Teoria dei Sistemi
Teoria dei Sistemi e del Controllo
Compito B del 27 Aprile 2010
Domande ed esercizi

Nome:			
Nr. Mat.			
Firma:			
C.L.:	Info.	Elet.	Telec.

1. Scrivere la forma esplicita della *matrice di transizione dello stato* $\mathbf{\Phi}(t_0, t)$ nel caso di sistemi dinamici lineari continui tempo-invarianti:

$$\mathbf{\Phi}(t, t_0) = e^{\mathbf{A}(t-t_0)}$$

2. Scrivere la soluzione esplicita dell'equazione alle differenze $\mathbf{x}(k+1) = \mathbf{A}\mathbf{x}(k)+\mathbf{B}\mathbf{u}(k)$ essendo $\mathbf{x}(h)$ lo stato iniziale all'istante h.

$$\mathbf{x}(k) = \mathbf{A}^{k-h}\mathbf{x}(h) + \sum_{j=h}^{k-1} \mathbf{A}^{k-j-1}\mathbf{B}\,\mathbf{u}(j)$$

3. La molteplicità *algebrica* di un autovalore λ della matrice $\mathbf{A}$

   ◯ è la dimensione dell'autospazio U_λ associato all'autovalore λ;
   ⊗ è la dimensione del blocco di Jordan $\mathbf{J}_\lambda$ associato all'autovalore λ;
   ⊗ è il grado di molteplicità di λ nel polinomio caratteristico della matrice $\mathbf{A}$;
   ◯ è il numero di autovettori linearmente indipendenti associati all'autovalore λ;

4. Applicando al sistema dinamico $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{B}\mathbf{u}$, $\mathbf{y} = \mathbf{C}\mathbf{x}$ la trasformazione di coordinate $\mathbf{x} = \mathbf{T}\overline{\mathbf{x}}$ si ottiene un sistema trasformato $\dot{\overline{\mathbf{x}}} = \overline{\mathbf{A}}\overline{\mathbf{x}}+\overline{\mathbf{B}}\mathbf{u}$, $\mathbf{y} = \overline{\mathbf{C}}\overline{\mathbf{x}}$ caratterizzato dalle seguenti matrici $\overline{\mathbf{A}}$, $\overline{\mathbf{B}}$ e $\overline{\mathbf{C}}$:

$$\overline{\mathbf{A}} = \mathbf{T}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{T}, \qquad \overline{\mathbf{B}} = \mathbf{T}^{-1}\mathbf{B}, \qquad \overline{\mathbf{C}} = \mathbf{C}\mathbf{T}$$

5. Scrivere la matrici di trasferimento $\mathbf{H}(z)$ di un sistema lineare tempo-discreto in funzione delle matrici $\mathbf{A}$, $\mathbf{B}$, $\mathbf{C}$ e $\mathbf{D}$ che caratterizzano il sistema lineare:

$$\mathbf{H}(z) = \mathbf{C}(z\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}\mathbf{B} + \mathbf{D}$$

6. L'elemento $H_{i,j}(s)$ della matrice di trasferimento $\mathbf{H}(s) = \mathbf{C}(s\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}\mathbf{B}$ di un sistema lineare di ordine n è la trasformata di Laplace

   ◯ dell'uscita j-esima quando un impulso è applicato all'ingresso i-esimo;
   ⊗ dell'uscita i-esima quando un impulso è applicato all'ingresso j-esimo;
   ◯ dell'uscita j-esima quando un gradino è applicato all'ingresso i-esimo;
   ◯ dell'uscita i-esima quando un gradino è applicato all'ingresso j-esimo;

7. Scrivere la formula per calcolare la matrice di transizione dello stato $\mathbf{A}^k$ di un sistema lineare tempo-discreto utilizzando le trasformate Zeta:

$$\mathbf{A}^k = \mathcal{Z}^{-1}[z(z\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}]$$

8. Nel caso di sistemi tempo-continui lineari invarianti $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\,\mathbf{x}(t)+\mathbf{B}\,\mathbf{u}(t)$, scrivere la condizione che deve essere soddisfatta affinché sia possibile far passare il sistema dallo stato iniziale $\mathbf{x}(0)$ allo stato finale $\mathbf{x}(t)$ nell'intervallo di tempo $[0,\ t]$:

$$\mathbf{x}(t) - e^{\mathbf{A}t}\mathbf{x}(0) \in \mathcal{X}^+$$

9. Mostrare la struttura del generico blocco di Jordan $\mathbf{J}_i$ e del generico miniblocco di Jordan $\mathbf{J}_{i,j}$ associato all'i-esimo autovalore λ_i di una generica matrice $\mathbf{A}$.

$$\mathbf{J}_i = \begin{bmatrix} \mathbf{J}_{i,1} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \mathbf{J}_{i,2} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \mathbf{J}_{i,\nu_i} \end{bmatrix}, \qquad \mathbf{J}_{i,j} = \begin{bmatrix} \lambda_i & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_i & 1 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_i & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \lambda_i & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & \lambda_i \end{bmatrix}$$

10. Calcolare, in funzione della condizione iniziale $\mathbf{x}(0) = [x_1(0),\ x_2(0),\ x_3(0),\ x_4(0)]^{\mathrm{T}}$, l'evoluzione libera del seguente sistema autonomo tempo-continuo:

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} \mathbf{x}(t) \qquad \mathbf{x}(t) = \begin{bmatrix} e^{2t} & te^{2t} & \frac{t^2}{2}e^{2t} & \frac{t^3}{6}e^{2t} \\ 0 & e^{2t} & te^{2t} & \frac{t^2}{2}e^{2t} \\ 0 & 0 & e^{2t} & te^{2t} \\ 0 & 0 & 0 & e^{2t} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(0) \\ x_2(0) \\ x_3(0) \\ x_4(0) \end{bmatrix}$$

11. Sia dato un sistema lineare SISO completamente raggiungibile caratterizzato dalle matrici $\mathbf{A}$, $\mathbf{b}$ e $\mathbf{c}$. Indicare la struttura delle matrici $\mathbf{A}_c$, $\mathbf{b}_c$ e $\mathbf{c}_c$ della corrispondente forma canonica di controllo. Sia $p(\lambda) = \lambda^n + \alpha_{n-1}\lambda^{n-1} + \ldots + \alpha_1\lambda + \alpha_0$ il polinomio caratteristico della matrice $\mathbf{A}$.

$$\mathbf{A}_C = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0\dots & 0 \\ 0 & 0 & 1\dots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ -\alpha_0 & -\alpha_1 & \dots & -\alpha_{n-1} \end{bmatrix}, \qquad \mathbf{b}_C = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix}, \qquad \mathbf{c}_C = \begin{bmatrix} \beta_0 & \beta_1 & \dots & \beta_{n-1} \end{bmatrix}$$

Indicare inoltre la struttura della matrice $\mathbf{T}$ che unita alla trasformazione $\mathbf{x} = \mathbf{T}\mathbf{x}_c$ porta il sistema originario in forma canonica di controllo.

$$\mathbf{T} = \mathcal{R}^+(\mathcal{R}_c^+)^{-1} = \begin{bmatrix} \mathbf{b} & \mathbf{A}\mathbf{b} & \mathbf{A}^2\mathbf{b} & \dots & \mathbf{A}^{n-1}\mathbf{b} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 & \dots & \alpha_{n-1} & 1 \\ \alpha_2 & \alpha_3 & \dots & \dots & 1 & 0 \\ \alpha_3 & \dots & \dots & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \alpha_{n-1} & 1 & \dots & \dots & 0 & 0 \\ 1 & 0 & \dots & \dots & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

12. Data la funzione di trasferimento $G(s)$ sotto riportata, scrivere la struttura del corrispondente sistema dinamico in forma canonica di osservabilità che ha $G(s)$ come funzione di trasferimento che lega l'ingresso $u(t)$ all'uscita $y(t)$:

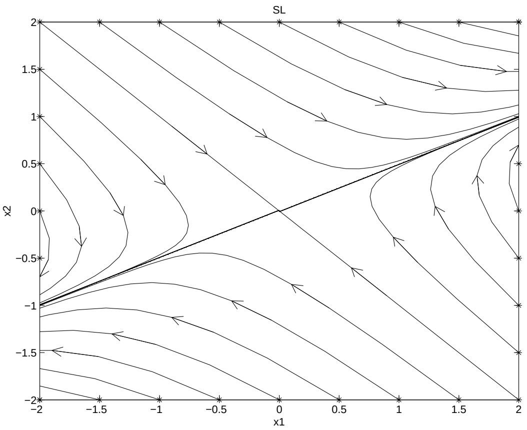
$$G(s) = \frac{3s^3 + 8s^2 + 2s + 1}{s^4 + 2s^3 + 6s^2 + 5s + 7} \qquad \begin{cases} \dot{\mathbf{x}}(t) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & -7 \\ 1 & 0 & 0 & -5 \\ 0 & 1 & 0 & -6 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \end{bmatrix} \mathbf{x}(t) + \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 8 \\ 3 \end{bmatrix} u(t) \\ y(t) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \mathbf{x}(t) \end{cases}$$

13. Siano $\mathcal{X}^+$ e $\mathcal{X}_K^+$ i sottospazi di raggiungibilità associati alle coppie di matrici $(\mathbf{A}, \mathbf{B})$ e $(\mathbf{A} + \mathbf{BK}, \mathbf{B})$. Il legame esistente tra questi sottospazi è il seguente

   ⊗ $\mathcal{X}^+ = \mathcal{X}_K^+$
   ○ $\mathcal{X}^+ \subset \mathcal{X}_K^+$
   ○ $\mathcal{X}_K^+ \subset \mathcal{X}^+$
   ○ nessuna delle precedenti

14. Considerato un sistema dinamico tempo continuo del secondo ordine caratterizzato da due autovalori reali $\lambda_1 = -1$, $\lambda_2 = 3$, rispondere alle seguenti domande e indicare qual è l'andamento qualitativo delle traiettorie nell'intorno dell'origine:

   ⊗ gli autovettori del sistema $\mathbf{v}_1$ e $\mathbf{v}_2$ sono reali e distinti.
   ○ gli autovettori del sistema $\mathbf{v}_1$ e $\mathbf{v}_2$ sono complessi coniugati.
   ○ per $t \to \infty$ tutte le traiettorie tendono ad appiattirsi sull'autovettore $\mathbf{v}_1$.
   ⊗ per $t \to \infty$ tutte le traiettorie tendono ad appiattirsi sull'autovettore $\mathbf{v}_2$.



   Quale nome viene tipicamente utilizzato per indicare il tipo di traiettorie sopra indicato:

   ○ Nodo? ○ Fuoco? ⊗ Sella? ○ Degenere? ○ Stabile? ○ Instabile?

15. La formula di Ackermann per il calcolo del vettore $\mathbf{k}^{\mathrm{T}}$ permette il posizionamento arbitrario degli autovalori del sistema retroazionato e può essere utilizzata

   ○ per qualunque sistema;
   ⊗ solo se il sistema è raggiungibile;
   ⊗ solo per sistemi ad un solo ingresso;

   Si fornisca inoltre la descrizione esplicita della formula di Ackermann e del polinomio desiderato $p(\lambda)$ nel caso in cui si voglia posizionare tutti gli n poli del sistema in $\lambda = -3$:

$$\mathbf{k}^{\mathrm{T}} = -\begin{bmatrix} 0 & \dots & 0 & 1 \end{bmatrix} (\mathcal{R}^+)^{-1} p(\mathbf{A}) \qquad\qquad p(\lambda) = (\lambda + 3)^n$$

16. Enunciare il *Lemma di Heymann*:
   Se $(\mathbf{A}, \mathbf{B})$ *è raggiungibile e se* $\mathbf{b}_i$ *è una colonna non nulla di* $\mathbf{B}$*, allora esiste una matrice* $\mathbf{M}_i \in \mathcal{R}^{m\times n}$ *tale che* $(\mathbf{A} + \mathbf{BM}_i, \mathbf{b}_i)$ *è raggiungibile.*

17. Dato il sistema lineare tempo-continuo $\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{Ax}(t) + \mathbf{Bu}(t)$, riportare la struttura di:
   a) uno stimatore asintotico dello stato *in catena aperta*:

$$\dot{\hat{\mathbf{x}}}(t) = \mathbf{A}\hat{\mathbf{x}}(t) + \mathbf{Bu}(t)$$

   b) uno stimatore asintotico dello stato *in catena chiusa di ordine pieno*:

$$\dot{\hat{\mathbf{x}}}(t) = (\mathbf{A} + \mathbf{LC})\hat{\mathbf{x}}(t) + \mathbf{Bu}(t) - \mathbf{Ly}(t)$$

18. Se un sistema dinamico é completamente osservabile allora:

   ◯ per esso esiste sempre un osservatore asintotico in catena aperta;
   ⊗ per esso esiste sempre un osservatore asintotico in catena chiusa di ordine pieno;
   ⊗ per esso esiste sempre un osservatore asintotico in catena chiusa di ordine ridotto;

19. Uno stimatore asintotico dello stato "in catena chiusa" e di ordine pieno può essere utilizzato

   ⊗ se il sistema è osservabile;
   ⊗ se il sistema è asintoticamente stabile;
   ⊗ se la parte instabile del sistema è osservabile;
   ⊗ se la parte non osservabile del sistema è asintoticamente stabile;

20. Sia $\mathcal{S}_D$ il sistema duale del sistema continuo $\mathcal{S} = (\mathbf{A},\ \mathbf{B},\ \mathbf{C},\ \mathbf{D})$:

   ◯ Se $\mathcal{S}$ è ricostruibile $\Rightarrow \mathcal{S}_D$ è osservabile;
   ⊗ Se $\mathcal{S}$ è osservabile $\Rightarrow \mathcal{S}_D$ è controllabile;
   ⊗ Se $\mathcal{S}$ è controllabile $\Rightarrow \mathcal{S}_D$ è osservabile;
   ⊗ Se $\mathcal{S}$ è raggiungibile $\Rightarrow \mathcal{S}_D$ è ricostruibile;

21. Indicare la struttura del sistema duale $\mathcal{S}_D$ associato ad un sistema dato $\mathcal{S} = (\mathbf{A},\ \mathbf{B},\ \mathbf{C},\ \mathbf{D})$:

$$\mathcal{S}_D = (\mathbf{A}^{\mathrm{T}},\ \mathbf{C}^{\mathrm{T}},\ \mathbf{B}^{\mathrm{T}},\ \mathbf{D}^{\mathrm{T}})$$

22. Un sistema $(\mathbf{A},\ \mathbf{B},\ \mathbf{C})$ è "stabilizzabile" mediante retroazione statica dello stato

   ⊗ se il sistema è stabile;
   ◯ se il sistema è osservabile;
   ⊗ se la parte instabile del sistema è raggiungibile;
   ⊗ se la parte non raggiungibile del sistema è stabile;

23. Mediante retroazione statica dello stato $\mathbf{u} = \mathbf{K}\mathbf{x}$ è possibile posizionare a piacere:

   ◯ tutti gli autovalori del sistema;
   ⊗ tutti gli autovalori della parte raggiungibile del sistema;
   ◯ tutti gli autovalori della parte osservabile del sistema;

24. Scrivere come si determina la matrice $\mathbf{T}$ della trasformazione $\mathbf{x} = \mathbf{T}\overline{\mathbf{x}}$ che potra un sistema non completamente raggiungibile in forma standard di raggiungibilità:

   $\mathbf{T} = \left[\ \mathbf{T}_1 \quad \mathbf{T}_2\ \right]$ dove $\mathrm{Im}\mathbf{T}_1 = \mathrm{Im}\mathcal{R}^+ = \mathcal{X}^+$ e $\mathbf{T}_2$ rende non singolare la matrice $\mathbf{T}$.

   Indicare inoltre la struttura a blocchi delle matrici $\overline{\mathbf{A}}$, $\overline{\mathbf{B}}$ e $\overline{\mathbf{C}}$ che si ottengono.

$$\overline{\mathbf{A}} = \begin{bmatrix} \mathbf{A}_{1,1} & \mathbf{A}_{1,2} \\ 0 & \mathbf{A}_{2,2} \end{bmatrix} \quad \overline{\mathbf{B}} = \begin{bmatrix} \mathbf{B}_1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\overline{\mathbf{C}} = \left[\ \mathbf{C}_1 \quad \mathbf{C}_2\ \right]$$

25. Scrivere la relazione necessaria e sufficiente che garantisce la completa controllabililità in k passi del sistema lineare discreto $\mathbf{x}(k+1) = \mathbf{A}\mathbf{x}(k) + \mathbf{B}\mathbf{u}(k)$:

$$\mathrm{Im}\mathbf{A}^k \subseteq \mathrm{Im}[\mathbf{B}, \mathbf{AB}, \ldots, \mathbf{A}^{k-1}\mathbf{B}] = \mathcal{X}^+(k)$$

26. Sia data la seguente equazione differenziale del terzo ordine $\dddot{x}(t)+a\,\ddot{x}(t)+b\,\dot{x}(t)+c\,x(t) = u(t)$ dove $u(t)$ è la variabile d'ingresso. Scelto $\mathbf{x}(t) = \begin{bmatrix} x_1(t) & x_2(t) & x_3(t) \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} x(t) & \dot{x}(t) & \ddot{x}(t) \end{bmatrix}^T$ come vettore di stato e $y(t) = x(t)$ come variabile d'uscita, scrivere la dinamica del sistema nello spazio degli stati:

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} \dot{x}_1(t) \\ \dot{x}_2(t) \\ \dot{x}_3(t) \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -c & -b & -a \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ x_3(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} u(t) \\ y(t) &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \mathbf{x}(t) \end{aligned}$$

27. Sia dato un sistema non–lineare tempo continuo $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x}(t), \bar{\mathbf{u}})$ sollecitato da un ingresso costante $\mathbf{u}(t) = \bar{\mathbf{u}}$. Scrivere la relazione statica da risolvere per determinare i punti di equilibrio $\mathbf{x}(t) = \mathbf{x}_e$:

$$0 = \mathbf{f}(\mathbf{x}_e, \bar{\mathbf{u}})$$

28. Dire, per ciascuno degli elementi dinamici $\mathcal{D}$ sotto elencati, qual è la variabile energia q, la variabile di potenza v in uscita e l'equazione costitutiva che la caratterizza:

Elemento dinamico $\mathcal{D}$	Variabile energia q	Variabile v in uscita	Equazione differenziale
Massa M	quantità di moto p	velocità $\dot{x}$	$\frac{dp}{dt} = F$
Induttanza L	flusso magnetico ϕ	corrente I	$\frac{d\phi}{dt} = V$
Cap. Idraulica C_I	volume V	pressione P	$\frac{dV}{dt} = Q$

29. Il sistema che si ottiene quando si utilizza un regolatore (cioè la serie di uno stimatore asintotico dello stato e dell'elemento statico di retroazione K) per stabilizzare in retroazione un sistema dinamico assegnato

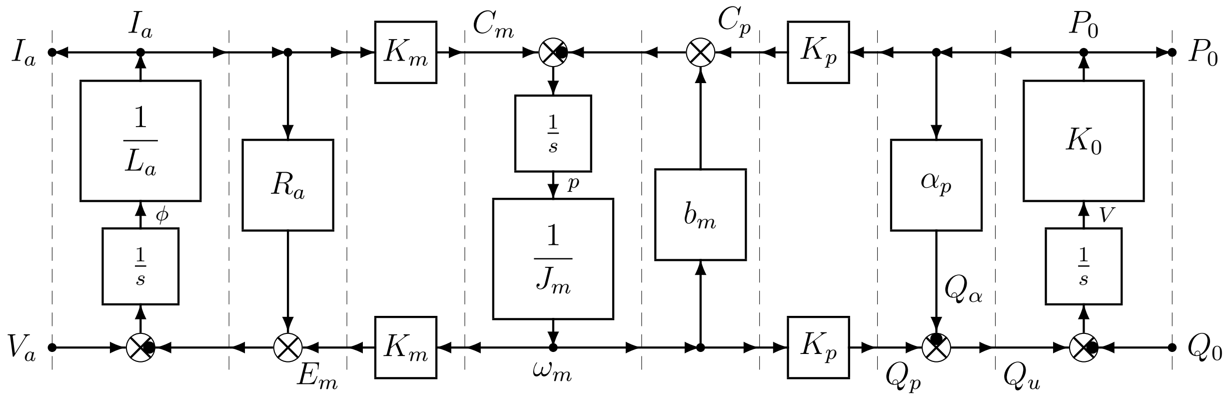
- ○ è un sistema raggiungibile ed osservabile;
- ⊗ è un sistema non raggiungibile;
- ○ è un sistema non osservabile;

30. Enunciare la *Proprietà di separazione* del regolatore:

La sintesi del blocco di retroazione $(\mathbf{A} + \mathbf{BK})$ *e del blocco di stima* $(\mathbf{A} + \mathbf{LC})$ *può essere fatta in modo indipendente:*

$$\det[z\mathbf{I} - \bar{\mathbf{A}}] = \det[z\mathbf{I} - (\mathbf{A} + \mathbf{BK})]\,\det[z\mathbf{I} - (\mathbf{A} + \mathbf{LC})]$$

31. Si consideri il seguente schema P.O.G. di un sistema elettro-meccanico costituito da un motore elettrico in corrente continua (L_a, R_a, J_m, b_m, K_m), da una pompa ad ingranaggi (K_p, α_p) e da un accumulatore idraulico (K_0):



Sia $\mathbf{x} = \begin{bmatrix} I_a & \omega_m & P_0 \end{bmatrix}^{\mathrm{T}}$ il vettore di stato (composto dalle variabili di potenza in uscita degli elementi dinamici) e sia $\mathbf{u} = \begin{bmatrix} V_a & Q_0 \end{bmatrix}^{\mathrm{T}}$ il vettore degli ingressi. Scrivere il corrispondente sistema dinamico nello spazio degli stati:

$$\underbrace{\begin{bmatrix} L_a & 0 & 0 \\ 0 & J_m & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{K_0} \end{bmatrix}}_{\overline{\mathbf{L}}} \underbrace{\begin{bmatrix} \dot{I}_a \\ \dot{\omega}_m \\ \dot{P}_0 \end{bmatrix}}_{\dot{\mathbf{x}}} = \underbrace{\begin{bmatrix} -R_a & -K_m & 0 \\ K_m & -b_m & -K_p \\ 0 & K_p & -\alpha_p \end{bmatrix}}_{\overline{\mathbf{A}}} \underbrace{\begin{bmatrix} I_a \\ \omega_m \\ P_0 \end{bmatrix}}_{\mathbf{x}} + \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}}_{\overline{\mathbf{B}}} \underbrace{\begin{bmatrix} V_a \\ Q_0 \end{bmatrix}}_{\mathbf{u}}$$

32. Siano $\mathcal{S}_1 = (\mathbf{A}_1,\, \mathbf{B}_1,\, \mathbf{C}_1)$ e $\mathcal{S}_2 = (\mathbf{A}_2,\, \mathbf{B}_2,\, \mathbf{C}_2)$ due sistemi algebricamente equivalenti tali che $\mathbf{x}_1 = \mathbf{T}\mathbf{x}_2$. Tra le corrispondenti matrici di raggiungibilità $\mathcal{R}_1^+$ ed $\mathcal{R}_2^+$ esiste il legame:

- ⊗ $\mathcal{R}_1^+ = \mathbf{T}\mathcal{R}_2^+$
- ○ $\mathcal{R}_1^+ = \mathbf{T}^{-1}\mathcal{R}_2^+$
- ○ $\mathcal{R}_1^+ = \mathcal{R}_2^+\mathbf{T}$
- ○ $\mathcal{R}_1^+ = \mathcal{R}_2^+\mathbf{T}^{-1}$

33. Si consideri ora il seguente sistema non lineare tempo continuo $\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{f}(\mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t))$, $\mathbf{y}(t) = \mathbf{g}(\mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t))$ e sia $\mathbf{x}_0$ un punto di equilibrio del sistema per ingresso costante $\mathbf{u}_0$. Indicare come si calcolano le matrici del sistema linearizzato:

$$\mathbf{A} = \left.\frac{\partial \mathbf{f}(\mathbf{x},\, \mathbf{u})}{\partial\, \mathbf{x}}\right|_{(\mathbf{x}_0, \mathbf{u}_0)}, \quad \mathbf{B} = \left.\frac{\partial \mathbf{f}(\mathbf{x},\, \mathbf{u})}{\partial\, \mathbf{u}}\right|_{(\mathbf{x}_0, \mathbf{u}_0)} \quad \mathbf{C} = \left.\frac{\partial \mathbf{g}(\mathbf{x},\, \mathbf{u})}{\partial\, \mathbf{x}}\right|_{(\mathbf{x}_0, \mathbf{u}_0)}, \quad \mathbf{D} = \left.\frac{\partial \mathbf{g}(\mathbf{x},\, \mathbf{u})}{\partial\, \mathbf{u}}\right|_{(\mathbf{x}_0, \mathbf{u}_0)}$$