Nome:	
Nr. Mat.	
Firma:	
C.L.:	Info. ‖ Elet. ‖ Telec.

Teoria dei Sistemi e del Controllo
Compito del 3 Febbraio 2014
Domande ed esercizi

1. Scrivere la soluzione esplicita dell'equazione alle differenze $\mathbf{x}(k+1) = \mathbf{A}\mathbf{x}(k) + \mathbf{B}\mathbf{u}(k)$ essendo $\mathbf{x}(h)$ lo stato iniziale all'istante h.

$$\mathbf{x}(k) = \mathbf{A}^{k-h}\mathbf{x}(h) + \sum_{j=h}^{k-1} \mathbf{A}^{k-j-1}\mathbf{B}\,\mathbf{u}(j)$$

2. Scrivere la forma esplicita della *matrice di transizione dello stato* $\mathbf{\Phi}(t_0, t)$ nel caso di sistemi dinamici lineari continui tempo-invarianti:

$$\mathbf{\Phi}(t, t_0) = e^{\mathbf{A}(t-t_0)}$$

3. Calcolare la matrice di raggiungibilità $\mathcal{R}^+$ e la matrice di osservabilità $\mathcal{O}^-$ del seguente sistema:

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{x}}(t) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \mathbf{x}(t) + \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix} u(t) \\ \\ y(t) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \end{bmatrix} \mathbf{x}(t) \end{cases} \qquad \mathcal{R}^+ = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & -1 \end{bmatrix}, \quad \mathcal{O}^- = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & 0 \end{bmatrix}$$

Il sistema è: ⊗ raggiungibile ○ non raggiungibile ○ osservabile ⊗ non osservabile

Fornire una base $\mathcal{B}_R$ del sottospazio raggiungibile $\mathcal{X}^+$ e una base $\mathcal{B}_O$ del sottospazio non osservabile $\mathcal{E}^-$:

$$\mathcal{X}^+ = \mathrm{Im}\mathcal{R}^+ = \mathrm{Im}\,[\mathcal{B}_R] = \mathrm{Im} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \qquad \mathcal{E}^- = \ker\mathcal{O}^- = \mathrm{Im}\,[\mathcal{B}_O] = \mathrm{Im} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

4. Scrivere la formula per calcolare la matrice di transizione dello stato $\mathbf{A}^k$ di un sistema lineare tempo-discreto utilizzando la Zeta-trasformata:

$$\mathbf{A}^k = \mathcal{Z}^{-1}[z(z\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}]$$

5. La molteplicità *algebrica* di un autovalore λ della matrice $\mathbf{A}$

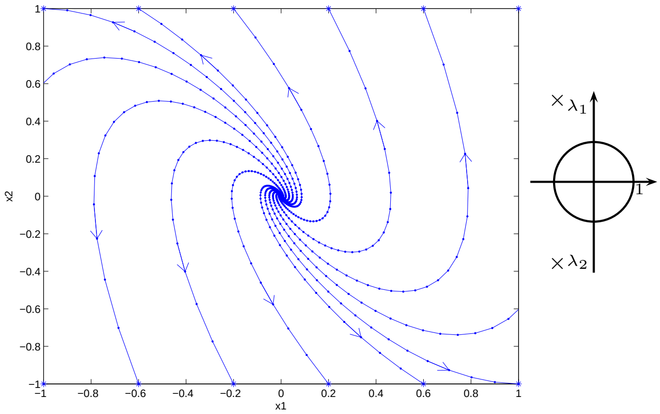
○ è la dimensione dell'autospazio U_λ associato all'autovalore λ;
⊗ è la dimensione del blocco di Jordan $\mathbf{J}_\lambda$ associato all'autovalore λ;
⊗ è il grado di molteplicità di λ nel polinomio caratteristico della matrice $\mathbf{A}$;
○ è il numero di autovettori linearmente indipendenti associati all'autovalore λ;

6. Mostrare la struttura del generico blocco di Jordan $\mathbf{J}_i$ e del generico miniblocco di Jordan $\mathbf{J}_{i,j}$ associato all'i-esimo autovalore λ_i di una generica matrice $\mathbf{A}$.

$$\mathbf{J}_i = \begin{bmatrix} \mathbf{J}_{i,1} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \mathbf{J}_{i,2} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \mathbf{J}_{i,\nu_i} \end{bmatrix}, \qquad \mathbf{J}_{i,j} = \begin{bmatrix} \lambda_i & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_i & 1 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_i & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \lambda_i & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & \lambda_i \end{bmatrix}$$

7. Considerato un sistema dinamico **tempo-discreto** $\mathbf{x}(k+1) = \mathbf{A}\,\mathbf{x}(k)$ del secondo ordine caratterizzato da due autovalori complessi coniugati $\lambda_1 = -1+2\,j$, $\lambda_2 = -1-2\,j$, rispondere alle domande e indicare qual è l'andamento qualitativo delle traiettorie nell'intorno dell'origine:

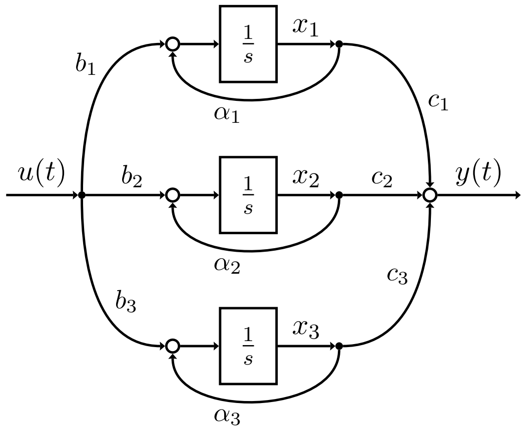
   - ○ gli autovettori del sistema $\mathbf{v}_1$ e $\mathbf{v}_2$ sono reali e distinti.
   - ⊗ gli autovettori del sistema $\mathbf{v}_1$ e $\mathbf{v}_2$ sono complessi coniugati.
   - ○ per $t \to \infty$ tutte le traiettorie tendono ad appiattirsi su uno dei due autovettori.
   - ○ per $t \to \infty$ tutte le traiettorie tendono a zero.



   Quale nome viene tipicamente utilizzato per indicare il tipo di traiettorie sopra indicato:

   ○ Nodo? ⊗ Fuoco? ○ Sella? | ○ Degenere? ○ Stabile? ⊗ Instabile?

8. Dato lo schema a blocchi mostrato in figura, scrivere la struttura delle matrici **A**, **B** e **C** del corrispondente sistema dinamico $\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A}\,\mathbf{x}(t) + \mathbf{B}\,\mathbf{u}(t)$, $\mathbf{y} = \mathbf{C}\,\mathbf{x}(t)$ nel caso in cui $\mathbf{x} = \left[\begin{array}{ccc} x_1 & x_2 & x_3 \end{array}\right]^{\mathrm{T}}$.



$$
\begin{cases}
\dot{\mathbf{x}}(t) = \begin{bmatrix} \alpha_1 & 0 & 0 \\ 0 & \alpha_2 & 0 \\ 0 & 0 & \alpha_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{bmatrix} u(t) \\
y(t) = \begin{bmatrix} c_1 & c_2 & c_3 \end{bmatrix} \mathbf{x}(t)
\end{cases}
$$

9. Una matrice **N** nilpotente di ordine ν è una matrice

   - ○ tale per cui $\mathbf{N}^\nu = \mathbf{I}$;
   - ⊗ tale per cui $\mathbf{N}^\nu = \mathbf{0}$;
   - ○ che ha tutti gli autovalori unitari;
   - ⊗ che ha tutti gli autovalori nulli;

10. Calcolare, in funzione della condizione iniziale $\mathbf{x}(0) = [x_1(0),\ x_2(0),\ x_3(0)]^{\mathrm{T}}$, l'evoluzione libera del seguente sistema $\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A}\,\mathbf{x}(t)$ autonomo tempo-continuo:

$$
\dot{\mathbf{x}}(t) = \begin{bmatrix} \sigma & -\omega & 0 \\ \omega & \sigma & 0 \\ 0 & 0 & \delta \end{bmatrix} \mathbf{x}(t)
\qquad
\mathbf{x}(t) = \begin{bmatrix} e^{\sigma t}\cos(\omega t) & -e^{\sigma t}\sin(\omega t) & 0 \\ e^{\sigma t}\sin(\omega t) & e^{\sigma t}\cos(\omega t) & 0 \\ 0 & 0 & e^{\delta t} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(0) \\ x_2(0) \\ x_3(0) \end{bmatrix}
$$

11. Dato il sistema dinamico sotto riportato, scrivere la funzione di trasferimento $G(s)$ che lega l'ingresso $u(t)$ all'uscita $y(t)$:

$$
G(s) = \frac{3s^3 + s^2 + 5s + 2}{s^4 + s^3 + 4s^2 + 3s + 6}
\qquad
\begin{cases}
\dot{\mathbf{x}}(t) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & -6 \\ 1 & 0 & 0 & -3 \\ 0 & 1 & 0 & -4 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{bmatrix} \mathbf{x}(t) + \begin{bmatrix} 2 \\ 5 \\ 1 \\ 3 \end{bmatrix} u(t) \\
y(t) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \mathbf{x}(t)
\end{cases}
$$

12. Siano $\mathbf{A}$ e $\overline{\mathbf{A}}$ due matrici simili $\mathbf{A} = \mathbf{T}\overline{\mathbf{A}}\mathbf{T}^{-1}$. La funzione di matrice $e^{\mathbf{A}t}$ gode della proprietà:

○ $e^{\mathbf{A}t} = \mathbf{T}^{-1}\, e^{\overline{\mathbf{A}}t}\, \mathbf{T}$; ⊗ $e^{\mathbf{A}t} = \mathbf{T}\, e^{\overline{\mathbf{A}}t}\, \mathbf{T}^{-1}$; ○ $e^{\mathbf{A}t} = e^{\mathbf{T}}\, e^{\overline{\mathbf{A}}t}\, e^{\mathbf{T}^{-1}}$;

13. Sia dato un sistema lineare SISO completamente raggiungibile caratterizzato dalle matrici $\mathbf{A}$, $\mathbf{b}$ e $\mathbf{c}$. Indicare la struttura delle matrici $\mathbf{A}_c$, $\mathbf{b}_c$ e $\mathbf{c}_c$ della corrispondente forma canonica di controllo. Sia $p(\lambda) = \lambda^n + \alpha_{n-1}\lambda^{n-1} + \ldots + \alpha_0$ il polinomio caratteristico della matrice $\mathbf{A}$.

$$\mathbf{A}_C = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0\ldots & 0 \\ 0 & 0 & 1\ldots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ -\alpha_0 & -\alpha_1 & \ldots & -\alpha_{n-1} \end{bmatrix}, \qquad \mathbf{b}_C = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix}, \qquad \mathbf{c}_C = \begin{bmatrix} \beta_0 & \beta_1 & \ldots & \beta_{n-1} \end{bmatrix}$$

Indicare inoltre la struttura della matrice $\mathbf{T}$ che (utilizzando la trasformazione $\mathbf{x} = \mathbf{T}\mathbf{x}_c$) porta il sistema originario in forma canonica di controllo.

$$\mathbf{T} = \mathcal{R}^+(\mathcal{R}_c^+)^{-1} = \begin{bmatrix} \mathbf{b} & \mathbf{A}\mathbf{b} & \mathbf{A}^2\mathbf{b} & \ldots & \mathbf{A}^{n-1}\mathbf{b} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 & \ldots & \alpha_{n-1} & 1 \\ \alpha_2 & \alpha_3 & \ldots & \ldots & 1 & 0 \\ \alpha_3 & \ldots & \ldots & \ldots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \alpha_{n-1} & 1 & \ldots & \ldots & 0 & 0 \\ 1 & 0 & \ldots & \ldots & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

14. Indicare che cosa rappresenta il simbolo $\mathcal{X}^+(t_0, t_1, \mathbf{x}(t_0))$:

È l'insieme degli stati raggiungibili all'istante t_1 a partire dall'evento $\{t_0, \mathbf{x}(t_0)\}$.

15. Indicare che cosa rappresenta il simbolo $\mathcal{E}^-(t_0, t_1, \mathbf{u}(\cdot), \mathbf{y}(\cdot))$:

È l'insieme degli stati iniziali $\mathbf{x}(t_0)$ compatibili con le funzioni di ingresso $\mathbf{u}(\cdot)$ ed uscita $\mathbf{y}(\cdot)$ nell'intervallo di tempo $[t_0, t_1]$.

16. Sia $\mathcal{S}_D$ il sistema duale del sistema discreto $\mathcal{S} = (\mathbf{A},\ \mathbf{B},\ \mathbf{C},\ \mathbf{D})$:

⊗ Se $\mathcal{S}$ è raggiungibile $\Rightarrow \mathcal{S}_D$ è osservabile; ○ Se $\mathcal{S}$ è controllabile $\Rightarrow \mathcal{S}_D$ è osservabile;
⊗ Se $\mathcal{S}$ è osservabile $\Rightarrow \mathcal{S}_D$ è controllabile; ⊗ Se $\mathcal{S}$ è ricostruibile $\Rightarrow \mathcal{S}_D$ è controllabile;

17. Sia dato un sistema $(\mathbf{A},\ \mathbf{b})$ completamente raggiungibile. Il corrispondente sistema a dati campionati (essendo T il periodo di campionamento) è completamente raggiungibile se e solo se per ogni coppia λ_i, λ_j di autovalori distinti di $\mathbf{A}$ aventi la stessa parte reale, vale la relazione:

$$\mathrm{Im}(\lambda_i - \lambda_j) \neq \frac{2k\pi}{T} \qquad k = \pm 1,\ \pm 2,\ \ldots$$

18. Nel caso di sistemi discreti lineari invarianti $\mathbf{x}(k+1) = \mathbf{A}\,\mathbf{x}(k) + \mathbf{B}\,u(k)$, la successione di ingresso $\mathbf{u}(0), \ldots, \mathbf{u}(\bar{k}-1)$ che consente di far passare il sistema dallo stato iniziale $\mathbf{x}(0)$ allo stato finale $\mathbf{x}(\bar{k})$:

⊗ esiste se il sistema è raggiungibile; ○ esiste se $\mathbf{x}(\bar{k}) - e^{\mathbf{A}\bar{k}}\mathbf{x}(0) \in \mathcal{X}^+(\bar{k})$;
○ esiste se $\mathbf{x}(\bar{k}) \in \mathcal{X}^+(\bar{k})$; ⊗ esiste se $\mathbf{x}(\bar{k}) - \mathbf{A}^{\bar{k}}\mathbf{x}(0) \in \mathcal{X}^+(\bar{k})$;

19. Sia dato il seguente sistema dinamico lineare tempo-continuo:

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{x}}(t) = \left[\begin{array}{c|c|c} -1 & 2 & \mathbf{0} \\ \hline \mathbf{0} & 1 & \mathbf{0} \\ \hline \mathbf{0} & -1 & 1 \end{array}\right] \mathbf{x}(t) + \left[\begin{array}{c} 2 \\ \hline \mathbf{0} \\ \mathbf{0} \end{array}\right] u(t) \\ y(t) = \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & \mathbf{0} \end{array}\right] \mathbf{x}(t) \end{cases}$$

Pensando alla struttura a blocchi dei sistemi in forma standard è possibile affermare che:

- ⊗ il sistema è in forma standard di raggiungibilità;
- ⊗ il sistema è in forma standard di osservabilità;
- ○ è possibile costruire un osservatore dello stato per questo sistema;
- ○ è possibile stabilizzare questo sistema con una retroazione statica dello stato;

Usando le proprietà strutturali del sistema calcolare la funzione di trasferimento $G(s) = \frac{Y(s)}{U(s)}$ che lega l'ingresso $U(s) = \mathcal{L}[u(t)]$ all'uscita $Y(s) = \mathcal{L}[y(t)]$

$$G(s) = \mathbf{c}_1(s\,\mathbf{I} - \mathbf{a}_{11})^{-1}\mathbf{b}_1 = \frac{2}{s+1} \qquad \text{dove} \qquad \mathbf{c}_1 = 1,\ \mathbf{a}_{11} = -1,\ \mathbf{b}_1 = 2.$$

20. La formula di Ackerman per il calcolo del vettore $\mathbf{k}^{\mathrm{T}}$ che permette il posizionamento arbitrario degli autovalori del sistema retroazionato può essere utilizzata

- ○ per qualunque sistema;
- ⊗ solo se il sistema è raggiungibile;
- ○ solo se il sistema è osservabile;
- ⊗ solo per sistemi ad un solo ingresso;

21. Dato il sistema lineare tempo-discreto $\mathbf{x}(k+1) = \mathbf{A}\mathbf{x}(k) + \mathbf{B}\mathbf{u}(k)$, riportare la struttura di:
a) uno stimatore asintotico dello stato *in catena chiusa di ordine pieno*:

$$\hat{\mathbf{x}}(k+1) = (\mathbf{A} + \mathbf{LC})\hat{\mathbf{x}}(k) + \mathbf{B}\mathbf{u}(k) - \mathbf{L}\mathbf{y}(k)$$

b) uno stimatore asintotico dello stato *di ordine ridotto*:

$$\hat{\mathbf{x}}(k) = \mathbf{T}\begin{bmatrix} \hat{\mathbf{v}}(k) - \mathbf{L}\mathbf{y}(k) \\ \mathbf{y}(k) \end{bmatrix}$$

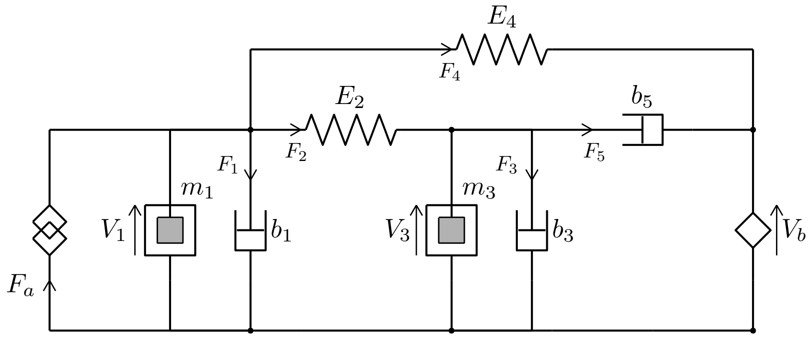
$$\hat{\mathbf{v}}(k+1) = (\overline{\mathbf{A}}_{11} + \mathbf{L}\overline{\mathbf{A}}_{21})\hat{\mathbf{v}}(k) + (\overline{\mathbf{A}}_{12} + \mathbf{L}\overline{\mathbf{A}}_{22} - \overline{\mathbf{A}}_{11}\mathbf{L} - \mathbf{L}\overline{\mathbf{A}}_{21}\mathbf{L})\mathbf{y}(k) + (\mathbf{B}_1 + \mathbf{L}\mathbf{B}_2)\mathbf{u}(k)$$

22. Enunciare il criterio diretto di stabilità di Lyapunov nel caso di sistemi tempo continui.
Si consideri il sistema non lineare $\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{f}(\mathbf{x}(t), \mathbf{u}_0)$ *e sia* $\mathbf{x}_0$ *un punto di equilibrio corrispondente all'ingresso costante* $\mathbf{u}_0$.
1) Se in un intorno W *di* $\mathbf{x}_0$ *esiste una funzione* $V(\mathbf{x}) : W \to \mathcal{R}$ definita positiva *con derivate prime continue e se* $\dot{V}(\mathbf{x})$ *è* semidefinita negativa, *allora il punto* $\mathbf{x}_0$ *è* stabile *per il sistema non lineare.*
2) Se inoltre $\dot{V}(\mathbf{x})$ *è* definita *negativa, allora l'origine è* asintoticamente *stabile.*

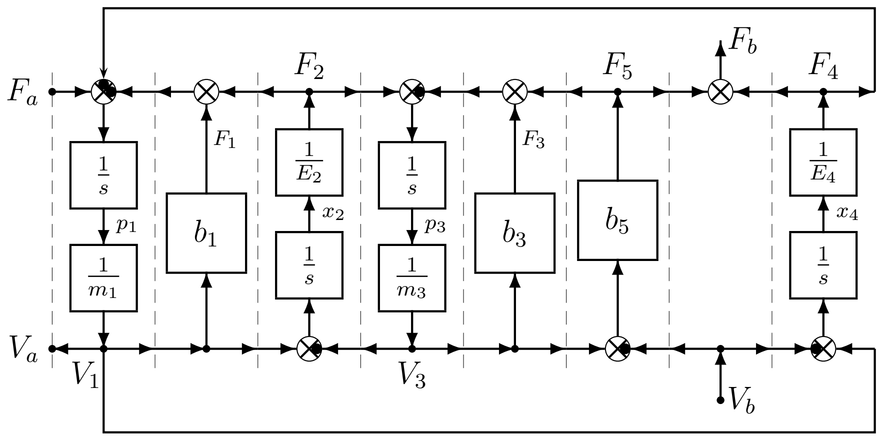
23. Indicare quali delle seguenti funzioni $V(x_1, x_2)$ sono definite positive nell'intorno dell'origine:

- ○ $V(x_1, x_2) = x_1^2 x_2^2$;
- ⊗ $V(x_1, x_2) = x_1^2 + x_2^2$;
- ○ $V(x_1, x_2) = x_1^2 x_2^2 (x_1^2 + x_2^2)$;
- ⊗ $V(x_1, x_2) = x_1^2 + x_2^2 - x_1^4 - x_2^4$;

24. Si consideri il seguente sistema meccanico costituito dalle masse m_1, m_3, dalle elasticità E_2, E_4 e dai dissipatori b_1, b_2 e b_5. Sul sistema agiscono due ingressi: la forza F_a e la velocità V_b. Le uscite del sistema sono: velocità $V_a = V_1$ e la forza $F_b = F_4 + F_5$.



Il modello P.O.G. del circuito meccanico assegnato ha la seguente struttura:



Sia $\mathbf{x} = \begin{bmatrix} V_1 & F_2 & V_3 & F_4 \end{bmatrix}^{\mathrm{T}}$ il vettore di stato, $\mathbf{u} = \begin{bmatrix} F_a & V_b \end{bmatrix}^{\mathrm{T}}$ il vettore degli ingressi e $\mathbf{y} = \begin{bmatrix} V_a & F_b \end{bmatrix}^{\mathrm{T}}$ il vettore delle uscite. Scrivere il corrispondente sistema dinamico $\overline{\mathbf{L}}\dot{\mathbf{x}} = \overline{\mathbf{A}}\mathbf{x} + \overline{\mathbf{B}}\mathbf{u}$ e $\mathbf{y} = \overline{\mathbf{C}}\mathbf{x} + \overline{\mathbf{D}}\mathbf{u}$ nello spazio degli stati:

$$\underbrace{\begin{bmatrix} m_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & E_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & m_3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & E_4 \end{bmatrix}}_{\overline{\mathbf{L}}} \underbrace{\begin{bmatrix} \dot{V}_1 \\ \dot{F}_2 \\ \dot{V}_3 \\ \dot{F}_4 \end{bmatrix}}_{\dot{\mathbf{x}}} = \underbrace{\begin{bmatrix} -b_1 & -1 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -b_3-b_5 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}}_{\overline{\mathbf{A}}} \underbrace{\begin{bmatrix} V_1 \\ F_2 \\ V_3 \\ F_4 \end{bmatrix}}_{\mathbf{X}} + \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & b_5 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}}_{\overline{\mathbf{B}}} \underbrace{\begin{bmatrix} F_a \\ V_b \end{bmatrix}}_{\mathbf{u}}$$

$$\underbrace{\begin{bmatrix} V_a \\ F_b \end{bmatrix}}_{\mathbf{y}} = \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & b_5 & 1 \end{bmatrix}}_{\overline{\mathbf{C}}} \mathbf{x} + \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -b_5 \end{bmatrix}}_{\overline{\mathbf{D}}} \underbrace{\begin{bmatrix} F_a \\ V_b \end{bmatrix}}_{\mathbf{u}}$$

25. Sia dato un elemento elettrico caratterizzato da una tensione V in uscita, una corrente I in ingresso e da una capacità non lineare $C(V)$ che è funzione della tensione V. Scrivere: 1) l'equazione costitutiva dell'elemento elettrico; 2) l'equazione differenziale che descrive la dinamica dell'elemento fisico:

$$1) \quad Q = C(V)\,V \qquad\qquad 2) \quad \frac{d}{dt}\left[C(V)\,V\right] = I$$

26. Sia dato il seguente sistema non–lineare, tempo–discreto, privo di ingressi:

$$\begin{cases} x_1(k+1) &= 0.5\sin x_2(k) + x_1(k) \\ x_2(k+1) &= 1 - x_1(k) + x_2^2(k)\sin x_2(k) \end{cases}$$

a) Si verifichi se il punto $\mathbf{x}_0 = (1, 0)$ è un punto di equilibrio per il sistema:

Il punto $\mathbf{x}_0 = (1, 0)$ è di equilibrio per il sistema in quanto valgono le seguenti relazioni:

$$\begin{cases} x_1(k) &= 0.5\sin x_2(k) + x_1(k) \\ x_2(k) &= 1 - x_1(k) + x_2^2(k)\sin x_2(k) \end{cases} \qquad \rightarrow \qquad \begin{cases} 1 &= 1 \\ 0 &= 1-1 \end{cases}$$

b) Linearizzare il sistema nell'intorno del punto $\mathbf{x}_0 = (1, 0)$ calcolando la matrice $\mathbf{A}$ del corrispondente sistema linearizzato:

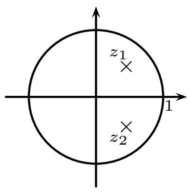
La matrice $\mathbf{A}$ del sistema linearizzato ha la seguente struttura:

$$\mathbf{A} = \left[\begin{array}{cc} 1 & 0.5\cos x_2 \\ -1 & x_2^2\cos x_2 + 2x_2\sin x_2 \end{array}\right]_{(x_1=1,\ x_2=0)} = \left[\begin{array}{cc} 1 & 0.5 \\ -1 & 0 \end{array}\right]$$

c) Studiare la stabilità del sistema non lineare nell'intorno del punto $\mathbf{x}_0 = (1, 0)$ utilizzando il criterio ridotto di Lyapunov:

Gli autovalori della matrice $\mathbf{A}$ sono le radici del seguente polinomio caratteristico:

$$\det[z\mathbf{I}_2 - \mathbf{A}] = 0 \qquad \rightarrow \qquad z^2 - z + 0.5 = 0$$



Le radici del polinomio caratteristico sono:

$$z_{1,2} = \frac{1}{2}\left(1 \pm \sqrt{1-2}\right) = \frac{1}{2}(1 \pm j) = \frac{\sqrt{2}}{2}\, e^{\pm j \arctan\sqrt{7}}$$

In base al criterio ridotto di Lyapunov il sistema non lineare è stabile nell'intorno del punto $\mathbf{x}_0 = (1, 0)$ in quanto entrambi gli autovalori del sistema sono interni al cerchio unitario.

27. Sia dato il seguente sistema non–lineare, tempo–discreto, privo di ingressi:

$$\begin{cases} x_1(k+1) &= x_1(k) + 3\,x_2^2(k) \\ x_2(k+1) &= 3\,x_2^2(k) \end{cases}$$

È facile verificare che $\mathbf{x}_0 = (0, 0)$ è un punto di equilibrio per il sistema. Studiare la stabilità del punto $\mathbf{x}_0 = (0, 0)$ utilizzando il criterio "diretto" di Lyapunov e la funzione: $V(\mathbf{x}) = x_1^2 + x_2^2$. Eventualmente si utilizzi anche il criterio di La Salle - Krasowskii.

Nell'intorno del punto $\mathbf{x}_0 = (0, 0)$ la funzione $V(\mathbf{x}) = x_1^2 + x_2^2$ è sicuramente definita positiva. La funzione $\Delta V(\mathbf{x})$ calcolata lungo le traiettorie del sistema è la seguente:

$$\begin{aligned} \Delta V(\mathbf{x}) &= V(\mathbf{x}(k+1)) - V(\mathbf{x}(k)) = (x_1 + 3x_2^2)^2 + 9x_2^4 - x_1^2 - x_2^2 \\ &= x_2^2(18x_2^2 + 6x_1 - 1) \simeq -x_2^2 \leq 0 \end{aligned}$$

La funzione $\Delta V(\mathbf{x})$ è semidefinita negativa per cui, in base al criterio "diretto" di Lyapunov, è possibile affermare che nell'intorno del punto $\mathbf{x}_0 = (0, 0)$ il sistema non lineare è stabile. L'insieme $\mathcal{N}$ dei punti che annullano la funzione $\Delta V(\mathbf{x})$ è $\mathcal{N} = \{(x_1, 0),\ x_1 \in R\}$. Per $(x_1,\ x_2) \in \mathcal{N}$ il sistema dato si semplifica come segue:

$$\begin{cases} x_1(k+1) &= x_1(k) \\ 0 &= 0 \end{cases} \qquad \Rightarrow \qquad (x_1,\ x_2) = (x_{10},\ 0)$$

L'insieme $\mathcal{N}$ contiene la traiettoria perturbata $\mathbf{x}(k) = (x_{10},\ 0)$, $x_{10} \in R$, per cui il sistema non lineare è semplicemente stabile nell'intorno punto $\mathbf{x}_0 = (0, 0)$.