○ un sistema statico; ⊗ un sistema tempo-continuo;
○ un sistema lineare; ⊗ un sistema a costanti concentrate;
⊗ un sistema tempo variante; ○ un sistema privo di ingressi;

6. Applicando al sistema dinamico $\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A}\mathbf{x}(t) + \mathbf{B}\mathbf{u}(t)$, $\mathbf{y}(t) = \mathbf{C}\mathbf{x}(t)$ la trasformazione di coordinate $\mathbf{x} = \mathbf{T}\tilde{\mathbf{x}}$ si ottiene un sistema trasformato $\dot{\tilde{\mathbf{x}}}(t) = \tilde{\mathbf{A}}\tilde{\mathbf{x}}(t) + \tilde{\mathbf{B}}\mathbf{u}(t)$, $\mathbf{y}(t) = \tilde{\mathbf{C}}\,\tilde{\mathbf{x}}(t)$ caratterizzato dalle seguenti matrici $\tilde{\mathbf{A}}$, $\tilde{\mathbf{B}}$ e $\tilde{\mathbf{C}}$:

$$\tilde{\mathbf{A}} = \mathbf{T}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{T}, \qquad \tilde{\mathbf{B}} = \mathbf{T}^{-1}\mathbf{B}, \qquad \tilde{\mathbf{C}} = \mathbf{C}\mathbf{T}$$

7. Si applichi la trasformata di Laplace alla seguente funzione di *stato*:

$$\mathcal{L}\left[\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A}\mathbf{x}(t) + \mathbf{B}\mathbf{u}(t)\right]$$

e si fornisca l'espressione della trasformata $\mathbf{x}(s)$ del vettore di stato $\mathbf{x}(t)$ in funzione dello stato iniziale $\mathbf{x}_0$ e della trasformata $\mathbf{u}(s)$ del segnale di ingresso $u(t)$:

$$\mathbf{x}(s) = (s\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}\mathbf{x}_0 + (s\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}\mathbf{B}\mathbf{u}(s)$$

8. Sia dato un sistema autonomo $\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A}\mathbf{x}(t)$ del quarto ordine dove la matrice $\mathbf{A}$ è caratterizzata dai seguenti autovalori λ_i, e autovettori $\mathbf{v}_i$:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 4 & 2 & -4 & -5 \\ 2 & 0 & -3 & -2 \\ -1 & 0 & 1 & -1 \end{bmatrix} \qquad \begin{array}{l} \lambda_1 = -1 \\ \lambda_2 = 2 \\ \lambda_3 = -2+j \\ \lambda_4 = -2-j \end{array} \qquad \mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{v}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{v}_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ j \\ -1+j \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{v}_4 = \begin{bmatrix} 0 \\ -j \\ -1-j \\ 1 \end{bmatrix}.$$

a) Scrivere una matrice di trasformazione $\mathbf{T}$ (con $\mathbf{x} = \mathbf{T}\overline{\mathbf{x}}$) che sia in grado si portare la matrice $\mathbf{A}$ in forma diagonale di Jordan $\mathbf{A}_J$:

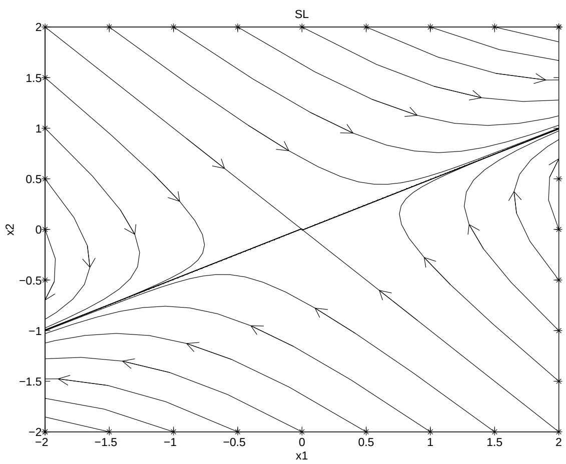
$$\mathbf{T} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & j & -j \\ 1 & 0 & -1+j & -1-j \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}, \qquad \mathbf{A}_J = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2+j & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2-j \end{bmatrix}$$

b) Scrivere una matrice di trasformazione $\mathbf{T}_R$ (con $\mathbf{x} = \mathbf{T}_R\overline{\mathbf{x}}$) che sia in grado si portare la matrice $\mathbf{A}$ in forma "reale" di Jordan $\mathbf{A}_R$:

$$\mathbf{T}_R = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}, \qquad \mathbf{A}_R = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \end{bmatrix}$$

c) Disegnare qualitativamente le traiettorie del sistema dinamico:

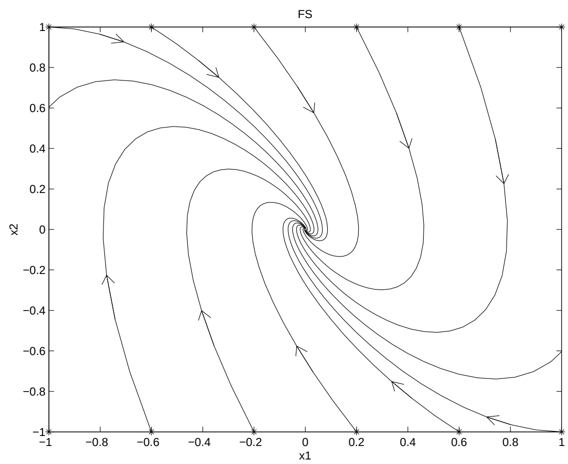
1) nel sottospazio $\mathcal{X}_{1,2}$ generato dai due autovettori $\mathbf{v}_1$ e $\mathbf{v}_2$.



○ Nodo? ○ Fuoco? ⊗ Sella?

○ Stabile? ⊗ Instabile?

2) nel sottospazio $\mathcal{X}_{3,4}$ generato dai due vettori Re[$\mathbf{v}_3$] e Im[$\mathbf{v}_3$].

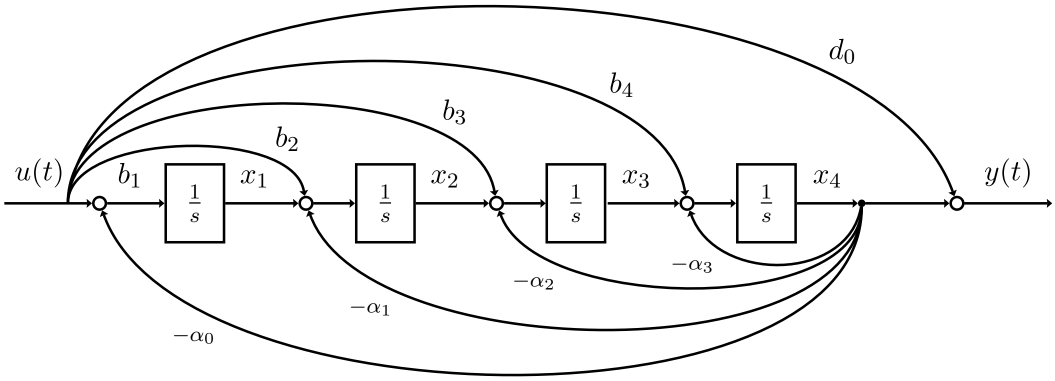


○ Nodo? ⊗ Fuoco? ○ Sella?

⊗ Stabile? ○ Instabile?

9. Disegnare lo schema a blocchi associato al seguente sistema tempo-continuo dove $\mathbf{x}_o = \begin{bmatrix} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 \end{bmatrix}^{\mathrm{T}}$.

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{x}}_o(t) &= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & -\alpha_0 \\ 1 & 0 & 0 & -\alpha_1 \\ 0 & 1 & 0 & -\alpha_2 \\ 0 & 0 & 1 & -\alpha_3 \end{bmatrix} \mathbf{x}_o(t) + \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \\ b_4 \end{bmatrix} u(t) \\ y(t) &= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \mathbf{x}_o(t) \;+\; d_0\, u(t) \end{cases}$$



10. Sia data la seguente equazione differenziale non lineare:

$$\dddot{y}(t) + 3\,\sin\ddot{y}(t) + 2\,\sqrt{\dot{y}(t)} + 5\,[y(t)]^3 = u(t).$$

Scelto $\mathbf{x} = [x_1 \quad x_2 \quad x_3]^{\mathrm{T}} = [y(t) \quad \dot{y}(t) \quad \ddot{y}(t)]^{\mathrm{T}}$ come vettore di stato, esprimere l'equazione differenziale non lineare nello spazio degli stati:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 &= x_2 \\ \dot{x}_2 &= x_3 \\ \dot{x}_3 &= -3\,\sin x_3 - 2\,\sqrt{x_2} - 5\,x_1^3 + u(t) \end{cases}$$

11. Si consideri il problema di controllo punto a punto per un sistema lineare tempo-discreto. Tra le infinite soluzioni $\mathbf{u}$ che permettono far passare il sistema dallo stato iniziale $\mathbf{x}(0)$ allo stato finale $\mathbf{x}(k)$ nell'intervallo di tempo $[0,\ k]$ indicare la struttura della soluzione $\mathbf{u}$ che minimizza la norma eucludea $||\mathbf{u}||$:

$$\mathbf{u} = (\mathcal{R}_k^+)^T[\mathcal{R}_k^+(\mathcal{R}_k^+)^T]^{-1}[\mathbf{x}(k) - \mathbf{A}^k\mathbf{x}(0)]$$

12. Sia dato il seguente sistema lineare tempo-continuo $\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A}\mathbf{x}(t) + \mathbf{B}\mathbf{u}(t)$. Preso T come periodo di campionamento, scrivere l'espressione della matrice $\mathbf{F}$ che caratterizza il corrispondente sistema a segnali campionati $\mathbf{x}(k{+}1) = \mathbf{F}\mathbf{x}(k) + \mathbf{G}\mathbf{u}(k)$:

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \mathbf{x}(t) + \mathbf{B}\mathbf{u}(t), \qquad \mathbf{F} = e^{\mathbf{A}T} = \begin{bmatrix} e^{-T} & T\,e^{-T} & \frac{T^2}{2}\,e^{-T} \\ 0 & e^{-T} & T\,e^{-T} \\ 0 & 0 & e^{-T} \end{bmatrix}$$

13. Data la funzione di trasferimento $G(z)$, scrivere la struttura del corrispondente sistema dinamico in forma canonica di raggiungibilità indicando con $u(k)$ l'ingresso e con $y(k)$ l'uscita:

$$G(z) = \frac{2z^3 + 4z^2 + 5z}{z^4 + 6z^3 + 3z^2 + 2z + 4} \qquad \left\{ \begin{array}{l} \mathbf{x}(k+1) = \left[\begin{array}{cccc} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -4 & -2 & -3 & -6 \end{array} \right] \mathbf{x}(k) + \left[\begin{array}{c} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{array} \right] u(k) \\ \\ y(k) = \left[\begin{array}{cccc} 0 & 5 & 4 & 2 \end{array} \right] \mathbf{x}(k) + \left[\begin{array}{c} 0 \end{array} \right] u(k) \end{array} \right.$$

14. Dato il sistema lineare tempo-discreto $\mathbf{x}(k+1) = \mathbf{A}\mathbf{x}(k) + \mathbf{B}\mathbf{u}(k)$, riportare la struttura di:
a) uno stimatore asintotico dello stato *in catena chiusa di ordine pieno*:

$$\hat{\mathbf{x}}(k+1) = (\mathbf{A} + \mathbf{L}\mathbf{C})\hat{\mathbf{x}}(k) + \mathbf{B}\mathbf{u}(k) - \mathbf{L}\mathbf{y}(k)$$

b) l'evoluzione temporale dell'errore di stima $\mathbf{e}(k) = \mathbf{x}(k) - \hat{\mathbf{x}}(k)$ che si ha a partire da un errore di stima iniziale $\mathbf{e}(0)$:

$$\mathbf{e}(t) = (\mathbf{A} + \mathbf{L}\mathbf{C})^k\, \mathbf{e}(0)$$

15. Sia dato un sistema lineare $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{b}u$, invariante, completamente raggiungibile e con un solo ingresso. Sia $\Delta_{\mathbf{A}}(\lambda) = \lambda^n + \alpha_{n-1}\lambda^{n-1} + \ldots + \alpha_1\lambda + \alpha_0$ il polinomio caratteristico della matrice $\mathbf{A}$ e sia $p(\lambda) = \lambda^n + d_{n-1}\lambda^{n-1} + \ldots + d_1\lambda + d_0$ un polinomio monico scelto a piacere. Si fornisca l'espressione del vettore $\mathbf{k}^{\mathrm{T}}$ che mediante la retroazione statica $\mathbf{u} = \mathbf{k}^{\mathrm{T}}\mathbf{x}$ è in grado di far coincidere gli autovalori della matrice $\mathbf{A} + \mathbf{b}\mathbf{k}^{\mathrm{T}}$ con le radici del polinomio $p(\lambda)$:

$$\mathbf{k}^{\mathrm{T}} = \mathbf{k}_c^{\mathrm{T}} \left\{ \left[\begin{array}{cccc} \mathbf{b}, & \mathbf{A}\mathbf{b}, & \ldots, & \mathbf{A}^{n-1}\mathbf{b} \end{array} \right] \left[\begin{array}{ccccc} \alpha_1 & \alpha_2 & \ldots & \alpha_{n-1} & 1 \\ \alpha_2 & \ldots & \ldots & 1 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \alpha_{n-1} & 1 & \ldots & 0 & 0 \\ 1 & 0 & \ldots & 0 & 0 \end{array} \right] \right\}^{-1}$$

dove $\mathbf{k}_c^{\mathrm{T}} = \left[\begin{array}{cccc} \alpha_0 - d_0, & \alpha_1 - d_1, & \ldots, & \alpha_{n-1} - d_{n-1} \end{array} \right]$.

16. Scrivere le matrici a blocchi $\overline{\mathbf{A}}$, $\overline{\mathbf{B}}$ e $\overline{\mathbf{C}}$ di un sistema in forma standard di raggiungibilità:

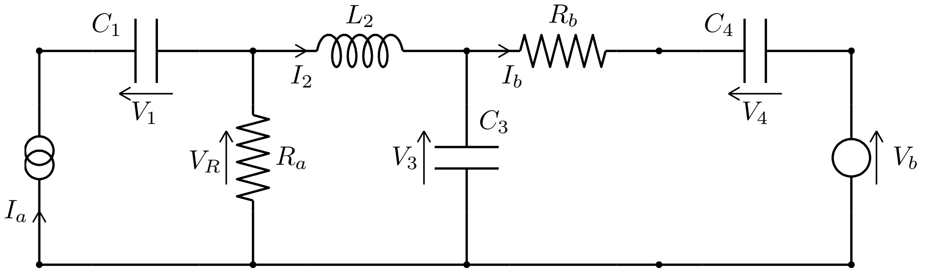
$$\overline{\mathbf{A}} = \left[\begin{array}{cc} \mathbf{A}_{1,1} & \mathbf{A}_{1,2} \\ 0 & \mathbf{A}_{2,2} \end{array} \right] \qquad \overline{\mathbf{B}} = \left[\begin{array}{c} \mathbf{B}_1 \\ 0 \end{array} \right]$$

$$\overline{\mathbf{C}} = \left[\begin{array}{cc} \mathbf{C}_1 & \mathbf{C}_2 \end{array} \right]$$

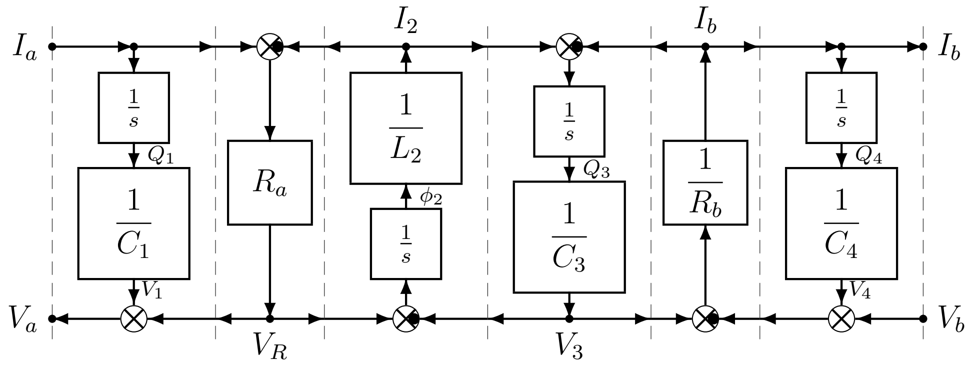
17. Scrivere all'interno della seguente tabella i simboli e i nomi delle variabili energia e delle variabili di potenza che caratterizzano l'ambito energetico *Meccanico Traslazionale*. Indicare inoltre la relazione costitutiva dei singoli elementi (sia nel caso generale non lineare che nel caso lineare) e l'equazione differenziale che caratterizza gli elementi dinamici:

	Simboli		Rel. Costititutiva	Caso Lineare	Eq. Differenzile
$\mathcal{D}_1$	M	Massa			
q_1	P	quantità di moto	$P = \Phi_M(\dot{x})$	$P = M\,\dot{x}$	$\frac{d\,P}{dt} = F$
v_1	$\dot{x}$	velocità			
$\mathcal{D}_2$	E	Elasticità			
q_2	x	spostamento	$x = \Phi_E(F)$	$x = E\,F$	$\frac{d\,x}{dt} = \dot{x}$
v_2	F	forza			
$\mathcal{R}$	b	Dissipatore	$F = \Phi_b(\dot{x})$	$F = b\,\dot{x}$	

18. Si consideri il seguente circuito elettrico costituito dalle capacità C_1, C_3, C_4, dall'induttanza L_2 e dalle resistenze R_a e R_b. Sul sistema agiscono due ingressi: la corrente I_a e la tensione V_b. Le uscite del sistema sono: la tensione V_a e la corrente I_b.



Il modello P.O.G. del circuito elettrico assegnato è il seguente:



Sia $\mathbf{x} = \begin{bmatrix} V_1 & I_2 & V_3 & V_4 \end{bmatrix}^{\mathrm{T}}$ il vettore di stato, $\mathbf{u} = \begin{bmatrix} I_a & V_b \end{bmatrix}^{\mathrm{T}}$ il vettore degli ingressi e $\mathbf{y} = \begin{bmatrix} V_a & I_b \end{bmatrix}^{\mathrm{T}}$ il vettore delle uscite. Scrivere il corrispondente sistema dinamico $\overline{\mathbf{L}}\dot{\mathbf{x}} = \overline{\mathbf{A}}\mathbf{x} + \overline{\mathbf{B}}\mathbf{u}$ e $\mathbf{y} = \overline{\mathbf{C}}\mathbf{x} + \overline{\mathbf{D}}\mathbf{u}$ nello spazio degli stati:

$$\underbrace{\begin{bmatrix} C_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & L_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & C_3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & C_4 \end{bmatrix}}_{\overline{\mathbf{L}}} \underbrace{\begin{bmatrix} \dot{V}_1 \\ \dot{I}_2 \\ \dot{V}_3 \\ \dot{V}_4 \end{bmatrix}}_{\dot{\mathbf{x}}} = \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -R_a & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -\frac{1}{R_b} & \frac{1}{R_b} \\ 0 & 0 & \frac{1}{R_b} & -\frac{1}{R_b} \end{bmatrix}}_{\overline{\mathbf{A}}} \underbrace{\begin{bmatrix} V_1 \\ I_2 \\ V_3 \\ V_4 \end{bmatrix}}_{\mathbf{x}} + \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ R_a & 0 \\ 0 & \frac{1}{R_b} \\ 0 & -\frac{1}{R_b} \end{bmatrix}}_{\overline{\mathbf{B}}} \underbrace{\begin{bmatrix} I_a \\ V_b \end{bmatrix}}_{\mathbf{u}}$$

$$\underbrace{\begin{bmatrix} V_a \\ I_b \end{bmatrix}}_{\mathbf{y}} = \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & -R_a & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{R_b} & -\frac{1}{R_b} \end{bmatrix}}_{\overline{\mathbf{C}}} \mathbf{x} + \underbrace{\begin{bmatrix} R_a & 0 \\ 0 & -\frac{1}{R_b} \end{bmatrix}}_{\overline{\mathbf{D}}} \underbrace{\begin{bmatrix} I_a \\ V_b \end{bmatrix}}_{\mathbf{u}}$$

19. Enunciare il criterio diretto di stabilità di Lyapunov nel caso di sistemi tempo discreti.

Si consideri il sistema non lineare $\mathbf{x}(k+1) = \mathbf{f}(\mathbf{x}(k), \mathbf{u}_0)$ *e sia* $\mathbf{x}_0$ *un punto di equilibrio corrispondente all'ingresso costante* $\mathbf{u}_0$*.*

1) Se in un intorno W *del punto* $\mathbf{x}_0$ *esiste una funzione continua* $V(\mathbf{x}) : W \to \mathcal{R}$ definita positiva *e se la funzione* $\Delta V(\mathbf{x})$ *è* semidefinita negativa*, allora il punto* $\mathbf{x}_0$ *è* stabile*. Se la funzione* $\Delta V(\mathbf{x})$ *è* definita negativa*, allora il punto* $\mathbf{x}_0$ *è* asintoticamente stabile*.*

20. Sia dato il seguente sistema non–lineare $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x})$, tempo–continuo, privo di ingressi:

$$\left\{ \begin{array}{rcl} \dot{x}_1 & = & x_2 \\ \dot{x}_2 & = & x_1\,(x_1^2 - 1) - \alpha x_2 \end{array} \right.$$

a) Determinare la posizione dei 3 punti di equilibrio $\overline{\mathbf{x}}_1$, $\overline{\mathbf{x}}_2$ e $\overline{\mathbf{x}}_3$ del sistema:

I punti di equilibrio del sistema si determinano imponendo $\dot{x}_1 = 0$ e $\dot{x}_2 = 0$:

$$x_2 = 0, \qquad\qquad x_1\left(x_1^2 - 1\right) = 0.$$

Il sistema ammette i seguenti 3 punti di equilibrio:

$$\overline{\mathbf{x}}_1 = (0,\ 0), \qquad \overline{\mathbf{x}}_2 = (1,\ 0), \qquad \overline{\mathbf{x}}_3 = (-1,\ 0).$$

b) Calcolare lo Jacobiano $\mathbf{A}(\mathbf{x}) = \frac{\partial \mathbf{f}(\mathbf{x})}{\partial \mathbf{x}}$ del sistema non lineare $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x})$:

Lo Jacobiano del sistema non lineare è:

$$\mathbf{A}(\mathbf{x}) = \frac{\partial \mathbf{f}(\mathbf{x})}{\partial \mathbf{x}} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 3x_1^2 - 1 & -\alpha \end{bmatrix}$$

c) Calcolare le matrici $\mathbf{A}_1$, $\mathbf{A}_2$ e $\mathbf{A}_3$ del sistema linearizzato nell'intorno dei 3 punti di equilibrio $\overline{\mathbf{x}}_1$, $\overline{\mathbf{x}}_2$ e $\overline{\mathbf{x}}_3$:

Le matrici $\mathbf{A}_1$, $\mathbf{A}_2$ e $\mathbf{A}_1$ del sistema linearizzato hanno la seguente struttura:

$$\mathbf{A}_1 = \mathbf{A}(\mathbf{x}_1) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -\alpha \end{bmatrix}, \qquad \mathbf{A}_2 = \mathbf{A}(\mathbf{x}_2) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 2 & -\alpha \end{bmatrix}, \qquad \mathbf{A}_3 = \mathbf{A}(\mathbf{x}_3) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 2 & -\alpha \end{bmatrix}.$$

d) Studiare, al variare del parametro α, la stabilità del sistema non lineare nell'intorno dei 3 punti di equilibrio $\overline{\mathbf{x}}_1$, $\overline{\mathbf{x}}_2$ e $\overline{\mathbf{x}}_3$ utilizzando il criterio ridotto di Lyapunov:

Il polinomio caratteristico della matrice $\mathbf{A}_1$ è il seguente:

$$\Delta_{\mathbf{A}_1}(s) = s^2 + \alpha s + 1 = 0$$

In base al criterio ridotto di Lyapunov si può affermare quanto segue. Per $\alpha > 0$ il punto di equilibrio $\mathbf{x}_1 = (0, 0)$ del sistema non lineare è asintoticamente stabile. Per $\alpha < 0$ il punto di equilibrio $\mathbf{x}_1$ è asintoticamente stabile. Per $\alpha = 0$ il criterio non implica nulla.

Il polinomio caratteristico delle matrici $\mathbf{A}_2$ e $\mathbf{A}_3$ è il seguente:

$$\Delta_{\mathbf{A}_2}(s) = \Delta_{\mathbf{A}_3}(s) = s^2 + \alpha s - 2 = 0$$

In base al criterio ridotto di Lyapunov si può affermare che i punti di equilibrio $\mathbf{x}_2 = (1, 0)$ e $\mathbf{x}_3 = (-1, 0)$ del sistema non lineare sono entrambi instabili per qualunque valore di α.

e) Nel caso $\alpha = 0$, studiare la stabilità del sistema non lineare nell'intorno punto di equilibrio $\mathbf{x}_1 = (0, 0)$ utilizzando il criterio "diretto" di Lyapunov e la seguente funzione di Lyapunov: $V(\mathbf{x}) = x_1^2 - \frac{1}{2}x_1^4 + x_2^2$.

Nell'intorno punto $\mathbf{x}_1 = (0, 0)$ la funzione $V(\mathbf{x}) = x_1^2 - \frac{1}{2}x_1^4 + x_2^2$ è sicuramente definita positiva. Se si calcola la derivata della funzione $V(\mathbf{x})$ lungo le traiettorie del sistema quando $\alpha = 0$ si ottiene:

$$\dot{V} = 2x_1\dot{x}_1 - 2x_1^3\dot{x}_1 + 2x_2\dot{x}_2 = 2x_1x_2 - 2x_1^3x_2 + 2x_2x_1(x_1^2 - 1) = 0$$

Applicando il criterio "diretto" di Lyapunov è possibile affermare che nell'intorno del punto $\mathbf{x}_1 = (0, 0)$ il sistema non lineare è semplicemente stabile. In questo caso le traiettorie del sistema coincidono con le curve di livello della funzione $V(\mathbf{x})$.