

Teoria dei Sistemi e del Controllo
Compito A del 5 Febbraio 2015
Domande ed esercizi

Nome:	
Nr. Mat.	
Firma:	
C.L.:	Info. Elet. Telec.

1. Scrivere la soluzione in forma chiusa dell'equazione differenziale $\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A}\mathbf{x}(t) + \mathbf{B}\mathbf{u}(t)$ a partire dalla condizione iniziale $\mathbf{x}(t_0)$:

$$\mathbf{x}(t) = e^{\mathbf{A}(t-t_0)}\mathbf{x}(t_0) + \int_{t_0}^t e^{\mathbf{A}(t-\tau)}\mathbf{B}\mathbf{u}(\tau)d\tau$$

2. Scrivere l'andamento temporale della funzione di uscita $\mathbf{y}(k)$, soluzione dell'equazione alle differenze $\mathbf{x}(k+1) = \mathbf{A}\mathbf{x}(k) + \mathbf{B}\mathbf{u}(k)$ e dell'equazione statica $\mathbf{y}(k) = \mathbf{C}\mathbf{x}(k) + \mathbf{D}\mathbf{u}(k)$ a partire dalla condizione iniziale $\mathbf{x}(0)$ all'istante $h = 0$:

$$\mathbf{y}(k) = \mathbf{C}\mathbf{A}^k\mathbf{x}(0) + \mathbf{C}\sum_{j=0}^{k-1}\mathbf{A}^{k-j-1}\mathbf{B}\mathbf{u}(j) + \mathbf{D}\mathbf{u}(k)$$

3. Descrivere cosa rappresenta, per sistemi discreti $\mathbf{x}(k+1) = \mathbf{A}\mathbf{x}(k) + \mathbf{B}\mathbf{u}(k)$, il simbolo $\mathcal{X}^+(k)$:

È l'insieme degli stati raggiungibili dall'origine in k passi.

Indicare inoltre il modo tipico di calcolare l'insieme $\mathcal{X}^+(k)$:

$$\mathcal{X}^+(k) = \text{Im}\mathcal{R}^+(k) = \text{Im} \left[\mathbf{B} \quad \mathbf{A}\mathbf{B} \quad \mathbf{A}^2\mathbf{B} \quad \dots \quad \mathbf{A}^{k-1}\mathbf{B} \right]$$

4. Indicare che cosa rappresenta il simbolo $\mathcal{E}^+(t_0, t_1, \mathbf{u}(\cdot), \mathbf{y}(\cdot))$:

È l'insieme degli stati finali $\mathbf{x}(t_1)$ compatibili con le funzioni di ingresso $\mathbf{u}(\cdot)$ ed uscita $\mathbf{y}(\cdot)$ nell'intervallo di tempo $[t_0, t_1]$.

5. Calcolare la matrice di raggiungibilità \mathcal{R}^+ e la matrice di osservabilità \mathcal{O}^- del seguente sistema:

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{x}}(t) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \mathbf{x}(t) + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \mathbf{u}(t) \\ y(t) = [0 \quad 1 \quad 1] \mathbf{x}(t) \end{cases} \quad \mathcal{R}^+ = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad \mathcal{O}^- = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & -1 \end{bmatrix}$$

Il sistema è: raggiungibile? non raggiungibile? osservabile? non osservabile?

Fornire una base \mathcal{B}_R del sottospazio raggiungibile \mathcal{X}^+ e una base \mathcal{B}_O del sottospazio non osservabile \mathcal{E}^- :

$$\mathcal{X}^+ = \text{Im}[\mathcal{B}_R] = \text{Im} \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad \mathcal{E}^- = \text{Im}[\mathcal{B}_O] = \text{Im} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

6. Sia dato il seguente sistema lineare tempo-continuo $\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A}\mathbf{x}(t) + \mathbf{B}\mathbf{u}(t)$, $\mathbf{y}(t) = \mathbf{C}\mathbf{x}(t)$. Scrivere l'espressione delle matrici \mathbf{F} , \mathbf{G} e \mathbf{H} che caratterizzano il corrispondente sistema a segnali campionati $\mathbf{x}(k+1) = \mathbf{F}\mathbf{x}(k) + \mathbf{G}\mathbf{u}(k)$, $\mathbf{y}(k) = \mathbf{H}\mathbf{x}(k)$:

$$\mathbf{F} = e^{\mathbf{A}T}, \quad \mathbf{G} = \int_0^T e^{\mathbf{A}\sigma}\mathbf{B}d\sigma, \quad \mathbf{H} = \mathbf{C}$$

7. Sia dato un sistema lineare tempo continuo: $\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A}\mathbf{x}(t) + \mathbf{B}\mathbf{u}(t)$ e $\mathbf{y}(t) = \mathbf{C}\mathbf{x}(t) + \mathbf{D}\mathbf{u}(t)$. Applicare la trasformata di Laplace al sistema e fornire l'espressione della trasformata $\mathbf{y}(s)$ del vettore di uscita $\mathbf{y}(t)$ corrispondente alla sola *evoluzione forzata* del sistema:

$$\mathbf{y}(s) = [\mathbf{C}(s\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}\mathbf{B} + \mathbf{D}]\mathbf{u}(s)$$

8. Applicando al sistema dinamico $\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A}\mathbf{x}(t) + \mathbf{B}\mathbf{u}(t)$, $\mathbf{y}(t) = \mathbf{C}\mathbf{x}(t)$ la trasformazione di coordinate $\mathbf{x} = \mathbf{T}\tilde{\mathbf{x}}$ si ottiene un sistema trasformato $\dot{\tilde{\mathbf{x}}}(t) = \tilde{\mathbf{A}}\tilde{\mathbf{x}}(t) + \tilde{\mathbf{B}}\mathbf{u}(t)$, $\mathbf{y}(t) = \tilde{\mathbf{C}}\tilde{\mathbf{x}}(t)$ caratterizzato dalle seguenti matrici $\tilde{\mathbf{A}}$, $\tilde{\mathbf{B}}$ e $\tilde{\mathbf{C}}$:

$$\tilde{\mathbf{A}} = \mathbf{T}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{T}, \quad \tilde{\mathbf{B}} = \mathbf{T}^{-1}\mathbf{B}, \quad \tilde{\mathbf{C}} = \mathbf{C}\mathbf{T}$$

9. Si consideri il seguente sistema dinamico lineare:

$$\dot{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} -1 & -3 \\ 3 & -1 \end{bmatrix} \mathbf{x} + \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \end{bmatrix} \mathbf{u} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{B}\mathbf{u}, \quad \mathbf{y} = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \mathbf{x} = \begin{bmatrix} \mathbf{c}_1 \\ \mathbf{c}_2 \end{bmatrix} \mathbf{x} = \mathbf{C}\mathbf{x}.$$

- a) Scrivere la formula da utilizzare per calcolare il punto di lavoro \mathbf{x}_0 corrispondente ad un ingresso costante $\mathbf{u} = \mathbf{u}_0$:

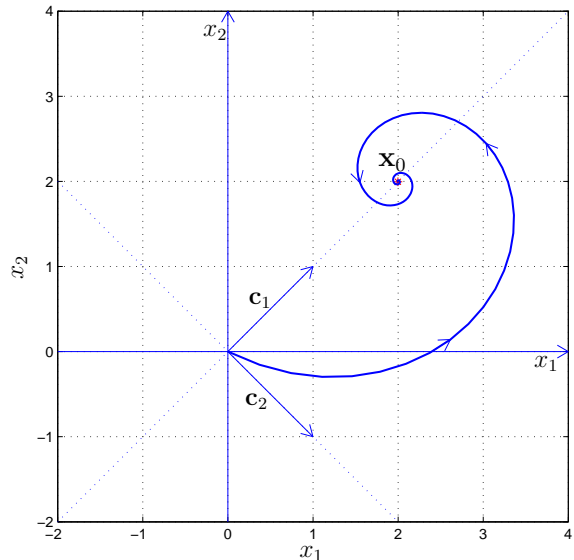
$$\mathbf{x}_0 = -\mathbf{A}^{-1}\mathbf{B}\mathbf{u}_0.$$

È facile verificare che per ingresso costante $\mathbf{u}_0 = 4$ il punto di lavoro del sistema dato è $\mathbf{x}_0 = [2, 2]^T$.

b) Nel riquadro riportato a fianco disegnare qualitativamente la traiettoria del sistema dinamico $\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A}\mathbf{x}(t) + \mathbf{B}\mathbf{u}$ che si ottiene partendo da condizioni iniziali nulle $\mathbf{x}(0) = 0$ e in presenza di un ingresso costante $\mathbf{u}_0 = 4$.

- c) Calcolare gli autovalori del sistema:

$$\lambda_1 = -1 + 3j, \quad \lambda_2 = -1 - 3j$$



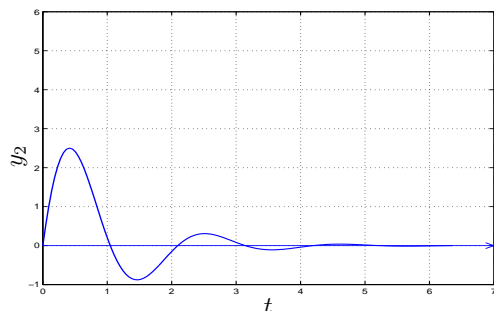
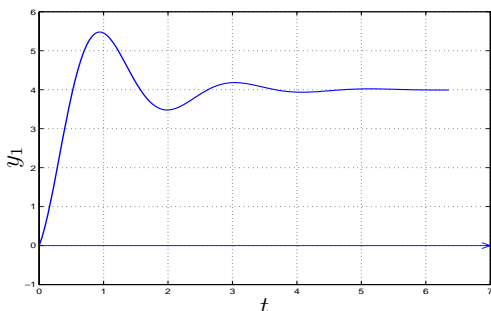
- d) Indicare il tipo di traiettoria che caratterizza la risposta del sistema all'ingresso $\mathbf{u}_0 = 4$:

Nodo? Nodo degenero? Fuoco? Sella? Stabile? Instabile?

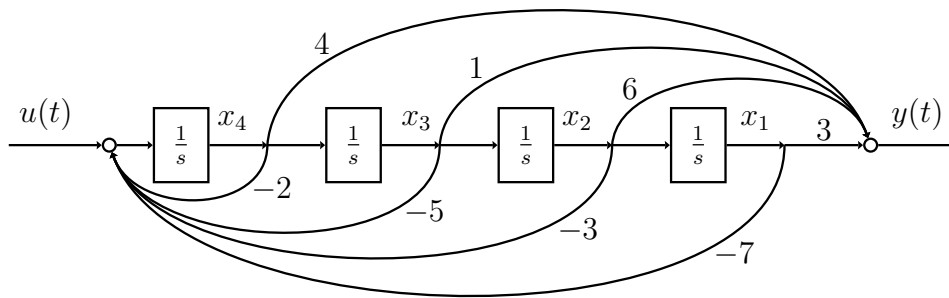
- e) Calcolare il tempo di assestamento T_a e il periodo T_w dell'oscillazione della risposta $\mathbf{x}(t)$:

$$T_a = \frac{3}{\sigma} = \frac{3}{1} = 3 \text{ s}, \quad T_w = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{2\pi}{3} = 2.094 \text{ s}.$$

- f) Tracciare l'andamento qualitativo della risposta temporale delle due uscite $y_1(t)$ e $y_2(t)$:



10. Sia dato il seguente schema a blocchi:



Si calcoli la funzione di trasferimento del sistema:

$$G(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{4s^3 + s^2 + 6s + 3}{s^4 + 2s^3 + 5s^2 + 3s + 7}$$

È inoltre possibile affermare che il sistema $G(s)$:

- | | |
|--|--|
| <input checked="" type="checkbox"/> è completamente raggiungibile; | <input type="checkbox"/> è in forma standard di raggiungibilità; |
| <input type="checkbox"/> è completamente osservabile; | <input type="checkbox"/> è in forma canonica di osservabilità; |
| <input type="checkbox"/> è sicuramente stabile; | <input checked="" type="checkbox"/> è stabilizzabile con retroazione $u = \mathbf{k} \mathbf{x}$; |

11. Sia dato un sistema lineare SISO del quarto ordine ($n = 4$), completamente osservabile, caratterizzato dalle matrici \mathbf{A} , \mathbf{b} e \mathbf{c} .

a) Indicare la struttura delle matrici \mathbf{A}_o , \mathbf{b}_o e \mathbf{c}_o della corrispondente forma canonica di osservabilità. Sia $p(\lambda) = \lambda^4 + \alpha_3 \lambda^3 + \alpha_2 \lambda^2 + \alpha_1 \lambda + \alpha_0$ il polinomio caratteristico della matrice \mathbf{A} .

$$\mathbf{A}_o = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & -\alpha_0 \\ 1 & 0 & 0 & -\alpha_1 \\ 0 & 1 & 0 & -\alpha_2 \\ 0 & 0 & 1 & -\alpha_3 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{b}_o = \begin{bmatrix} b_0 \\ b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{c}_o = [0 \ 0 \ 0 \ 1]$$

b) Indicare inoltre la struttura della matrice \mathbf{P} che, unita alla trasformazione $\mathbf{x} = \mathbf{P} \mathbf{x}_o$, porta il sistema originario in forma canonica di osservabilità.

$$\mathbf{P} = [(\mathcal{O}_c^-)^{-1} \mathcal{O}^-]^{-1} = \left(\begin{bmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 & 1 \\ \alpha_2 & \alpha_3 & 1 & 0 \\ \alpha_3 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{c} \\ \mathbf{c} \mathbf{A} \\ \mathbf{c} \mathbf{A}^2 \\ \mathbf{c} \mathbf{A}^3 \end{bmatrix} \right)^{-1}$$

12. Calcolare, in funzione della condizione iniziale $\mathbf{x}(0) = [x_1(0), x_2(0), x_3(0), x_4(0)]^T$, l'evoluzione libera del seguente sistema autonomo tempo-continuo:

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \mathbf{x}(t), \quad \mathbf{x}(k) = \begin{bmatrix} 1 & t & \frac{t^2}{2} & \frac{t^3}{6} \\ 0 & 1 & t & \frac{t^2}{2} \\ 0 & 0 & 1 & t \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(0) \\ x_2(0) \\ x_3(0) \\ x_4(0) \end{bmatrix}$$

13. Nel caso di sistemi tempo-discreti lineari invarianti $\mathbf{x}(k+1) = \mathbf{A} \mathbf{x}(k) + \mathbf{B} \mathbf{u}(k)$, scrivere la condizione che deve essere soddisfatta affinché sia possibile far passare il sistema dallo stato iniziale $\mathbf{x}(0)$ allo stato finale $\mathbf{x}(k)$ nell'intervallo di tempo $[0, k]$:

$$\mathbf{x}(k) - \mathbf{A}^k \mathbf{x}(0) \in \mathcal{X}^+(k)$$

14. Sia dato il seguente sistema dinamico lineare tempo-continuo:

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{x}}(t) = \left[\begin{array}{cc|c} 0 & 1 & \mathbf{0} \\ -1 & 2 & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & -2 \end{array} \right] \mathbf{x}(t) + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ \mathbf{0} \end{bmatrix} u(t) \\ y(t) = [1 \quad 2 \mid \mathbf{0}] \mathbf{x}(t) \end{cases}$$

Pensando alla struttura a blocchi dei sistemi in forma standard è possibile affermare che:

- ⊗ il sistema è in forma standard di osservabilità;
- ⊗ il sistema è in forma standard di raggiungibilità;
- ⊗ per questo sistema è possibile costruire un osservatore asintotico dello stato;
- ⊗ il sistema può essere stabilizzato utilizzando una retroazione statica dello stato;

Usando le proprietà strutturali del sistema dato calcolare la funzione di trasferimento $G(s) = \frac{Y(s)}{U(s)}$ che lega l'ingresso $U(s) = \mathcal{L}[u(t)]$ all'uscita $Y(s) = \mathcal{L}[y(t)]$

$$G(s) = \mathbf{c}_1 (s \mathbf{I} - \mathbf{A}_{11})^{-1} \mathbf{b}_1 = \frac{2s + 1}{s^2 - 2s + 1} \quad \text{dove} \quad \mathbf{c}_1 = [1 \quad 2], \quad \mathbf{A}_{11} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{b}_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

15. Sia dato un sistema (\mathbf{A}, \mathbf{c}) completamente osservabile. Il corrispondente sistema a dati campionati (essendo T il periodo di campionamento) è completamente osservabile se e solo se per ogni coppia λ_i, λ_j di autovalori distinti di \mathbf{A} aventi la stessa parte reale, vale la relazione:

$$\text{Im}(\lambda_i - \lambda_j) \neq \frac{2k\pi}{T} \quad k = \pm 1, \pm 2, \dots$$

16. Dato il sistema lineare tempo-discreto $\mathbf{x}(k+1) = \mathbf{A}\mathbf{x}(k) + \mathbf{B}\mathbf{u}(k)$, riportare la struttura di:

a) uno stimatore asintotico dello stato *in catena aperta*:

$$\hat{\mathbf{x}}(k+1) = \mathbf{A}\hat{\mathbf{x}}(k) + \mathbf{B}\mathbf{u}(k)$$

b) uno stimatore asintotico dello stato *in catena chiusa di ordine pieno*:

$$\hat{\mathbf{x}}(k+1) = (\mathbf{A} + \mathbf{L}\mathbf{C})\hat{\mathbf{x}}(k) + \mathbf{B}\mathbf{u}(k) - \mathbf{L}\mathbf{y}(k)$$

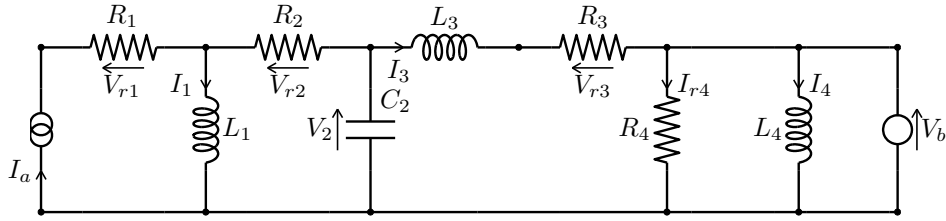
c) l'evoluzione temporale degli errori di stima $\mathbf{e}(k) = \mathbf{x}(k) - \hat{\mathbf{x}}(k)$ che si hanno nei due casi precedenti a) e b) a partire da un'errore di stima iniziale $\mathbf{e}(0)$:

$$\mathbf{e}(k) = \mathbf{A}^k \mathbf{e}(0), \quad \mathbf{e}(k) = (\mathbf{A} + \mathbf{L}\mathbf{C})^k \mathbf{e}(0)$$

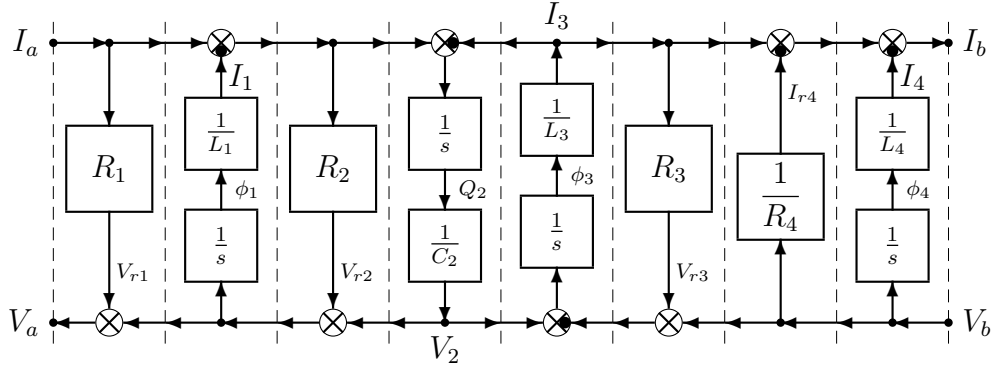
17. Scrivere all'interno della seguente tabella i simboli e i nomi delle variabili energia e delle variabili di potenza che caratterizzano l'ambito energetico **elettromagnetico**. Indicare inoltre la relazione costitutiva dei singoli elementi (sia nel caso generale non lineare che nel caso lineare) e l'equazione differenziale che caratterizza gli elementi dinamici:

	Simboli	Rel. Costitutiva	Caso Lineare	Eq. Differenziale
\mathcal{D}_1	C Capacità			
q_1	Q carica	$Q = \Phi_C(V)$	$Q = CV$	$\frac{dQ}{dt} = I$
v_1	V tensione			
\mathcal{D}_2	L Induttanza			
q_2	ϕ flusso	$\phi = \Phi_L(I)$	$\phi = LI$	$\frac{d\phi}{dt} = V$
v_2	I corrente			
\mathcal{R}	R Resistenza	$V = \Phi_R(I)$	$V = RI$	

18. Si consideri il seguente circuito elettrico costituito dalle induttanze L_1, L_3, L_4 , dalla capacità C_2 e dalle resistenze R_1, R_2, R_3 e R_4 . Sul sistema agiscono due ingressi: la corrente I_a e la tensione V_b . Le uscite del sistema sono: la tensione V_a in ingresso e la corrente I_b in uscita.



Il modello P.O.G. del circuito elettrico assegnato ha la seguente struttura:



Sia $\mathbf{x} = [I_1 \ V_2 \ I_3 \ I_4]^T$ il vettore di stato, $\mathbf{u} = [I_a \ V_b]^T$ il vettore degli ingressi e $\mathbf{y} = [V_a \ I_b]^T$ il vettore delle uscite. Scrivere il corrispondente sistema dinamico $\bar{\mathbf{L}}\dot{\mathbf{x}} = \bar{\mathbf{A}}\mathbf{x} + \bar{\mathbf{B}}\mathbf{u}$ e $\mathbf{y} = \bar{\mathbf{C}}\mathbf{x} + \bar{\mathbf{D}}\mathbf{u}$ nello spazio degli stati:

$$\underbrace{\begin{bmatrix} L_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & C_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & L_3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & L_4 \end{bmatrix}}_{\bar{\mathbf{L}}} \underbrace{\begin{bmatrix} \dot{I}_1 \\ \dot{V}_2 \\ \dot{I}_3 \\ \dot{I}_4 \end{bmatrix}}_{\dot{\mathbf{x}}} = \underbrace{\begin{bmatrix} -R_2 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -R_3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}}_{\bar{\mathbf{A}}} \underbrace{\begin{bmatrix} I_1 \\ V_2 \\ I_3 \\ I_4 \end{bmatrix}}_{\mathbf{x}} + \underbrace{\begin{bmatrix} R_2 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & -1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}}_{\bar{\mathbf{B}}} \underbrace{\begin{bmatrix} I_a \\ V_b \end{bmatrix}}_{\mathbf{u}}$$

$$\underbrace{\begin{bmatrix} V_a \\ I_b \end{bmatrix}}_{\mathbf{y}} = \underbrace{\begin{bmatrix} -R_2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{bmatrix}}_{\bar{\mathbf{C}}} \mathbf{x} + \underbrace{\begin{bmatrix} R_1 + R_2 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{R_4} \end{bmatrix}}_{\bar{\mathbf{D}}} \underbrace{\begin{bmatrix} I_a \\ V_b \end{bmatrix}}_{\mathbf{u}}$$

19. Enunciare il criterio diretto di stabilità di Lyapunov nel caso di sistemi tempo discreti.

Si consideri il sistema non lineare $\mathbf{x}(k+1) = \mathbf{f}(\mathbf{x}(k), \mathbf{u}_0)$ e sia \mathbf{x}_0 un punto di equilibrio corrispondente all'ingresso costante \mathbf{u}_0 .

1) Se in un intorno W del punto \mathbf{x}_0 esiste una funzione continua $V(\mathbf{x}) : W \rightarrow \mathcal{R}$ definita positiva e se la funzione $\Delta V(\mathbf{x})$ è semidefinita negativa, allora il punto \mathbf{x}_0 è stabile. Se la funzione $\Delta V(\mathbf{x})$ è definita negativa, allora il punto \mathbf{x}_0 è asintoticamente stabile.

20. Indicare quali delle seguenti funzioni $V(x_1, x_2)$ sono definite positive nell'intorno dell'origine:

$\otimes V(x_1, x_2) = x_1^2(1 - x_1^2) + x_2^2(1 - x_2^2);$ $\circ V(x_1, x_2) = x_1^2 + x_2^2 + x_1 + x_2;$
 $\circ V(x_1, x_2) = x_1^2 \sin(x_2) + x_2^2 \sin(x_1);$ $\otimes V(x_1, x_2) = x_1^2 \cos(x_2) + x_2^2 \cos(x_1);$

21. Sia dato il seguente sistema non-lineare $\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{f}(\mathbf{x})$, tempo-continuo, privo di ingressi:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 &= \alpha x_1 - x_1^3 \\ \dot{x}_2 &= x_1^4 - x_2^3 + \beta x_3 \\ \dot{x}_3 &= -\beta x_2 - x_3^3 \end{cases}$$

È facile verificare che l'origine $\mathbf{x}_0 = (0, 0, 0) = \mathbf{0}$ è un punto di equilibrio per il sistema.

a) Calcolare, in funzione dei parametri α e β , lo Jacobiano $\mathbf{A}(\mathbf{x})$ del sistema non lineare:

Lo Jacobiano $\mathbf{A}(\mathbf{x})$ ha la seguente struttura:

$$\mathbf{A}(\mathbf{x}) = \frac{\partial \mathbf{f}(\mathbf{x})}{\partial \mathbf{x}} = \begin{bmatrix} \alpha - 3x_1^2 & 0 & 0 \\ 4x_1^3 & -3x_2^2 & \beta \\ 0 & -\beta & -3x_3^2 \end{bmatrix}$$

b) Calcolare, in funzione di α e β , la matrice \mathbf{A}_0 del sistema linearizzato nel punto $\mathbf{x}_0 = \mathbf{0}$:

La matrice \mathbf{A}_0 del sistema linearizzato ha la seguente struttura:

$$\mathbf{A}_0 = \begin{bmatrix} \alpha & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \beta \\ 0 & -\beta & 0 \end{bmatrix}$$

c) Studiare, al variare dei parametri α e β , la stabilità del sistema non lineare nell'intorno del punto $\mathbf{x}_0 = \mathbf{0}$ utilizzando il criterio ridotto di Lyapunov:

Gli autovalori della matrice \mathbf{A}_0 sono:

$$\lambda_1 = \alpha, \quad \lambda_{2,3} = \pm j\beta.$$

In base al criterio ridotto di Lyapunov si può affermare che: 1) per $\alpha > 0$ e $\forall \beta$ il punto di equilibrio $\mathbf{x}_0 = \mathbf{0}$ del sistema non lineare è instabile; 2) per $\alpha \leq 0$ e $\forall \beta$ il criterio non implica nulla.

d) Nel caso $\alpha = 0$, studiare al variare del parametro β la stabilità del sistema non lineare nell'intorno del punto $\mathbf{x}_0 = \mathbf{0}$ utilizzando il criterio "diretto" di Lyapunov e la funzione: $V(\mathbf{x}) = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2$. Eventualmente si utilizzi anche il criterio di La Salle - Krasowskii.

Nell'intorno del punto $\mathbf{x}_0 = \mathbf{0}$ la funzione $V(\mathbf{x}) = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2$ è definita positiva. Posto $\alpha = 0$, la funzione $\dot{V}(\mathbf{x})$ calcolata lungo le traiettorie del sistema è la seguente:

$$\begin{aligned} \dot{V}(\mathbf{x}) &= 2x_1(-x_1^3) + 2x_2(x_1^4 - x_2^3 + \beta x_3) + 2x_3(-\beta x_2 - x_3^3) \\ &= -2x_1^4(1 - x_2) - 2x_2^4 - 2x_3^4 < 0 \end{aligned}$$

Nel punto $\mathbf{x}_0 = \mathbf{0}$ la funzione $\dot{V}(\mathbf{x})$ è definita negativa per cui, in base al criterio "diretto" di Lyapunov, è possibile affermare che nell'intorno del punto $\mathbf{x}_0 = \mathbf{0}$ il sistema non lineare è asintoticamente stabile per qualunque valore di β .

22. Calcolare i 2 punti di equilibrio $\tilde{\mathbf{x}}_1$ e $\tilde{\mathbf{x}}_2$ del seguente sistema non lineare *tempo-discreto*:

$$\begin{cases} x_1(k+1) &= x_2(k) \\ x_2(k+1) &= x_1(k) + x_2(k)(x_1(k) + 3) \end{cases} \quad \Rightarrow_{\mathbf{x}(k+1)=\mathbf{x}(k)} \quad \begin{cases} \tilde{\mathbf{x}}_1 &= (0, 0) \\ \tilde{\mathbf{x}}_2 &= (-3, -3) \end{cases}$$