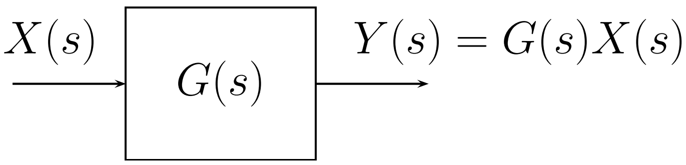
Spazio degli stati

• I sistemi dinamici lineari vengono tipicamente descritti utilizzando la trasformata di Laplace e il concetto di funzione di trasferimento.

$$G(s) = \frac{Y(s)}{X(s)} = \frac{b_m s^m + b_{m-1} s^{m-1} + \ldots + b_1 s + b_0}{s^n + a_{n-1} s^{n-1} + a_{n-2} s^{n-2} + \ldots + a_1 s + a_0}$$

• Rappresentazione grafica del sistema dinamico SISO (Single Input Single Output):



• La funzione di trasferimento $G(s)$ è in corrispondenza biunivoca con la seguente equazione differenziale che lega tra di loro la funzione di ingresso $x(t)$ e la funzione di uscita $y(t)$:

$$y^{(n)}(t) + \ldots + a_1 \dot{y}(t) + a_0 y(t) = b_m x^{(m)}(t) + \ldots + b_1 \dot{x}(t) + b_0 x(t)$$

Con $y^{(n)}(t)$ si è indicata la derivata n-esima della funzione temporale $y(t)$.

• Le funzioni di trasferimento $G(s)$ si utilizzano solamente per i **sistemi lineari, a costanti concentrate e tempo invarianti**.

• La biunivocità è legata al fatto che in qualunque momento deve essere possibile passare dall'equazione differenziale alle funzione di trasferimento e viceversa. (Si fa l'ipotesi che le condizioni iniziali siano tutte identicamente nulle.)

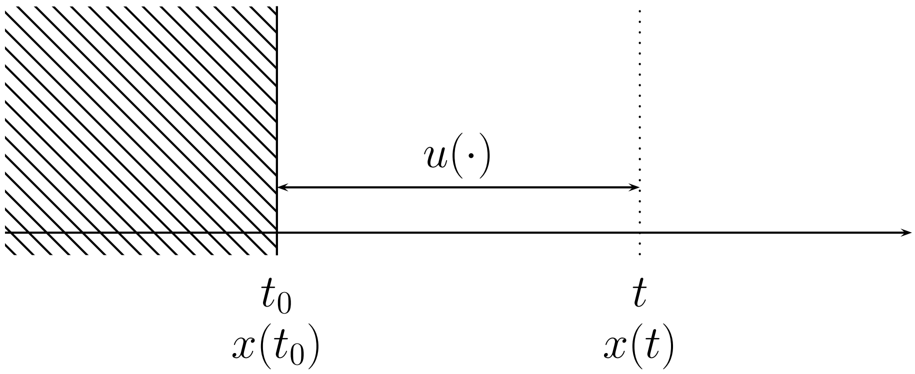
• Dal punto di vista della **causalità**, il sistema è correttamente orientato se il grado massimo di derivazione presente nell 'equazione differenziale (in questo caso n) è associato alla variabile di uscita $y(t)$.

• La condizione di fisica realizzabilità è: "$n \geq m$".

• Le funzioni di trasferimento $G(s)$ non sono l'unico modo di rappresentare dinamicamente i sistemi fisici. Un modo (anche più generale) di rappresentare i sistemi dinamici (anche non lineari) è quello di utilizzare una descrizione nello **spazio degli stati**.

• In questo caso, per descrivere il sistema dinamico si utilizza un numero di variabili (tipicamente variabili interne) pari alla dimensione dinamica del sistema. L'insieme di queste variabili definisce lo <u>stato</u> del sistema.

• **Significato fisico delle variabili di stato**: i valori assunti dalle variabili di stato in un generico istante di tempo contengono, nel loro complesso, tutta l'informazione sulla storia passata del sistema necessaria per valutare l'andamento futuro sia delle stesse variabili di stato che di quelle di uscita, una volta noto l'andamento degli ingressi per tempi successivi all'istante considerato.



• Per determinare lo stato $x(t)$ all'istante t è necessario conoscere lo stato $x(t_0)$ all'istante t_0 e la funzione di ingresso $u(\cdot)$ nell'intervallo di tempo $[t_0,\ t]$.

$$x(t) = \psi(t,\, t_0,\, x_0,\, u(\cdot))$$

• Il concetto di stato ci permette di non prendere in considerazione la storia passata del sistema prima dell'istante t_0.

• Le variabili di stato non sono definite in modo univoco: tipicamente esistono infiniti modi diversi di definire lo "stato" di un sistema;

• Un sistema lineare tempo invariante viene descritto nello spazio degli stati nel modo seguente:

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{x}}(t) &= \mathbf{A}\mathbf{x}(t) + \mathbf{B}\mathbf{u}(t) \\ \mathbf{y}(t) &= \mathbf{C}\mathbf{x}(t) + \mathbf{D}\mathbf{u}(t) \end{cases}$$

dove con $\mathbf{x}(t) = \begin{bmatrix} x_1 & x_2 & \dots & x_n \end{bmatrix}^T \in \mathcal{R}^n$ si è indicato il vettore di stato, con $\mathbf{u}(t) \in \mathcal{R}^m$ il vettore degli ingressi, con $\mathbf{y}(t) \in \mathcal{R}^p$ il vettore delle uscite e con $\mathbf{A} \in \mathcal{R}^{n\times n}$, $\mathbf{B} \in \mathcal{R}^{n\times m}$, $\mathbf{C} \in \mathcal{R}^{p\times n}$, $\mathbf{D} \in \mathcal{R}^{p\times m}$ matrici di dimensioni opportune.

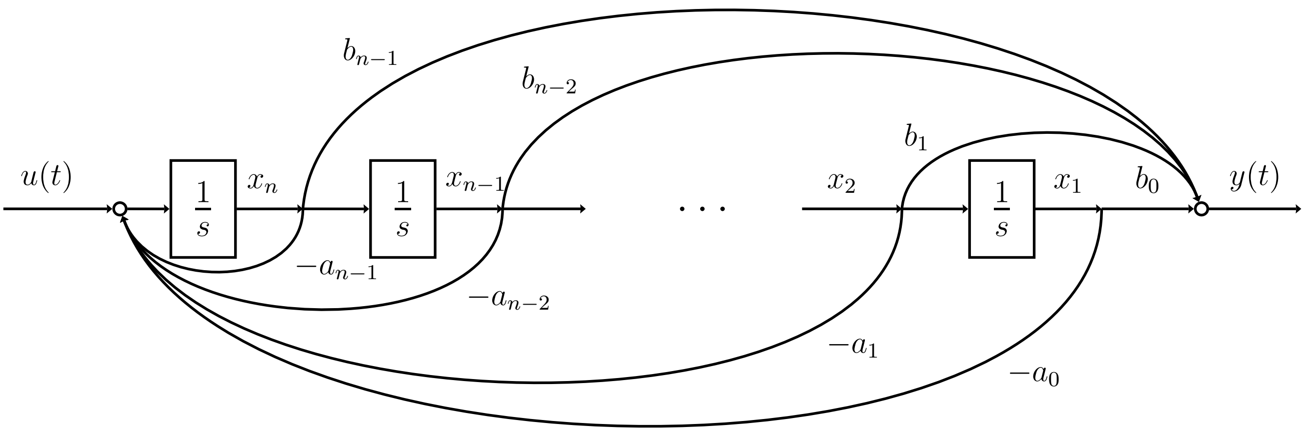
• Per esempio, un sistema SISO descritto mediante la seguente funzione di trasferimento $G(s)$:

$$G(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{b_{n-1}s^{n-1} + \ldots + b_1 s + b_0}{s^n + a_{n-1}s^{n-1} + \ldots + a_1 s + a_0}$$

può essere descritto nello spazio degli stati utilizzando la seguente rappresentazione completamente "raggiungibile":

$$\left\{ \begin{array}{rcl} \dot{\mathbf{x}}(t) & = & \left[\begin{array}{ccccc} 0 & 1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \ldots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \\ -a_0 & -a_1 & -a_2 & \ldots & -a_{n-1} \end{array} \right] \mathbf{x}(t) + \left[\begin{array}{c} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{array} \right] u(t) \\ y(t) & = & \left[\begin{array}{ccccc} b_0 & b_1 & b_2 & \ldots & b_{n-1} \end{array} \right] \mathbf{x}(t) \end{array} \right.$$

Nota: quando $m + 1 < n$, si ha che $b_i = 0$ per $i \in [m + 1, \ldots, n - 1]$.
• Una rappresentazione grafica del sistema è la seguente:



• Si noti che in questo caso le variabili di stato coincidono con le derivare n-esime della variabile x_1.

• Il vantaggio di utilizzare una descrizione nello spazio degli stati è quello di poter operare delle **trasformazioni di coordinate** (cioè dei cambiamenti di variabili) che possono portare ad una semplificazione nella descrizione dinamica del sistema.

• Se al seguente sistema dinamico:

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A}\,\mathbf{x}(t) + \mathbf{B}\,\mathbf{u}(t) \\ \mathbf{y}(t) = \mathbf{C}\,\mathbf{x}(t) + \mathbf{D}\,\mathbf{u}(t) \end{cases}$$

si applica la trasformazione di coordinate $\boxed{\mathbf{x} = \mathbf{T}\,\overline{\mathbf{x}}}$ si ottiene una diversa (ma equivalente) rappresentazione dinamica dello stesso sistema fisico:

$$\begin{cases} \dot{\overline{\mathbf{x}}}(t) = \overline{\mathbf{A}}\,\overline{\mathbf{x}}(t) + \overline{\mathbf{B}}\,\mathbf{u}(t) \\ \mathbf{y}(t) = \overline{\mathbf{C}}\,\overline{\mathbf{x}}(t) + \mathbf{D}\mathbf{u}(t) \end{cases}$$

• Valgono inoltre le seguenti relazioni:

$$\overline{\mathbf{A}} = \mathbf{T}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{T}, \qquad \overline{\mathbf{B}} = \mathbf{T}^{-1}\mathbf{B}, \qquad \overline{\mathbf{C}} = \mathbf{C}\mathbf{T}$$

• L'unica condizione è che la matrice quadrata $\mathbf{T}$ sia non singolare.

• Tutte le infinite rappresentazioni che si ottengono al variare della matrice $\mathbf{T}$ sono **equivalenti** tra di loro, nel senso che tutte descrivono allo stesso modo la dinamica del sistema fisico in oggetto.

• Valgono le seguenti prorietà:

1) Gli autovalori della matrice $\mathbf{A}$ (e di qualunque matrice trasformata $\overline{\mathbf{A}} = \mathbf{T}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{T}$) coincidono con i poli della funzione di trasferimento $\mathbf{G}(s)$.

2) La "matrice" di trasferimento $\mathbf{G}(s)$ è legata al modello del sistema nello spazio degli stati dalla seguente relazione:

$$\mathbf{G}(s) = \mathbf{C}(s\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}\mathbf{B} + \mathbf{D}$$

3) Se $\mathbf{D} = 0$, il sistema è strettamente proprio, cioè $n > m$.

4) L'evoluzione temporale del vettore di stato $\mathbf{x}(t)$ che si ottiene a partire dalla condizione iniziale $\mathbf{x}(0)$ e in presenza dell'ingresso $\mathbf{u}(t)$ è la seguente:

$$\mathbf{x}(t) = e^{\mathbf{A}t}\mathbf{x}(0) + \int_0^t e^{\mathbf{A}(t-\tau)}\mathbf{B}\mathbf{u}(\tau)d\tau$$

La corrispondente evoluzione temporale del vettore di uscita $y(t)$ si ottiene utilizzando la relazione:

$$\mathbf{y}(t) = \mathbf{C}\,\mathbf{x}(t) + \mathbf{D}\,\mathbf{u}(t)$$

Queste relazioni sono valide solamente per sistemi continui, lineari e tempo invarianti.

5) Il sistema è completamente "raggiungibile" (cioè agendo opportunamente sugli ingressi è possibile assegnare un qualunque valore alle variabili di stato del sistema) se la seguente matrice di raggiungibilità è a rango pieno:

$$\mathcal{R}^+ = \left[\, \mathbf{B} \;\; \mathbf{AB} \;\; \mathbf{A}^2\mathbf{B} \;\; \ldots \;\; \mathbf{A}^{n-1}\mathbf{B} \,\right]$$

6) Se il sistema è raggiungibile, mediante una retroazione statica dello stato

$$\mathbf{u}(t) = \mathbf{K}\mathbf{x}(t) + \mathbf{v}(t)$$

($\mathbf{v}(t)$ è un nuovo ingresso ausiliario) è possibile posizionare a piacere gli autovalori (cioè i poli) del sistema retroazionato:

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A}\mathbf{x}(t) + \mathbf{B}\mathbf{u}(t) \\ \mathbf{y}(t) = \mathbf{C}\mathbf{x}(t) + \mathbf{D}\mathbf{u}(t) \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} \dot{\mathbf{x}}(t) = (\mathbf{A} + \mathbf{B}\mathbf{K})\mathbf{x}(t) + \mathbf{B}\mathbf{v}(t) \\ \mathbf{y}(t) = (\mathbf{C} + \mathbf{D}\mathbf{K})\mathbf{x}(t) + \mathbf{D}\mathbf{v}(t) \end{cases}$$

Il segnale di controllo $\mathbf{u}(t) = \mathbf{K}\mathbf{x}(t) + \mathbf{v}(t)$ spesso non è "direttamente" utilizzabile perchè il vettore di stato $\mathbf{x}(t)$ non è completamente noto.

7) Dato un sistema lineare, invariante ad un solo ingresso ($m = 1$):

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{B}\,u$$

e dato un polinomio monico $p(\lambda)$ scelto a piacere:

$$p(\lambda) = \lambda^n + d_{n-1}\lambda^{n-1} + \ldots + d_1\lambda + d_0,$$

se la coppia $(\mathbf{A}, \mathbf{B})$ è raggiungibile, allora la matrice dei guadagni $\mathbf{K}$ tale che impone l'uguaglianza tra il polinomio caratteristico $\Delta_{\mathbf{A}+\mathbf{B}\mathbf{K}}(\lambda)$ del sistema retroazionato e il polinomio $p(\lambda)$ si calcola anche utilizzando la seguente *formula di Ackerman*

$$\boxed{\mathbf{K} = -\mathbf{q}^{\mathsf{T}} p(\mathbf{A})}$$

dove $\mathbf{q}^{\mathsf{T}}$ è l'ultima riga dell'inversa della matrice di raggiungibilità:

$$\mathbf{q}^{\mathsf{T}} = \left[\, 0 \;\; \ldots \;\; 0 \;\; 1 \,\right] (\mathcal{R}^+)^{-1}$$

Con $p(\mathbf{A})$ si indica la matrice che si ottiene dal polinomio $p(\lambda)$ sostituendo la matrice $\mathbf{A}$ al posto del parametro λ.

Esempio. Dato il sistema $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{b}\,u(t)$:

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \mathbf{x}(t) + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} u(t)$$

calcolare la matrice dei guadagni della retroazione statica dello stato $u(t) = \mathbf{k}^{\mathsf{T}}\mathbf{x}$ che posizioni in -1, -2 e -2 gli autovalori del sistema retroazionato.

Il sistema è completamente raggiungibile:

$$\mathcal{R}^{+} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \qquad \mathbf{q}^{\mathsf{T}} = -\frac{1}{2}\begin{bmatrix} -1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

Il polinomio desiderato è il seguente:

$$p(s) = (s+2)^2(s+1) = s^3 + 5s^2 + 8s + 4$$

Essendo:

$$\mathbf{A}^2 = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad \mathbf{A}^3 = \begin{bmatrix} 1 & 4 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

si ha che:

$$\begin{aligned} p(\mathbf{A}) &= (\mathbf{A}+2\mathbf{I})^2(\mathbf{A}+\mathbf{I}) = \mathbf{A}^3 + 5\mathbf{A}^2 + 8\mathbf{A} + 4\mathbf{I} \\ &= \begin{bmatrix} 3 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}^2 \begin{bmatrix} 2 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 18 & 30 & 12 \\ 0 & 9 & 9 \\ 0 & 9 & 9 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 1 & 4 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} + 5\begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} + 8\begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} + 4\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Si ottiene quindi la seguente matrice dei guadagni:

$$\mathbf{k}^{\mathsf{T}} = -\mathbf{q}^{\mathsf{T}} p(\mathbf{A}) = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} -1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 18 & 30 & 12 \\ 0 & 9 & 9 \\ 0 & 9 & 9 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -9 & -6 & 3 \end{bmatrix}$$

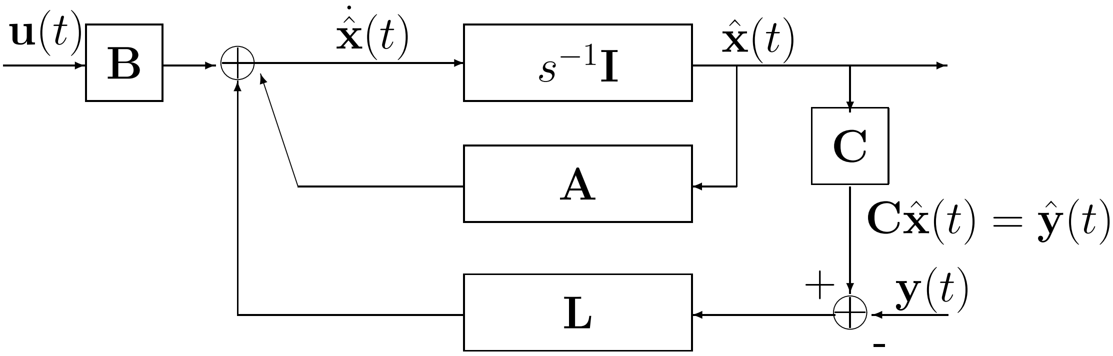
8) Il sistema è completamente “osservabile” (cioè è possibile stimare “esattamente” il vettore di stato $\mathbf{x}(t)$ dalla conoscenza delle funzioni di ingresso $\mathbf{u}(t)$ e di uscita $\mathbf{y}(t)$ del sistema) se la seguente matrice di osservabilità è a rango pieno:

$$\mathcal{O}^{-} = \begin{bmatrix} \mathbf{C} \\ \mathbf{CA} \\ \mathbf{CA}^2 \\ \vdots \\ \mathbf{CA}^{n-1} \end{bmatrix}$$

9) Se un sistema è completamente osservabile, per esso è possibile costruire un osservatore asintotico dello stato (in catena chiusa):

$$\dot{\hat{\mathbf{x}}}(t) = (\mathbf{A} + \mathbf{LC})\hat{\mathbf{x}}(t) - \mathbf{L}\mathbf{y}(t) + \mathbf{B}u(t)$$

Rappresentazione grafica:



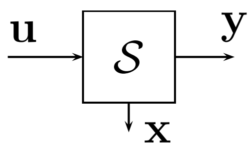
10) Se la coppia di matrici $(\mathbf{A},\ \mathbf{C})$ è osservabile, il vettore dei guadagni $\mathbf{L}$ di un osservatore asintotico dello stato che posiziona ad arbitrio gli autovalori della matrice $\mathbf{A}+\mathbf{LC}$ si calcola utilizzando la seguente formula di Ackerman:

$$\mathbf{L} = -p(\mathbf{A})\,\underbrace{(\mathcal{O}^{-})^{-1}\begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}}_{\mathbf{q}} = -p(\mathbf{A})\mathbf{q}$$

dove $\mathbf{q}$ è l’ultima colonna dell’inversa della matrice di osservabilità e dove $p(\mathbf{A})$ è la matrice che si ottiene dal polinomio arbitrario $p(\lambda)$ sostituendo in esso la matrice $\mathbf{A}$ al posto del parametro λ.

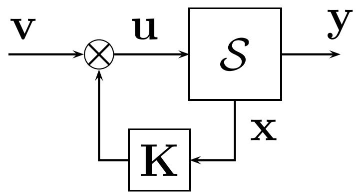
11) **Sintesi del regolatore.** Sia dato un sistema dinamico $\mathcal{S}$:

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A}\mathbf{x}(t) + \mathbf{B}\mathbf{u}(t) \\ \mathbf{y}(t) = \mathbf{C}\mathbf{x}(t) + \mathbf{D}\mathbf{u}(t) \end{cases}$$

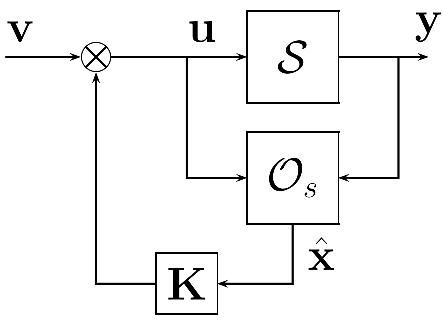


Se $(\mathbf{A},\ \mathbf{B})$ è raggiungibile, utilizzando una retroazione statica dello stato è possibile posizionare a piacere gli autovalori del sistema retroazionato $\mathcal{S}_K$:

$$\mathbf{u}(t) = \mathbf{K}\mathbf{x}(t) + \mathbf{v}(t)$$

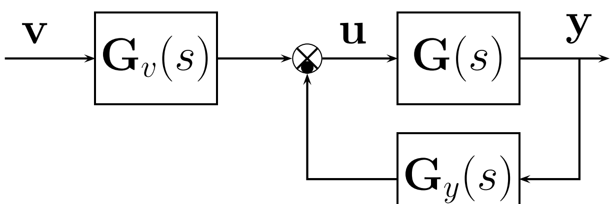


Se lo stato $\mathbf{x}$ non è accessibile, allora occorre introdurre nell'anello di controllo un osservatore dello stato. Lo schema di controllo che tipicamente si utilizza è il seguente:



$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{x}}(t) &= \mathbf{A}\mathbf{x}(t) + \mathbf{B}\mathbf{u}(t) \\ \mathbf{y}(t) &= \mathbf{C}\mathbf{x}(t) \\ \dot{\hat{\mathbf{x}}}(t) &= (\mathbf{A} + \mathbf{L}\mathbf{C} + \mathbf{B}\mathbf{K})\hat{\mathbf{x}}(t) - \mathbf{L}\mathbf{y}(t) + \mathbf{B}\mathbf{v}(t) \\ \mathbf{u}(t) &= \mathbf{K}\hat{\mathbf{x}}(t) + \mathbf{v}(t) \end{aligned}$$

Il sistema retroazionato può essere rappresentato anche nel modo seguente:



$$\begin{aligned} \mathbf{G}(s) &= \mathbf{C}(s\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}\mathbf{B} \\ \mathbf{G}_y(s) &= \mathbf{K}(s\mathbf{I} - \mathbf{A} - \mathbf{L}\mathbf{C} - \mathbf{K}\mathbf{B})^{-1}\mathbf{L} \\ \mathbf{G}_v(s) &= 1 + \mathbf{K}(s\mathbf{I} - \mathbf{A} - \mathbf{L}\mathbf{C} - \mathbf{K}\mathbf{B})^{-1}\mathbf{B} \end{aligned}$$

Nel caso di sistemi SISO, le funzioni di trasferimento $\mathbf{G}(s)$, $\mathbf{G}_y(s)$ e $\mathbf{G}_v(s)$ sono semplici funzioni razionali fratte:

$$\begin{aligned} \mathbf{G}(s) &= \frac{N(s)}{D(s)} = \frac{\mathbf{C}\,\mathrm{agg}(s\mathbf{I} - \mathbf{A})\mathbf{B}}{\det(s\mathbf{I} - \mathbf{A})} \\ \mathbf{G}_y(s) &= \frac{N_y(s)}{D_y(s)} = \frac{\mathbf{K}\,\mathrm{agg}(s\mathbf{I} - \mathbf{A} - \mathbf{L}\mathbf{C} - \mathbf{K}\mathbf{B})\mathbf{L}}{\det(s\mathbf{I} - \mathbf{A} - \mathbf{L}\mathbf{C} - \mathbf{K}\mathbf{B})} \\ \mathbf{G}_v(s) &= \frac{N_v(s)}{D_v(s)} = 1 + \frac{\mathbf{K}\,\mathrm{agg}(s\mathbf{I} - \mathbf{A} - \mathbf{L}\mathbf{C} - \mathbf{K}\mathbf{B})\mathbf{B}}{\det(s\mathbf{I} - \mathbf{A} - \mathbf{L}\mathbf{C} - \mathbf{K}\mathbf{B})} \end{aligned}$$