Teoria dei Sistemi	Nome:
Teoria dei Sistemi e del Controllo	Nr. Mat.
Compito A del 27 Aprile 2010	Firma:
Domande ed esercizi	C.L.: Info. ‖ Elet. ‖ Telec.

1. Scrivere la forma esplicita della *matrice di transizione dello stato* $\mathbf{\Phi}(k,h)$ nel caso di sistemi dinamici lineari discreti tempo-invarianti:

$$\mathbf{\Phi}(k,h) = \mathbf{A}^{k-h}$$

2. Scrivere la soluzione generale dell'equazione differenziale matriciale $\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A}\mathbf{x}(t) + \mathbf{B}\mathbf{u}(t)$ a partire dalla condizione iniziale $\mathbf{x}(t_0)$:

$$\mathbf{x}(t) = e^{\mathbf{A}(t-t_0)}\mathbf{x}(t_0) + \int_{t_0}^{t} e^{\mathbf{A}(t-\tau)}\mathbf{B}\mathbf{u}(\tau)d\tau$$

3. La molteplicità *geometrica* di un autovalore λ della matrice $\mathbf{A}$

   ⊗ è la dimensione dell'autospazio U_λ associato all'autovalore λ;
   ○ è la dimensione del blocco di Jordan $\mathbf{J}_\lambda$ associato all'autovalore λ;
   ○ è il grado di molteplicità di λ nel polinomio caratteristico della matrice $\mathbf{A}$;
   ⊗ è il numero di autovettori linearmente indipendenti associati all'autovalore λ;

4. Applicando al sistema dinamico $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{B}\mathbf{u}$, $\mathbf{y} = \mathbf{C}\mathbf{x}$ la trasformazione di coordinate $\mathbf{x} = \mathbf{T}\overline{\mathbf{x}}$ si ottiene un sistema trasformato $\dot{\overline{\mathbf{x}}} = \overline{\mathbf{A}}\overline{\mathbf{x}} + \overline{\mathbf{B}}\mathbf{u}$, $\mathbf{y} = \overline{\mathbf{C}}\overline{\mathbf{x}}$ caratterizzato dalle seguenti matrici $\overline{\mathbf{A}}$, $\overline{\mathbf{B}}$ e $\overline{\mathbf{C}}$:

$$\overline{\mathbf{A}} = \mathbf{T}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{T}, \qquad \overline{\mathbf{B}} = \mathbf{T}^{-1}\mathbf{B}, \qquad \overline{\mathbf{C}} = \mathbf{C}\mathbf{T}$$

5. Scrivere la matrici di trasferimento $\mathbf{H}(s)$ di un sistema lineare tempo-continuo in funzione delle matrici $\mathbf{A}$, $\mathbf{B}$, $\mathbf{C}$ e $\mathbf{D}$ che caratterizzano il sistema lineare:

$$\mathbf{H}(s) = \mathbf{C}(s\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}\mathbf{B} + \mathbf{D}$$

6. L'elemento $H_{i,j}(s)$ della matrice di trasferimento $\mathbf{H}(s) = \mathbf{C}(s\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}\mathbf{B}$ di un sistema lineare di ordine n è la trasformata di Laplace

   ○ dell'uscita j-esima quando un impulso è applicato all'ingresso i-esimo;
   ⊗ dell'uscita i-esima quando un impulso è applicato all'ingresso j-esimo;
   ○ dell'uscita j-esima quando un gradino è applicato all'ingresso i-esimo;
   ○ dell'uscita i-esima quando un gradino è applicato all'ingresso j-esimo;

7. Scrivere la formula per calcolare la matrice di transizione dello stato $e^{\mathbf{A}t}$ di un sistema lineare tempo-continuo utilizzando le trasformate di Laplace:

$$e^{\mathbf{A}t} = \mathcal{L}^{-1}[(s\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}]$$

8. Nel caso di sistemi tempo-discreti lineari invarianti $\mathbf{x}(k+1) = \mathbf{A}\,\mathbf{x}(k) + \mathbf{B}\,\mathbf{u}(k)$, scrivere la condizione che deve essere soddisfatta affinché sia possibile far passare il sistema dallo stato iniziale $\mathbf{x}(0)$ allo stato finale $\mathbf{x}(k)$ nell'intervallo di tempo $[0,\ k]$:

$$\mathbf{x}(k) - \mathbf{A}^k\mathbf{x}(0) \in \mathcal{X}^+(k)$$

9. Mostrare la struttura del generico blocco di Jordan $\mathbf{J}_i$ e del generico miniblocco di Jordan $\mathbf{J}_{i,j}$ associato all'i-esimo autovalore λ_i di una generica matrice $\mathbf{A}$.

$$\mathbf{J}_i = \begin{bmatrix} \mathbf{J}_{i,1} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \mathbf{J}_{i,2} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \mathbf{J}_{i,\nu_i} \end{bmatrix}, \qquad \mathbf{J}_{i,j} = \begin{bmatrix} \lambda_i & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_i & 1 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_i & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \lambda_i & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & \lambda_i \end{bmatrix}$$

10. Calcolare, in funzione della condizione iniziale $\mathbf{x}(0) = [x_1(0),\ x_2(0),\ x_3(0),\ x_4(0)]^{\mathrm{T}}$, l'evoluzione libera del seguente sistema autonomo tempo-discreto:

$$\mathbf{x}(k{+}1) = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} \mathbf{x}(k) \quad \mathbf{x}(k) = \begin{bmatrix} 2^k & k\,2^{k-1} & \frac{k(k-1)}{2} 2^{k-2} & \frac{k(k-1)(k-2)}{6} 2^{k-3} \\ 0 & 2^k & k\,2^{k-1} & \frac{k(k-1)}{2} 2^{k-2} \\ 0 & 0 & 2^k & k\,2^{k-1} \\ 0 & 0 & 0 & 2^k \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(0) \\ x_2(0) \\ x_3(0) \\ x_4(0) \end{bmatrix}$$

11. Sia dato un sistema lineare SISO completamente osservabile caratterizzato dalle matrici $\mathbf{A}$, $\mathbf{b}$ e $\mathbf{c}$. Indicare la struttura delle matrici $\mathbf{A}_o$, $\mathbf{b}_o$ e $\mathbf{c}_o$ della corrispondente forma canonica di osservabilità. Sia $p(\lambda) = \lambda^n + \alpha_{n-1}\lambda^{n-1} + \ldots + \alpha_1\lambda + \alpha_0$ il polinomio caratteristico della matrice $\mathbf{A}$.

$$\mathbf{A}_o = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & \dots & -\alpha_0 \\ 1 & 0 & 0 & \dots & -\alpha_1 \\ 0 & 1 & 0 & \dots & -\alpha_2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & -\alpha_{n-1} \end{bmatrix}, \qquad \mathbf{b}_o = \begin{bmatrix} \beta_0 \\ \beta_1 \\ \dots \\ \beta_{n-1} \end{bmatrix}, \qquad \mathbf{c}_o = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \dots & 1 \end{bmatrix}$$

Indicare inoltre la struttura della matrice $\mathbf{P}^{\text{-}1}$ che unita alla trasformazione $\mathbf{x} = \mathbf{P}^{\text{-}1}\mathbf{x}_o$ porta il sistema originario in forma canonica di osservabilità:

$$\mathbf{P}^{\text{-}1} = (\mathcal{O}_c^-)^{\text{-}1}\mathcal{O}^- = \begin{bmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 & \dots & \alpha_{n-1} & 1 \\ \alpha_2 & \alpha_3 & \dots & \dots & 1 & 0 \\ \alpha_3 & \dots & \dots & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \alpha_{n-1} & 1 & \dots & \dots & 0 & 0 \\ 1 & 0 & \dots & \dots & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{c} \\ \mathbf{cA} \\ \mathbf{cA}^2 \\ \dots \\ \mathbf{cA}^{n-1} \end{bmatrix}$$

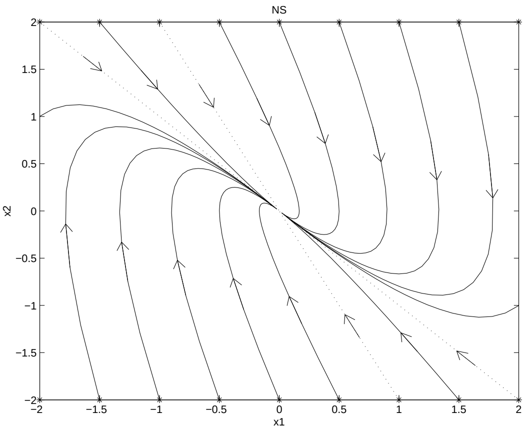
12. Data la funzione di trasferimento $G(s)$ sotto riportata, scrivere la struttura del corrispondente sistema dinamico in forma canonica di raggiungibilità indicando con $u(t)$ l'ingresso e con $y(t)$ l'uscita :

$$G(s) = \frac{2s^3 + 7s^2 + 3s + 1}{s^4 + 3s^3 + 6s^2 + 4s + 8} \qquad \left\{ \begin{array}{rcl} \dot{\mathbf{x}}(t) & = & \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -8 & -4 & -6 & -3 \end{bmatrix} \mathbf{x}(t) + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} u(t) \\ \\ y(t) & = & \begin{bmatrix} 1 & 3 & 7 & 2 \end{bmatrix} \mathbf{x}(t) \end{array} \right.$$

13. Siano $\mathcal{X}^+$ e $\mathcal{X}_K^+$ i sottospazi di raggiungibilità associati alle coppie di matrici $(\mathbf{A}, \mathbf{B})$ e $(\mathbf{A} + \mathbf{BK}, \mathbf{B})$. Il legame esistente tra questi sottospazi è il seguente

   ⊗ $\mathcal{X}^+ = \mathcal{X}_K^+$
   ○ $\mathcal{X}^+ \subset \mathcal{X}_K^+$
   ○ $\mathcal{X}_K^+ \subset \mathcal{X}^+$
   ○ nessuna delle precedenti

14. Considerato un sistema dinamico tempo continuo del secondo ordine caratterizzato da due autovalori reali $\lambda_1 = -1$, $\lambda_2 = -3$, rispondere alle seguenti domande e indicare qual è l'andamento qualitativo delle traiettorie nell'intorno dell'origine:



   ⊗ gli autovettori del sistema $\mathbf{v}_1$ e $\mathbf{v}_2$ sono reali e distinti.
   ○ gli autovettori del sistema $\mathbf{v}_1$ e $\mathbf{v}_2$ sono complessi coniugati.
   ⊗ per $t \to \infty$ tutte le traiettorie tendono ad appiattirsi sull'autovettore $\mathbf{v}_1$.
   ○ per $t \to \infty$ tutte le traiettorie tendono ad appiattirsi sull'autovettore $\mathbf{v}_2$.

   Quale nome viene tipicamente utilizzato per indicare il tipo di traiettorie sopra indicato:

   ⊗ Nodo? ○ Fuoco? ○ Sella? ○ Degenere? ⊗ Stabile? ○ Instabile?

15. La formula di Ackermann per il calcolo del vettore $\mathbf{k}^{\mathrm{T}}$ permette il posizionamento arbitrario degli autovalori del sistema retroazionato e può essere utilizzata

   ○ per qualunque sistema;
   ⊗ solo se il sistema è raggiungibile;
   ⊗ solo per sistemi ad un solo ingresso;

   Si fornisca inoltre la descrizione esplicita della formula di Ackermann e del polinomio desiderato $p(\lambda)$ nel caso in cui si voglia posizionare tutti gli n poli del sistema in $\lambda = -2$:

$$\mathbf{k}^{\mathrm{T}} = -\begin{bmatrix} 0 & \dots & 0 & 1 \end{bmatrix} (\mathcal{R}^+)^{-1} p(\mathbf{A}) \qquad\qquad p(\lambda) = (\lambda + 2)^n$$

16. Enunciare il *Lemma di Heymann*:
   Se $(\mathbf{A}, \mathbf{B})$ *è raggiungibile e se* $\mathbf{b}_i$ *è una colonna non nulla di* $\mathbf{B}$, *allora esiste una matrice* $\mathbf{M}_i \in \mathcal{R}^{m \times n}$ *tale che* $(\mathbf{A} + \mathbf{BM}_i, \mathbf{b}_i)$ *è raggiungibile.*

17. Dato il sistema lineare tempo-discreto $\mathbf{x}(k+1) = \mathbf{Ax}(k) + \mathbf{Bu}(k)$, riportare la struttura di:
   a) uno stimatore asintotico dello stato *in catena aperta*:

$$\hat{\mathbf{x}}(k+1) = \mathbf{A}\hat{\mathbf{x}}(k) + \mathbf{Bu}(k)$$

   b) uno stimatore asintotico dello stato *in catena chiusa di ordine pieno*:

$$\hat{\mathbf{x}}(k+1) = (\mathbf{A} + \mathbf{LC})\hat{\mathbf{x}}(k) + \mathbf{Bu}(k) - \mathbf{Ly}(k)$$

18. Se un sistema dinamico é completamente osservabile allora:

 ◯ per esso esiste sempre un osservatore asintotico in catena aperta;
 ⊗ per esso esiste sempre un osservatore asintotico in catena chiusa di ordine pieno;
 ⊗ per esso esiste sempre un osservatore asintotico in catena chiusa di ordine ridotto;

19. Uno stimatore asintotico dello stato "in catena chiusa" e di ordine pieno può essere utilizzato

 ⊗ se il sistema è osservabile;
 ⊗ se il sistema è asintoticamente stabile;
 ⊗ se la parte instabile del sistema è osservabile;
 ⊗ se la parte non osservabile del sistema è asintoticamente stabile;

20. Sia $\mathcal{S}_D$ il sistema duale del sistema continuo $\mathcal{S} = (\mathbf{A},\ \mathbf{B},\ \mathbf{C},\ \mathbf{D})$:

 ◯ Se $\mathcal{S}$ è ricostruibile $\Rightarrow \mathcal{S}_D$ è osservabile;
 ⊗ Se $\mathcal{S}$ è osservabile $\Rightarrow \mathcal{S}_D$ è controllabile;
 ⊗ Se $\mathcal{S}$ è controllabile $\Rightarrow \mathcal{S}_D$ è osservabile;
 ⊗ Se $\mathcal{S}$ è raggiungibile $\Rightarrow \mathcal{S}_D$ è ricostruibile;

21. Indicare la struttura del sistema duale $\mathcal{S}_D$ associato ad un sistema dato $\mathcal{S} = (\mathbf{A},\ \mathbf{B},\ \mathbf{C},\ \mathbf{D})$:

$$\mathcal{S}_D = (\mathbf{A}^{\mathrm{T}},\ \mathbf{C}^{\mathrm{T}},\ \mathbf{B}^{\mathrm{T}},\ \mathbf{D}^{\mathrm{T}})$$

22. Un sistema $(\mathbf{A},\ \mathbf{B},\ \mathbf{C})$ è sempre "stabilizzabile" mediante retroazione statica della stima dello stato fornita da un osservatore asintotico

 ⊗ se il sistema è stabile;
 ◯ se e solo se il sistema è raggiungibile ed osservabile;
 ⊗ se e solo se la parte non raggiungibile e non osservabile del sistema è stabile;

23. Mediante retroazione statica dello stato $\mathbf{u} = \mathbf{K}\mathbf{x}$ è possibile posizionare a piacere:

 ◯ tutti gli autovalori del sistema;
 ⊗ tutti gli autovalori della parte raggiungibile del sistema;
 ◯ tutti gli autovalori della parte osservabile del sistema;

24. Scrivere come si determina la matrice $\mathbf{P}^{-1}$ della trasformazione $\mathbf{x} = \mathbf{P}^{-1}\overline{\mathbf{x}}$ che potra un sistema non completamente osservabile in forma standard di osservabilità:

$$\mathbf{P}^{-1} = \begin{bmatrix} \mathbf{P}_1 \\ \mathbf{P}_2 \end{bmatrix} \qquad \text{dove} \qquad \mathrm{Im}\mathbf{P}_1^{\mathrm{T}} = \mathrm{Im}(\mathcal{O}^{-})^{\mathrm{T}} \text{ e } \mathbf{P}_2 \text{ rende non singolare la matrice } \mathbf{P}^{-1}.$$

Indicare inoltre la struttura a blocchi delle matrici $\overline{\mathbf{A}}$, $\overline{\mathbf{B}}$ e $\overline{\mathbf{C}}$ che si ottengono:

$$\overline{\mathbf{A}} = \begin{bmatrix} \mathbf{A}_{1,1} & 0 \\ \mathbf{A}_{2,1} & \mathbf{A}_{2,2} \end{bmatrix} \qquad \overline{\mathbf{B}} = \begin{bmatrix} \mathbf{B}_1 \\ \mathbf{B}_2 \end{bmatrix}$$

$$\overline{\mathbf{C}} = \begin{bmatrix} \mathbf{C}_1 & 0 \end{bmatrix}$$

25. Relativamente al sistema lineare discreto $\mathbf{x}(k+1) = \mathbf{A}\mathbf{x}(k) + \mathbf{B}\mathbf{u}(k)$, $\mathbf{y}(k) = \mathbf{C}\mathbf{x}(k)$, scrivere in termini delle matrici $\mathbf{A}$, $\mathbf{B}$ e $\mathbf{C}$ una condizione necessaria e sufficiente per la completa ricostruibilità del sistema:

$$\mathcal{E}^- = \ker \begin{bmatrix} \mathbf{C} \\ \mathbf{CA} \\ \vdots \\ \mathbf{CA}^{n-1} \end{bmatrix} \subseteq \ker \mathbf{A}^n$$

26. Sia data la seguente equazione differenziale del terzo ordine $\dddot{x}(t) + a\,\ddot{x}(t) + b\,\dot{x}(t) + c\,x(t) = u(t)$ dove $u(t)$ è la variabile d'ingresso. Scelto $\mathbf{x}(t) = \begin{bmatrix} x_1(t) & x_2(t) & x_3(t) \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} x(t) & \dot{x}(t) & \ddot{x}(t) \end{bmatrix}^T$ come vettore di stato e $y(t) = x(t)$ come variabile d'uscita, scrivere la dinamica del sistema nello spazio degli stati:

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} \dot{x}_1(t) \\ \dot{x}_2(t) \\ \dot{x}_3(t) \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -c & -b & -a \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ x_3(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} u(t) \\ y(t) &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \mathbf{x}(t) \end{aligned}$$

27. Sia dato un sistema non–lineare tempo discreto $\mathbf{x}(k+1) = \mathbf{f}(\mathbf{x}(k), \bar{\mathbf{u}})$ sollecitato da un ingresso costante $\mathbf{u}(k) = \bar{\mathbf{u}}$. Scrivere la relazione statica da risolvere per determinare i punti di equilibrio $\mathbf{x}(k) = \mathbf{x}_e$:

$$\mathbf{x}_e = \mathbf{f}(\mathbf{x}_e, \bar{\mathbf{u}})$$

28. Dire, per ciascuno degli elementi dinamici $\mathcal{D}$ sotto elencati, qual è la variabile energia q, la variabile di potenza v in uscita e l'equazione costitutiva che la caratterizza:

Elemento dinamico $\mathcal{D}$	Variabile energia q	Variabile v in uscita	Equazione differenziale
Elasticità E	spostamento x	forza F	$\dfrac{d\,x}{dt} = \dot{x}$
Capacità C	carica Q	tensione V	$\dfrac{d\,Q}{dt} = I$
Ind. Idraulica L_I	flusso idrau. ϕ_I	portata vol. Q	$\dfrac{d\,\phi_I}{dt} = P$

29. Il sistema che si ottiene quando si utilizza un regolatore (cioè la serie di uno stimatore asintotico dello stato e dell'elemento statico di retroazione K) per stabilizzare in retroazione un sistema dinamico assegnato

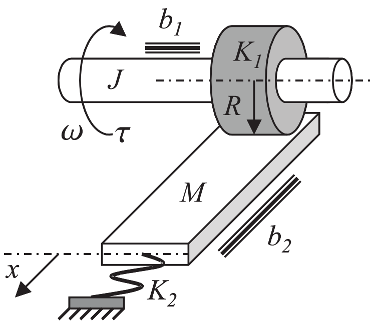
   ○ è un sistema raggiungibile ed osservabile;
   ⊗ è un sistema non raggiungibile;
   ○ è un sistema non osservabile;

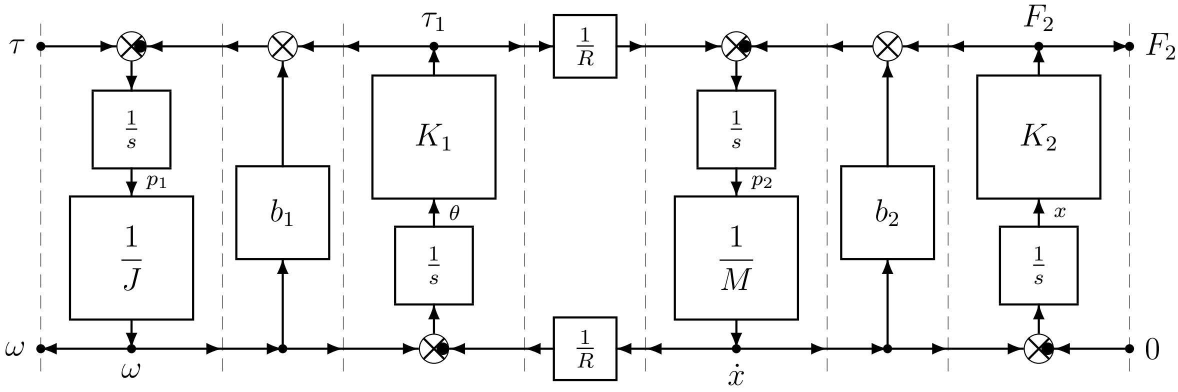
30. Enunciare la *Proprietà di separazione* del regolatore:

   La sintesi del blocco di retroazione $(\mathbf{A} + \mathbf{BK})$ *e del blocco di stima* $(\mathbf{A} + \mathbf{LC})$ *può essere fatta in modo indipendente:*

$$\det[z\mathbf{I} - \bar{\mathbf{A}}] = \det[z\mathbf{I} - (\mathbf{A} + \mathbf{BK})]\,\det[z\mathbf{I} - (\mathbf{A} + \mathbf{LC})]$$

31. Si consideri il sistema meccanico mostrato in figura, costituito da un albero di inerzia J, che ruota a velocità ω, a cui è applicata la coppia esterna τ. Tramite un rullo elastico avente rigidità torsionale K_1 e raggio costante R, l'albero spinge una massa M che comprime una molla lineare con coefficiente di rigidità K_2. Il modello P.O.G. del sistema meccanico assegnato è il seguente:





Sia $\mathbf{x} = \begin{bmatrix} \omega & \tau_1 & \dot{x} & F_2 \end{bmatrix}^{\mathrm{T}}$ il vettore di stato (composto dalle variabili di potenza in uscita degli elementi dinamici) e sia $\mathbf{u} = \tau$ la variabile d'ingresso. Scrivere il corrispondente sistema dinamico nello spazio degli stati:

$$\underbrace{\begin{bmatrix} J & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{K_1} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & M & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{K_2} \end{bmatrix}}_{\mathbf{L}} \underbrace{\begin{bmatrix} \dot{\omega} \\ \dot{\tau}_1 \\ \ddot{x} \\ \dot{F}_2 \end{bmatrix}}_{\dot{\mathbf{x}}} = \underbrace{\begin{bmatrix} -b_1 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -\frac{1}{R} & 0 \\ 0 & \frac{1}{R} & -b_2 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}}_{\mathbf{A}} \underbrace{\begin{bmatrix} \omega \\ \tau_1 \\ \dot{x} \\ F_2 \end{bmatrix}}_{\mathbf{x}} + \underbrace{\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}}_{\mathbf{B}} \underbrace{\tau}_{\mathbf{u}}$$

32. Siano $\mathcal{S}_1 = (\mathbf{A}_1, \mathbf{B}_1, \mathbf{C}_1)$ e $\mathcal{S}_2 = (\mathbf{A}_2, \mathbf{B}_2, \mathbf{C}_2)$ due sistemi algebricamente equivalenti tali che $\mathbf{x}_1 = \mathbf{T}\mathbf{x}_2$. Tra le corrispondenti matrici di raggiungibilità $\mathcal{R}_1^+$ ed $\mathcal{R}_2^+$ esiste il legame:

⊗ $\mathcal{R}_1^+ = \mathbf{T}\mathcal{R}_2^+$
○ $\mathcal{R}_1^+ = \mathbf{T}^{-1}\mathcal{R}_2^+$
○ $\mathcal{R}_1^+ = \mathcal{R}_2^+\mathbf{T}$
○ $\mathcal{R}_1^+ = \mathcal{R}_2^+\mathbf{T}^{-1}$

33. Si consideri ora il seguente sistema non lineare tempo continuo $\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{f}(\mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t))$, $\mathbf{y}(t) = \mathbf{g}(\mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t))$ e sia $\mathbf{x}_0$ un punto di equilibrio del sistema per ingresso costante $\mathbf{u}_0$. Indicare come si calcolano le matrici del sistema linearizzato:

$$\mathbf{A} = \left.\frac{\partial \mathbf{f}(\mathbf{x},\, \mathbf{u})}{\partial\, \mathbf{x}}\right|_{(\mathbf{x}_0, \mathbf{u}_0)}, \quad \mathbf{B} = \left.\frac{\partial \mathbf{f}(\mathbf{x},\, \mathbf{u})}{\partial\, \mathbf{u}}\right|_{(\mathbf{x}_0, \mathbf{u}_0)} \quad \mathbf{C} = \left.\frac{\partial \mathbf{g}(\mathbf{x},\, \mathbf{u})}{\partial\, \mathbf{x}}\right|_{(\mathbf{x}_0, \mathbf{u}_0)}, \quad \mathbf{D} = \left.\frac{\partial \mathbf{g}(\mathbf{x},\, \mathbf{u})}{\partial\, \mathbf{u}}\right|_{(\mathbf{x}_0, \mathbf{u}_0)}$$