

**Teoria dei Sistemi**  
**Teoria dei Sistemi e del Controllo**  
**Compito A del 24 Giugno 2010**  
**Domande ed esercizi**

Nome:			
Nr. Mat.			
Firma:			
C.L.:	Info.	Elet.	Telec.

1. Nel caso di sistemi lineari continui tempo-varianti, la matrice di transizione dello stato  $\Phi(t, t_0)$  è soluzione di quale equazione differenziale matriciale (indicare anche la condizione iniziale)?

$$\frac{d}{dt}\Phi(t, t_0) = \mathbf{A}(t)\Phi(t, t_0), \quad \Phi(t_0, t_0) = \mathbf{I}$$

2. Un sistema dinamico caratterizzato dalla funzione di stato  $\mathbf{x}(k+1) = \mathbf{f}(\mathbf{x}(k), \mathbf{u}(k))$

- è un sistema lineare;
- è un sistema tempo-discreto;
- è un sistema tempo-invariante;
- è un sistema raggiungibile;

3. Scrivere la soluzione generale dell'equazione differenziale matriciale  $\mathbf{x}(k+1) = \mathbf{A}\mathbf{x}(k) + \mathbf{B}\mathbf{u}(k)$  a partire dalla condizione iniziale  $\mathbf{x}(0)$  all'istante  $k = 0$ :

$$\mathbf{x}(k) = \mathbf{A}^k \mathbf{x}(0) + \sum_{j=0}^{k-1} \mathbf{A}^{(k-j-1)} \mathbf{B}\mathbf{u}(j)$$

4. Scrivere la definizione di esponenziale di matrice:

$$e^{\mathbf{A}t} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\mathbf{A}t)^n}{n!}$$

5. Applicando al sistema  $(\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{C})$  una trasformazione lineare  $\mathbf{x} = \mathbf{T}\bar{\mathbf{x}}$  si ottiene un sistema trasformato  $(\bar{\mathbf{A}}, \bar{\mathbf{B}}, \bar{\mathbf{C}})$  caratterizzato dalle seguenti matrici  $\bar{\mathbf{A}}, \bar{\mathbf{B}}$  e  $\bar{\mathbf{C}}$ :

$$\bar{\mathbf{A}} = \mathbf{T}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{T}, \quad \bar{\mathbf{B}} = \mathbf{T}^{-1}\mathbf{B}, \quad \bar{\mathbf{C}} = \mathbf{C}\mathbf{T}$$

e tale per cui le matrici  $\mathbf{A}$  e  $\bar{\mathbf{A}}$

- hanno gli stessi autovalori;
- hanno gli stessi autovettori;
- hanno lo stesso polinomio caratteristico;
- hanno lo stesso determinante;

6. Sia  $\lambda$  un autovalore della matrice  $\mathbf{A}$  con grado di molteplicità  $r$ . L'autospazio  $U_\lambda$

- è un sottospazio vettoriale;
- ha sempre dimensione uguale ad  $r$ ;
- è composto da tutti e soli gli autovettori della matrice  $\mathbf{A}$  associati all'autovalore  $\lambda$ ;

7. Una matrice  $\mathbf{A}$  di dimensione  $n$  è diagonalizzabile

- se è invertibile;
- se ha  $n$  autovalori reali distinti;
- se ha  $n$  autovettori linearmente indipendenti;
- se i miniblocchi di Jordan hanno tutti dimensione unitaria;

8. Scrivere la matrice di trasferimento  $\mathbf{H}(z)$  di un sistema lineare tempo-discreto in funzione delle matrici  $\mathbf{A}$ ,  $\mathbf{B}$ ,  $\mathbf{C}$  e  $\mathbf{D}$  che caratterizzano il sistema lineare:

$$\mathbf{H}(z) = \mathbf{C}(z\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}\mathbf{B} + \mathbf{D}$$

9. Nel caso di sistemi tempo-continui lineari invarianti  $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x}(t) + \mathbf{B}\mathbf{u}(t)$ , scrivere la condizione che deve essere soddisfatta affinché sia possibile far passare il sistema dallo stato iniziale  $\mathbf{x}(0)$  allo stato finale  $\mathbf{x}(t)$  nell'intervallo di tempo  $[0, t]$ :

$$\mathbf{x}(t) - e^{\mathbf{A}t}\mathbf{x}(0) \in \mathcal{X}^+$$

10. Una matrice  $\mathbf{N}$  nilpotente di ordine  $\nu$  è una matrice

- tale per cui  $\mathbf{N}^\nu = \mathbf{I}$ ;
- tale per cui  $\mathbf{N}^\nu = \mathbf{0}$ ;
- che ha tutti gli autovalori unitari;
- che ha tutti gli autovalori nell'origine;

11. Calcolare, in funzione della condizione iniziale  $\mathbf{x}(0) = [x_1(0), x_2(0), x_3(0)]^T$ , l'evoluzione libera del seguente sistema autonomo tempo-continuo:

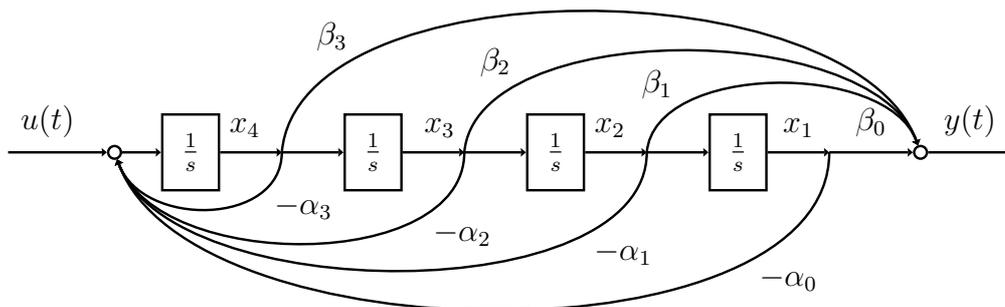
$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{bmatrix} \mathbf{x}(t) \quad \mathbf{x}(t) = \begin{bmatrix} e^{2t} & te^{2t} & 0 \\ 0 & e^{2t} & 0 \\ 0 & 0 & e^{-2t} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(0) \\ x_2(0) \\ x_3(0) \end{bmatrix}$$

12. Dato il sistema dinamico sotto riportato in forma canonica di osservabilità, scrivere la funzione di trasferimento  $G(s)$  che lega l'ingresso  $u(t)$  all'uscita  $y(t)$ :

$$G(s) = \frac{3s^3 + 1s^2 + 5s + 2}{s^4 + s^3 + 4s^2 + 3s + 6} \quad \begin{cases} \dot{\mathbf{x}}(t) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & -6 \\ 1 & 0 & 0 & -3 \\ 0 & 1 & 0 & -4 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{bmatrix} \mathbf{x}(t) + \begin{bmatrix} 2 \\ 5 \\ 1 \\ 3 \end{bmatrix} u(t) \\ y(t) = [0 \ 0 \ 0 \ 1] \mathbf{x}(t) \end{cases}$$

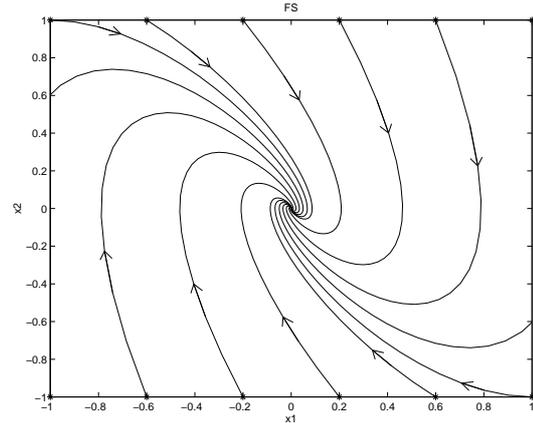
13. Disegnare lo schema a blocchi associato al seguente sistema tempo-continuo posto in forma canonica di controllo dove  $\mathbf{x}_c = [x_1 \ x_2 \ x_3 \ x_4]^T$ .

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{x}}_c(t) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -\alpha_0 & -\alpha_1 & -\alpha_2 & -\alpha_3 \end{bmatrix} \mathbf{x}_c(t) + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} u(t) \\ y(t) = [\beta_0 \ \beta_1 \ \beta_2 \ \beta_3] \mathbf{x}_c(t) \end{cases}$$



14. Considerato un sistema dinamico tempo continuo del secondo ordine caratterizzato da due autovalori reali  $\lambda_1 = -1 + 2j$ ,  $\lambda_2 = -1 - 2j$ , rispondere alle seguenti domande e indicare qual è l'andamento qualitativo delle traiettorie nell'intorno dell'origine:

- gli autovettori del sistema  $\mathbf{v}_1$  e  $\mathbf{v}_2$  sono reali e distinti.  
 gli autovettori del sistema  $\mathbf{v}_1$  e  $\mathbf{v}_2$  sono complessi coniugati.  
 per  $t \rightarrow \infty$  tutte le traiettorie tendono ad appiattirsi sull'autovettore  $\mathbf{v}_1$ .  
 per  $t \rightarrow \infty$  tutte le traiettorie tendono ad appiattirsi sull'autovettore  $\mathbf{v}_2$ .



Quale nome viene tipicamente utilizzato per indicare il tipo di traiettorie sopra indicato:

- Nodo?     Fuoco?     Sella?     Degenerare?     Stabile?     Instabile?

15. Sia dato un sistema lineare stazionario a tempo discreto di dimensione  $n$ :

$$\begin{aligned} \mathbf{x}(k+1) &= \mathbf{A}\mathbf{x}(k) + \mathbf{B}\mathbf{u}(k) \\ \mathbf{y}(k) &= \mathbf{C}\mathbf{x}(k) \end{aligned}$$

- mediante una retroazione stato–ingresso è possibile allocare a piacimento gli autovalori della parte osservabile del sistema;  
 la retroazione stato–ingresso non consente di modificare la dimensione del sottospazio di raggiungibilità;  
 è sempre possibile stabilizzare il sistema mediante retroazione stato–ingresso se gli autovalori della parte non–raggiungibile hanno modulo inferiore all'unità.

16. Sia  $(\mathbf{A}, \mathbf{c})$  una coppia di matrici osservabile. Scrivere la formula di Ackerman (in forma compatta) relativa al vettore dei guadagni  $\mathbf{l}$  di un osservatore asintotico dello stato che posiziona ad arbitrio gli autovalori della matrice  $\mathbf{A} + \mathbf{l}\mathbf{c}$ :

$$\mathbf{l} = \underbrace{-p(\mathbf{A}) (\mathcal{O}^-)^{-1}}_{\mathbf{q}} \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = -p(\mathbf{A})\mathbf{q}$$

dove  $\mathbf{q}$  è l'ultima colonna dell'inversa della matrice di osservabilità

e dove  $p(\lambda)$  è la matrice che si ottiene dal polinomio arbitrario  $p(\lambda)$  sostituendo in esso la matrice  $\mathbf{A}$  al posto del parametro  $\lambda$ .

17. Scrivere la struttura del polinomio desiderato  $p(\lambda)$  nel caso in cui si voglia posizionare gli autovalori di un sistema del 4° ordine in  $\lambda = -2$ ,  $\lambda = -2$ ,  $\lambda = -5$  e  $\lambda = -6$ :

$$p(\lambda) = (\lambda + 2)^2(\lambda + 5)(\lambda + 6)$$

18. Enunciare il *Lemma di Heymann*:

Se  $(\mathbf{A}, \mathbf{B})$  è raggiungibile e se  $\mathbf{b}_i$  è una colonna non nulla di  $\mathbf{B}$ , allora esiste una matrice  $\mathbf{M}_i \in \mathcal{R}^{m \times n}$  tale che  $(\mathbf{A} + \mathbf{B}\mathbf{M}_i, \mathbf{b}_i)$  è raggiungibile.

19. Sia dato un sistema lineare tempo-discreto  $\mathbf{x}(k+1) = \mathbf{A}\mathbf{x}(k) + \mathbf{B}\mathbf{u}(k)$ ,  
 a) scrivere la struttura dello stimatore asintotico dello stato *in catena chiusa di ordine pieno*:

$$\hat{\mathbf{x}}(k+1) = (\mathbf{A} + \mathbf{L}\mathbf{C})\hat{\mathbf{x}}(k) + \mathbf{B}\mathbf{u}(k) - \mathbf{L}\mathbf{y}(k)$$

- b) scrivere l'andamento temporale dell'errore di stima  $\mathbf{e}(k) = \mathbf{x}(k) - \hat{\mathbf{x}}(k)$  a partire dalla condizione iniziale  $\mathbf{e}(0)$ :

$$\mathbf{e}(k) = (\mathbf{A} + \mathbf{L}\mathbf{C})^k \mathbf{e}(0)$$

20. Scrivere la struttura della matrice di trasformazione  $\mathbf{P}_c^{-1}$  che porta un sistema  $\mathcal{S} = (\mathbf{A}, \mathbf{b}, \mathbf{c})$  osservabile in forma canonica di osservabilità ( $\mathbf{x} = \mathbf{P}_c \mathbf{x}_c$ ):

$$\mathbf{P}_c^{-1} = (\mathcal{O}_c^-)^{-1} \mathcal{O}^- = \begin{bmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 & \dots & \alpha_{n-1} & 1 \\ \alpha_2 & \alpha_3 & \dots & \dots & 1 & 0 \\ \alpha_3 & \dots & \dots & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \alpha_{n-1} & 1 & \dots & \dots & 0 & 0 \\ 1 & 0 & \dots & \dots & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{c} \\ \mathbf{c}\mathbf{A} \\ \mathbf{c}\mathbf{A}^2 \\ \dots \\ \mathbf{c}\mathbf{A}^{n-1} \end{bmatrix}$$

dove i coefficienti  $\alpha_i$  sono i coefficienti del polinomio caratteristico della matrice  $\mathbf{A}$ .

21. a) Scrivere la struttura a blocchi di un sistema  $\mathcal{S}$  tempo-continuo non completamente raggiungibile posto in forma standard di raggiungibilità  $\bar{\mathcal{S}}$ :

$$\bar{\mathbf{A}} = \begin{bmatrix} \bar{\mathbf{A}}_{11} & \bar{\mathbf{A}}_{12} \\ \mathbf{0} & \bar{\mathbf{A}}_{22} \end{bmatrix}, \quad \bar{\mathbf{B}} = \begin{bmatrix} \bar{\mathbf{B}}_1 \\ \mathbf{0} \end{bmatrix}, \quad \bar{\mathbf{C}} = [ \bar{\mathbf{C}}_1 \quad \bar{\mathbf{C}}_2 ]$$

- b) Scrivere la forma semplificata della matrice di trasferimento  $\mathbf{H}(s)$  del sistema  $\mathcal{S}$  in funzione delle sottomatrici che caratterizzano il sistema  $\bar{\mathcal{S}} = (\bar{\mathbf{A}}, \bar{\mathbf{B}}, \bar{\mathbf{C}})$  in forma standard di raggiungibilità:

$$\mathbf{H}(s) = \bar{\mathbf{C}}_1 (s\mathbf{I} - \bar{\mathbf{A}}_{11})^{-1} \bar{\mathbf{B}}_1$$

22. Uno stimatore asintotico dello stato “in catena aperta” può essere utilizzato

- se e solo se il sistema è osservabile;
- se e solo se il sistema è asintoticamente stabile;
- se e solo se la parte instabile del sistema è osservabile;
- se e solo se la parte non osservabile del sistema è asintoticamente stabile;

23. Sia  $\mathcal{S}_D$  il sistema duale del sistema discreto  $\mathcal{S} = (\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{C}, \mathbf{D})$ :

- Se  $\mathcal{S}$  è raggiungibile  $\Rightarrow \mathcal{S}_D$  è osservabile;
- Se  $\mathcal{S}$  è osservabile  $\Rightarrow \mathcal{S}_D$  è controllabile;
- Se  $\mathcal{S}$  è controllabile  $\Rightarrow \mathcal{S}_D$  è osservabile;
- Se  $\mathcal{S}$  è ricostruibile  $\Rightarrow \mathcal{S}_D$  è controllabile;

24. Indicare la struttura del sistema duale  $\mathcal{S}_D$  associato ad un sistema dato  $\mathcal{S} = (\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{C}, \mathbf{D})$ :

$$\mathcal{S}_D = (\mathbf{A}^T, \mathbf{C}^T, \mathbf{B}^T, \mathbf{D}^T)$$

25. Un sistema  $(\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{C})$  è sempre “stabilizzabile” mediante retroazione statica della stima dello stato fornita da un osservatore asintotico

- se il sistema è stabile;
- se e solo se il sistema è raggiungibile ed osservabile;
- se e solo se la parte non raggiungibile e non osservabile del sistema è stabile;

26. Enunciare la *Proprietà di separazione* del regolatore:

*La sintesi del blocco di retroazione  $(\mathbf{A} + \mathbf{BK})$  e del blocco di stima  $(\mathbf{A} + \mathbf{LC})$  può essere fatta in modo indipendente:*

$$\det[z\mathbf{I} - \bar{\mathbf{A}}] = \det[z\mathbf{I} - (\mathbf{A} + \mathbf{BK})] \det[z\mathbf{I} - (\mathbf{A} + \mathbf{LC})]$$

27. Scrivere la relazione necessaria e sufficiente che garantisce la completa controllabilità in  $k$  passi del sistema lineare discreto  $\mathbf{x}(k+1) = \mathbf{Ax}(k) + \mathbf{Bu}(k)$ :

$$\text{Im}\mathbf{A}^k \subseteq \text{Im}[\mathbf{B}, \mathbf{AB}, \dots, \mathbf{A}^{k-1}\mathbf{B}] = \mathcal{X}^+(k)$$

28. Relativamente ad un sistema lineare stazionario discreto  $\mathbf{x}(k+1) = \mathbf{Ax}(k) + \mathbf{Bu}(k)$  che ha almeno un autovalore nell'origine, è possibile affermare che:

- se il sistema è completamente controllabile allora è anche completamente raggiungibile;
- se il sistema è completamente raggiungibile allora è anche completamente controllabile;
- se il sistema è completamente osservabile allora è anche completamente ricostruibile;
- se il sistema è completamente ricostruibile allora è anche completamente osservabile;

29. Un sistema dinamico discreto lineare stazionario è caratterizzato da matrici  $\mathbf{A}$ ,  $\mathbf{B}$  e  $\mathbf{C}$  aventi la seguente struttura:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} \mathbf{A}_{11} & 0 \\ 0 & \mathbf{A}_{22} \end{bmatrix} \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} \mathbf{B}_1 \\ \mathbf{B}_2 \end{bmatrix} \\ \mathbf{C} = [\mathbf{C}_1 \quad 0]$$

- Il sistema non è completamente raggiungibile;
- Il sistema non è completamente osservabile;
- Il sistema può essere raggiungibile;

30. Sia dato un sistema non-lineare tempo discreto  $\mathbf{x}(k+1) = \mathbf{f}(\mathbf{x}(k), \bar{\mathbf{u}})$  sollecitato da un ingresso costante  $\mathbf{u}(k) = \bar{\mathbf{u}}$ . Scrivere la relazione statica da risolvere per determinare i punti di equilibrio  $\mathbf{x}(k) = \mathbf{x}_e$ :

$$\mathbf{x}_e = \mathbf{f}(\mathbf{x}_e, \bar{\mathbf{u}})$$

31. Si consideri ora il seguente sistema non lineare tempo continuo  $\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{f}(\mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t))$ ,  $\mathbf{y}(t) = \mathbf{g}(\mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t))$  e sia  $\mathbf{x}_0$  un punto di equilibrio del sistema per ingresso costante  $\mathbf{u}_0$ . Indicare come si calcolano le matrici del sistema linearizzato:

$$\mathbf{A} = \left. \frac{\partial \mathbf{f}(\mathbf{x}, \mathbf{u})}{\partial \mathbf{x}} \right|_{(\mathbf{x}_0, \mathbf{u}_0)}, \quad \mathbf{B} = \left. \frac{\partial \mathbf{f}(\mathbf{x}, \mathbf{u})}{\partial \mathbf{u}} \right|_{(\mathbf{x}_0, \mathbf{u}_0)}, \quad \mathbf{C} = \left. \frac{\partial \mathbf{g}(\mathbf{x}, \mathbf{u})}{\partial \mathbf{x}} \right|_{(\mathbf{x}_0, \mathbf{u}_0)}, \quad \mathbf{D} = \left. \frac{\partial \mathbf{g}(\mathbf{x}, \mathbf{u})}{\partial \mathbf{u}} \right|_{(\mathbf{x}_0, \mathbf{u}_0)}$$

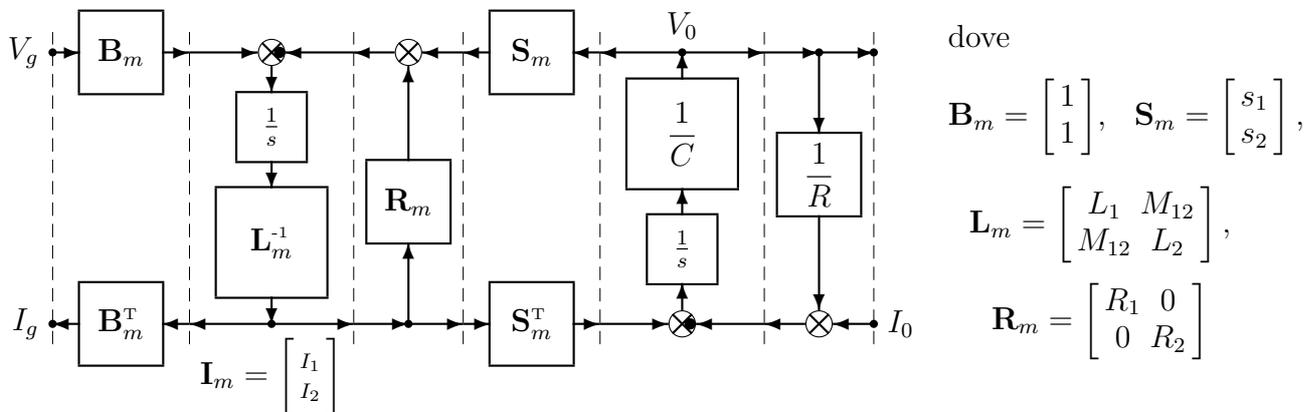
32. Scrivere all'interno della seguente tabella i simboli e i nomi delle variabili energia e della variabili di potenza che caratterizzano l'ambito energetico *meccanico traslazionale*. Indicare inoltre la relazione costitutiva dei singoli elementi e l'equazione differenziale che caratterizza gli elementi dinamici:

	Simboli	Rel. Costitutiva	Caso Lineare	Eq. Differenziale
$\mathcal{D}_1$	$M$ Massa			
$q_1$	$P$ quantità di moto	$P = \Phi_M(\dot{x})$	$P = M \dot{x}$	$\frac{dP}{dt} = F$
$v_1$	$\dot{x}$ velocità			
$\mathcal{D}_2$	$E$ Elasticità			
$q_2$	$x$ spostamento	$x = \Phi_E(F)$	$x = E F$	$\frac{dx}{dt} = \dot{x}$
$v_2$	$F$ forza			
$\mathcal{R}$	$b$ Dissipatore	$F = \Phi_b(\dot{x})$	$F = b \dot{x}$	

33. Il sistema che si ottiene quando si utilizza un regolatore (cioè la serie di uno stimatore asintotico dello stato e dell'elemento statico di retroazione  $K$ ) per stabilizzare in retroazione un sistema dinamico assegnato

- è un sistema raggiungibile;
- è un sistema osservabile;
- è un sistema raggiungibile ed osservabile;

34. Si consideri il seguente schema P.O.G. di un Boost Converter:



Sia  $\mathbf{x} = [ I_1 \quad I_2 \quad V_0 ]^T$  il vettore di stato (composto dalle variabili di potenza in uscita degli elementi dinamici) e sia  $\mathbf{u} = [ V_g \quad I_0 ]^T$  il vettore degli ingressi. Scrivere il corrispondente sistema dinamico nello spazio degli stati:

$$\underbrace{\begin{bmatrix} L_1 & M_{12} & 0 \\ M_{12} & L_2 & 0 \\ 0 & 0 & C_0 \end{bmatrix}}_{\mathbf{L}} \underbrace{\begin{bmatrix} \dot{I}_1 \\ \dot{I}_2 \\ \dot{V}_0 \end{bmatrix}}_{\dot{\mathbf{x}}} = \underbrace{\begin{bmatrix} -R_1 & 0 & -s_1 \\ 0 & -R_2 & -s_2 \\ s_1 & s_2 & -\frac{1}{R} \end{bmatrix}}_{\mathbf{A}} \underbrace{\begin{bmatrix} I_1 \\ I_2 \\ V_0 \end{bmatrix}}_{\mathbf{x}} + \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}}_{\mathbf{B}} \underbrace{\begin{bmatrix} V_g \\ I_0 \end{bmatrix}}_{\mathbf{u}}$$