

*Università degli Studi di Modena e Reggio Emilia*

---

*Facoltà di Ingegneria di Modena  
Corso di Laurea in Ingegneria Informatica*

Sviluppo in ambiente Matlab e Simulink  
di modelli dinamici ridotti per un  
sistema CVT su macchine  
agricole.

Relatore:  
Prof. Roberto Zanasi

Tesi di Laurea di:  
Walter Galati

Correlatori:  
Dott.ssa Ing. Federica Grossi

---

*Anno Accademico 2006-2007*



# Indice

<b>1</b>	<b>Introduzione</b>	<b>1</b>
1.1	Introduzione . . . . .	1
<b>2</b>	<b>Sistema CVT</b>	<b>5</b>
2.1	Descrizione del sistema fisico . . . . .	5
2.2	Modelli dinamici POG . . . . .	7
<b>3</b>	<b>Band Stop Filter</b>	<b>31</b>
3.1	Band Stop Filter . . . . .	31
<b>4</b>	<b>Rotismo Epicicloidale - Formula di Willis</b>	<b>41</b>
4.1	Rotismo Epicicloidale - Formula di Willis . . . . .	41
<b>5</b>	<b>Analisi del Sistema</b>	<b>45</b>
5.1	Analisi del Sistema . . . . .	45
5.2	Riduzione del sistema . . . . .	49
5.3	Simulazioni Sistema Completo e Sistema Ridotto . . . . .	53
<b>6</b>	<b>Conclusione</b>	<b>75</b>
6.1	Conclusione . . . . .	75
<b>A</b>	<b>Codice Matlab</b>	<b>77</b>



# Capitolo 1

## Introduzione

### 1.1 Introduzione

La trasmissione idraulica oggetto di questa tesi è stata modellata con una tecnica definita come POG (Power Oriented Graphs). Questo metodo descrittivo permette di definire le equazioni dinamiche in ambito meccanico (es.: massa molla smorzatore), energetico-elettromagnetico (condensatori, induttori, resistenze) ed idraulico, nel quale l'elemento trasmissivo è il fluido incomprimibile. Nonostante gli ambiti distinti, viste le numerose analogie, il modo di modellare resta molto simile. Alla base di questi modelli sono presenti tre elementi fisici, di cui due elementi dinamici  $D_1$  e  $D_2$  che accumulano energia ed un elemento dissipativo statico  $R$  che dissipa energia. I primi due possono essere descritti da un'equazione non lineare a coefficienti costanti, oppure da un'equazione non lineare. In ambito meccanico-traslazionale, ad esempio, gli elementi dinamici sono la massa e la molla. La prima accumula energia quando subisce uno schiacciamento, mentre la seconda accumula energia se prende velocità. L'elemento statico è generalmente dissipativo e la relativa potenza degrada in ambito energetico di natura termica. In un sistema dinamico si hanno sposta-

menti di energia anche da un ambito fisico ad un altro. Questo comporta un passaggio forzato attraverso la potenza e l'ausilio di due variabili interne al sistema che interagiscono entrambi con ciascun elemento dinamico. Le variabili risultano essere la velocità e la forza. Infatti è facile osservare che se si moltiplica una forza per una velocità si ottiene una potenza. Facendo riferimento alla Fig. 1.1, dov'è rappresentata la generica struttura dell'elemento dinamico, è possibile notare che in ingresso viene fornita la variabile potenza  $v_2(t)$  successivamente integrata (nel dominio delle trasformate di Laplace dividere per  $s$  equivale ad integrare). In questo modo si ottiene il valore della variabile energia interna  $q_1(t)$ .

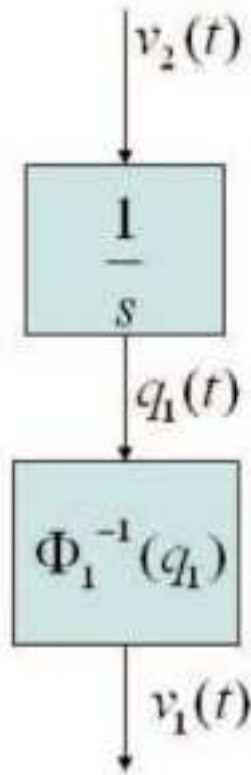


Figura 1.1: Rappresentazione generalizzata di un elemento dinamico.

Da questo integratore nasce l'equazione differenziale che lega  $v_1$  e  $v_2$ . Que-

st'ultima è la variabile indipendente dell'inversa della relazione costitutiva  $\phi_1(v_1)$ , ovvero  $\phi_1^{-1}(q_1)$ , che fornisce in uscita  $v_1$  (legame spesso non lineare e generalmente invertibile). La variabile d'ingresso all'elemento dinamico  $D_1$  è il risultato della differenza tra due valori. In ultimo, l'elemento dinamico è descritto dalla funzione energia  $E_1$  che dipende dalla sola variabile interna  $q_1$ . Essendoci, in questo caso, una relazione statica tra la variabile potenza in ingresso e quella in uscita,  $R$  non ha una variabile interna.

$$E_1 = \left( \int_0^t p(t) dt \right) = \left( \int_0^t v_1 v_2 dt \right) = \left( \int_0^{q_1} \phi_1^{-1}(q_1) dq_1 \right) \quad (1.1)$$

L'elemento dinamico  $D_2$  ha una struttura speculare all'elemento dinamico  $D_1$ .

In ambito meccanico-traslazionale, gli elementi dinamici e quello dissipativo sono:

- elasticità  $E$ , la cui variabile interna descrive l'energia.
- massa  $M$ , la cui variabile interna è la quantità di moto.
- l'elemento statico attrito, che può essere funzione della velocità.

Le variabili potenza sono la velocità e la forza.

In ambito meccanico-rotazionale, gli elementi dinamici e quello dissipativo sono:

- l'inerzia  $J$ , la cui variabile interna è il momento angolare.
- l'elasticità torsionale  $E$ , la cui variabile interna è lo spostamento angolare.
- l'elemento dissipatore  $b$ , funzione della velocità angolare.

Le variabili potenza sono la velocità angolare e la coppia.

In ambito idraulico, gli elementi dinamici e quello dissipativo sono:

- capacità idraulica, la cui variabile interna è il volume.
- l'induttanza idraulica, la cui variabile interna è il flusso idraulico
- la resistenza idraulica

Le variabili potenza sono la pressione e la portata.

In ambito elettromagnetico, gli elementi dinamici e quello dissipativo sono:

- la capacità, la cui variabile interna è la carica.
- l'induttanza, la cui variabile interna è il flusso.
- la resistenza  $R$ .

Le variabili potenza sono la corrente e la tensione.

# Capitolo 2

## Sistema CVT

### 2.1 Descrizione del sistema fisico

I moderni mezzi agricoli devono soddisfare un connubio di esigenze di vario genere. La possibilità di trasmettere con continuità coppia a terra risulta essere di importanza rilevante. Di conseguenza, oltre che per semplicità di utilizzo, le principali aziende che operano nel campo hanno scelto di utilizzare, per alcuni loro modelli, un tipo di meccanica ove i rapporti di trasmissione sono teoricamente infiniti. Questo permette di variare la velocità del veicolo senza alterare i giri del motore. In Fig. 2.1 mostrato uno schema CVT di natura idraulica utilizzato nei trattori agricoli.

In questo caso i motori elettrici sono stati sostituiti da due motori idraulici, ma lo schema e il principio di funzionamento lo stesso che si avrebbe utilizzando due motori elettrici. Questo sistema CVT è composto da:

- un gruppo epicicloidale composto dai satelliti (2a)
- ruota dentata esterna ring (2b)
- solare (2c)

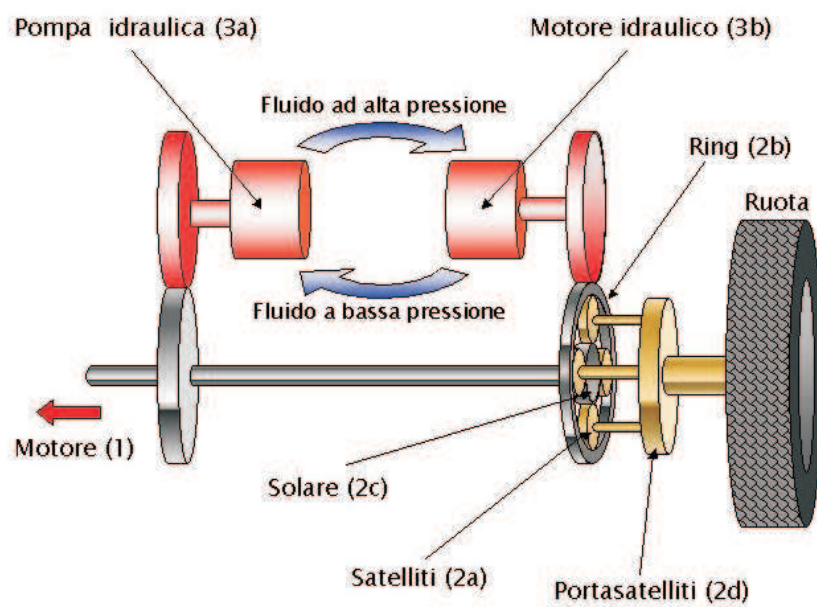


Figura 2.1: Schema funzionale di un CVT idraulico usato nei trattori agricoli.

- portasatelliti (2d)
- un gruppo idraulico composto da una pompa (3a) a cilindrata variabile
- un motore idraulico (3b) a cilindrata fissa.

Se l'albero motore mantiene una velocità costante, al variare della velocità del ring varierà anche quella dei satelliti attorno al solare e quindi la velocità di rotazione del portasatelliti. Modificando la velocità del solare e quella del ring è possibile regolare a piacere sia la velocità che la direzione di marcia del veicolo. Risulta chiaro dalla Fig. 2.1 che il motore endotermico, mediante una coppia di ruote dentate, trasmette coppia al motore idraulico a cilindrata variabile che a sua volta alimenta il motore idraulico a cilindrata fissa il quale trasmette il proprio moto rotatorio al ring di uscita. Cambiando elettronicamente la cilindrata del primo motore idraulico, varia con continuità il rapporto di trasmissione tra il motore e le ruote del veicolo.

## 2.2 Modelli dinamici POG

### 2.2.1 Circuito idraulico

Si procede ora ad utilizzare la tecnica modellistica POG per ottenere un modello dinamico accurato dell'intero sistema di trasmissione. Inizialmente il circuito idraulico è modellato come in Fig. 2.2. Le diverse sezioni vogliono individuare ed isolare le singole componenti.

La pompa idraulica (sezione  $A$ ) dipende direttamente dall'angolo  $\theta$  del piattello di controllo, che detta la cilindrata e conseguentemente il valore della portata idraulica all'interno del circuito e la sua funzione quella di trasformare una velocità angolare  $\omega_p$  in una portata idraulica  $Q_p$ . L'angolo  $\theta$  può essere sia positivo che negativo a seconda che si voglia o meno l'inversione delle camere

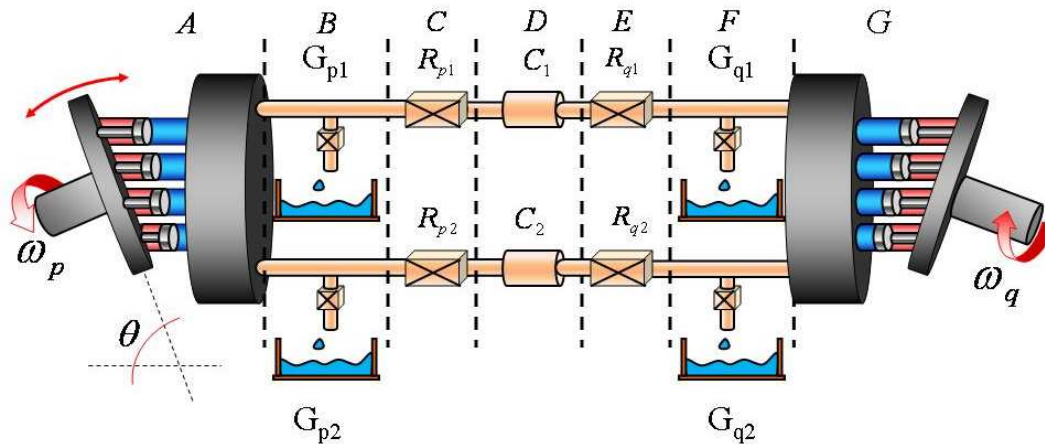


Figura 2.2: Schema del circuito idraulico.

di aspirazione e della mandata. Esattamente opposto il compito del motore idraulico (sezione  $G$ ) che converte la portata idraulica  $Q_q$  in velocità angolare  $\omega_q$ . Le sezioni sono modellate con due blocchi di connessione  $h_p(\theta)$  e  $h_q$ , il primo è una grandezza dipendente da  $\theta$  che consente la trasformazione tra velocità angolare e portata idraulica, il secondo invece converte la portata idraulica in una velocità angolare ed è costante in quanto il motore idraulico ha cilindrata fissa. In ultimo queste sezione segnano il passaggio da due ad una dimensione e viceversa. Le perdite per trafileamento sono considerate nelle sezioni  $B$  e  $F$ . Poste all'ingresso e all'uscita del circuito idraulico ricevono una coppia di pressioni  $P_1$  e  $P_2$  e restituiscono in uscita due portate che si vanno a sottrarre alle portate della mandata e del ritorno, fenomeno dovuto all'aumento di pressione che in presenza di questo tipo di perdite limita la portata totale. Le perdite di carico in ingresso e in uscita sono modellate dai blocchi di elaborazione presenti nelle sezioni  $C$  ed  $E$  che trasformano una portata in una pressione. In ultimo, la sezione  $D$  si cura di modellare la capacità idraulica del sistema. Questo è un elemento dinamico composto da una matrice contenente i valori delle capacità e da un integratore.

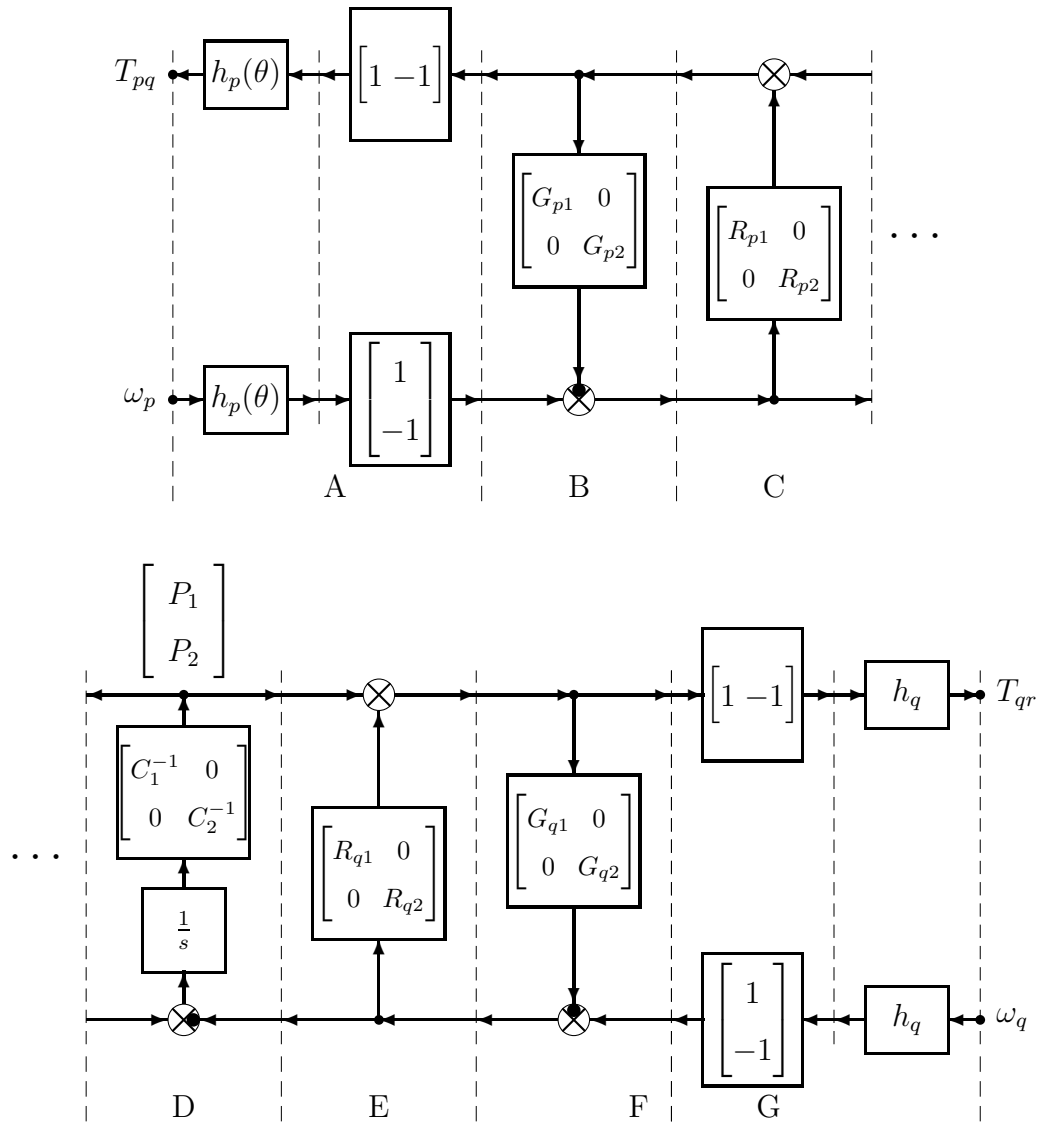


Figura 2.3: Modello POG dello schema in Fig. 2.2.

Nello schema POG mostrato in Fig. 2.3, si può notare la presenza di due loop algebrici che vengono a formarsi tra le matrici delle resistenze e quelle del trafilemento. Facendo riferimento alla figura, i loop sono instaurati tra le sezioni  $B C$  e tra le sezioni  $E F$ . È possibile eliminare tali anelli in modo da rendere il sistema risolvibile e per fare ciò è necessario sfruttare la formula di Mason. Assegnamo alle matrici dei simboli più compatti per facilitare tale operazione. Seguendo l'ordine dello schema POG in Fig. 2.3 abbiamo rispettivamente  $G_p$ ,  $R_p$ ,  $C_{pq}$ ,  $R_q$ ,  $G_q$ .

Analizzando lo schema POG proposto in Fig. 2.4 ed in particolare l'anello formato dal trafilemento  $G_p$  e la resistenza  $R_p$ , è possibile ricavare il relativo determinante che risulterà essere  $1 + G_p R_p$ . Avendo quattro percorsi che collegano i relativi ingressi ed uscite otteniamo quattro funzioni di trasferimento due della quali coincidenti :

$$c_p = 1/(1 + G_p R_p)$$

$$a_p = R_p/(1 + G_p R_p)$$

$$b_p = G_p/(1 + G_p R_p)$$

La Fig. 2.5 rappresenta nuovamente il modello POG dello schema in Fig. 2.2 ma privo dei due loop algebrici.

È possibile modellare le capacità idrauliche del CVT ricavando le equazioni dinamiche del sistema mostrato in Fig. 2.5:

$$\left\{ \begin{array}{l} \underbrace{\begin{bmatrix} C_{pq} & 0 \\ 0 & C_{pq} \end{bmatrix}}_{\mathbf{L}} \underbrace{\begin{bmatrix} \dot{P}_1 \\ \dot{P}_2 \end{bmatrix}}_{\dot{\mathbf{x}}} = \underbrace{\begin{bmatrix} -(b_p + b_q) & 0 \\ 0 & -(b_p + b_q) \end{bmatrix}}_{\mathbf{A}} \underbrace{\begin{bmatrix} P_1 \\ P_2 \end{bmatrix}}_{\mathbf{x}} + \underbrace{\begin{bmatrix} c_p h_p & -c_q h_q \\ c_p h_p & -c_q h_q \end{bmatrix}}_{\mathbf{B}} \underbrace{\begin{bmatrix} \omega_p \\ \omega_q \end{bmatrix}}_{\mathbf{u}} \\ \underbrace{\begin{bmatrix} T_{pq} \\ T_{qr} \end{bmatrix}}_{\mathbf{y}} = \underbrace{\begin{bmatrix} c_p h_p & c_p h_p \\ c_q h_q & c_q h_q \end{bmatrix}}_{\mathbf{C}} \underbrace{\begin{bmatrix} P_1 \\ P_2 \end{bmatrix}}_{\mathbf{x}} + \underbrace{\begin{bmatrix} a_p h_p^2 & 0 \\ 0 & -a_q h_q^2 \end{bmatrix}}_{\mathbf{D}} \underbrace{\begin{bmatrix} \omega_p \\ \omega_q \end{bmatrix}}_{\mathbf{u}} \end{array} \right.$$

Per semplificare i calcoli il circuito idraulico può essere ridotto da due ad

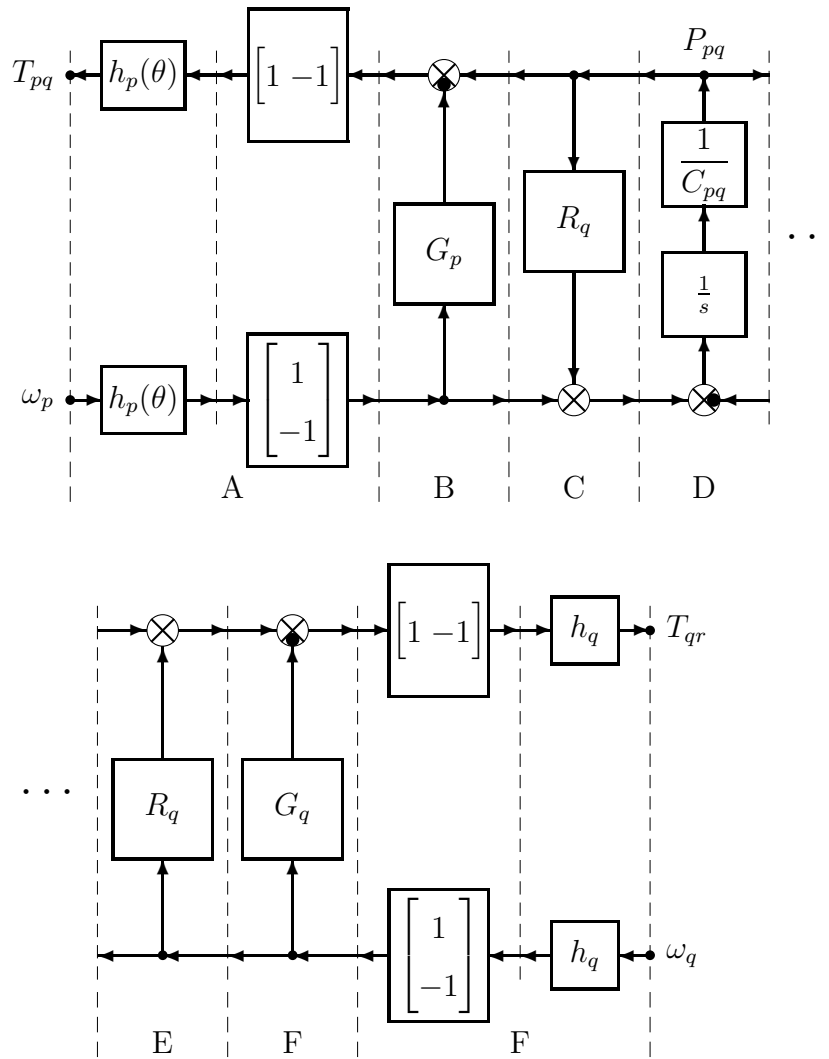


Figura 2.4: Modello POG compatto dello schema in Fig. 2.2.

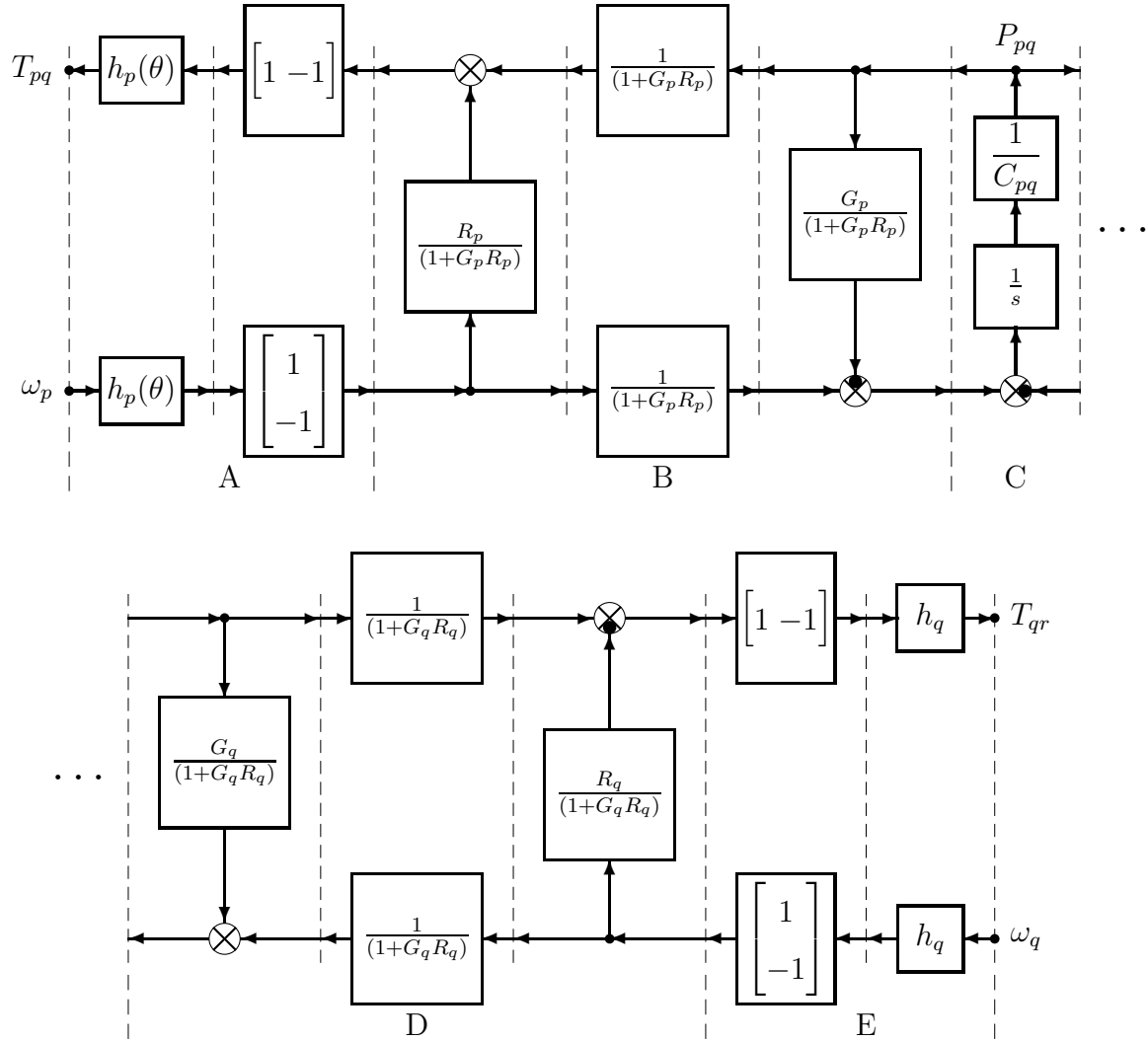


Figura 2.5: Modello POG dello schema in Fig. 2.2 privato dei due loop algebrici.

una sola dimensione applicando una semplice trasformazione. Questo permetterebbe di considerare equivalentemente solo il modello POG della mandata. Si è scelto di prendere in considerazione la matrice colonna formata dalla differenza delle pressioni  $P_1$  e  $P_2$  e dalla loro media e cercare la matrice trasformata che legasse questi valori alle stesse pressioni  $P_1$  e  $P_2$ .

$$\begin{bmatrix} P_d \\ P_s \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix}}_{\mathbf{T}^{-1}} \begin{bmatrix} P_1 \\ P_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} P_1 - P_2 \\ \frac{(P_1 + P_2)}{2} \end{bmatrix}$$

Una volta ottenuta la matrice trasformata inversa, è facile ricavare la matrice trasformata che risulta essere :

$$\mathbf{T} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & 1 \\ \frac{-1}{2} & 1 \end{bmatrix}$$

A questo punto è necessario ricalcolare le nuove equazioni dinamiche del sistema idraulico notando che le matrici  $L$ ,  $A$  e  $D$ , essendo diagonali non variano. Sarà quindi sufficiente riportare di seguito le sole matrici trasformate di  $B$  e  $C$  e successivamente le nuove equazioni dinamiche del sistema idraulico.

$$\mathbf{Bs} = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_p h_p & -c_q h_q \\ c_p h_p & -c_q h_q \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & 1 \\ \frac{-1}{2} & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ \frac{(c_p h_p + c_q h_q)}{2} & c_p h_p - c_q h_q \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{Cs} = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_p h_p & c_p h_p \\ c_q h_q & c_q h_q \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & 1 \\ \frac{-1}{2} & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 2(c_p h_p - c_q h_q) \\ 0 & c_p h_p + c_q h_q \end{bmatrix}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \underbrace{\begin{bmatrix} C_{pq} & 0 \\ 0 & C_{pq} \end{bmatrix}}_{\mathbf{L}} \underbrace{\begin{bmatrix} \dot{P}_d \\ \dot{P}_s \end{bmatrix}}_{\dot{\mathbf{x}}} = \underbrace{\begin{bmatrix} -(b_p + b_q) & 0 \\ 0 & -(b_p + b_q) \end{bmatrix}}_{\mathbf{A}} \underbrace{\begin{bmatrix} P_d \\ P_s \end{bmatrix}}_{\mathbf{x}} + \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ \frac{(c_p h_p + c_q h_q)}{2} & c_p h_p - c_q h_q \end{bmatrix}}_{\mathbf{B}} \underbrace{\begin{bmatrix} \omega_p \\ \omega_q \end{bmatrix}}_{\mathbf{u}} \\ \underbrace{\begin{bmatrix} T_{pq} \\ T_{qr} \end{bmatrix}}_{\mathbf{y}} = \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 2(c_p h_p - c_q h_q) \\ 0 & c_p h_p + c_q h_q \end{bmatrix}}_{\mathbf{C}} \underbrace{\begin{bmatrix} P_d \\ P_s \end{bmatrix}}_{\mathbf{x}} + \underbrace{\begin{bmatrix} a_p h_p^2 & 0 \\ 0 & -a_q h_q^2 \end{bmatrix}}_{\mathbf{D}} \underbrace{\begin{bmatrix} \omega_p \\ \omega_q \end{bmatrix}}_{\mathbf{u}} \end{array} \right.$$

Come facilmente osservabile dalla seconda equazione proposta, gli ingressi e le uscite del sistema idraulico sono legate solo dalla media delle pressioni  $P_1$  e  $P_2$  e non anche dalla differenza. Questo ci permette di ridurre il sistema da due ad una dimensione, prendendo in considerazione ai fini dei calcoli la semplice mandata e modellando il circuito come in Fig. 2.6 (in alto) in cui tutti gli elementi dinamici sono stati presi solo per una mandata idraulica. Lo schema POG relativo a questa semplificazione è presente in Fig. 2.6 (in basso).

Volendo semplificare ulteriormente lo schema POG riportato in Fig. 2.6 (in basso), consideriamo delle perdite di gocciolamento nulle. Questo permette di realizzare lo schema proposto in Fig. 2.7 che sarà utilizzato per le simulazioni.

Per estendere il modello sono state aggiunte alcune sezioni dinamiche che servono a descrivere le interazioni tra il circuito idraulico e le altre parti meccaniche che compongono la trasmissione CVT. Queste avvengono tramite ruote dentate, caratterizzate da propria inerzia e rigidità non infinita, che esercitano una certa frizione nel trasmettere coppia. Una visione semplificata del sistema è mostrata in Fig. 2.8, dove, i blocchi  $b_{mp}$  e  $b_{qr}$  rappresentano le frizioni della pompa e del motore idraulico, gli elementi dinamici  $\frac{1}{J_p}$  e  $\frac{1}{J_q}$ , seguiti da un integratore, le inerzie e gli elementi dissipativi contenenti  $K_{mp}$   $b_{mp}$  e  $K_{qr}$   $b_{qr}$  presenti in entrata e in uscita modellano l'elasticità della connessione vera e propria tra gli ingranaggi. Le sezioni ai due estremi sono due blocchi di connessione che moltiplicano le coppie e le velocità angolari per i raggi delle

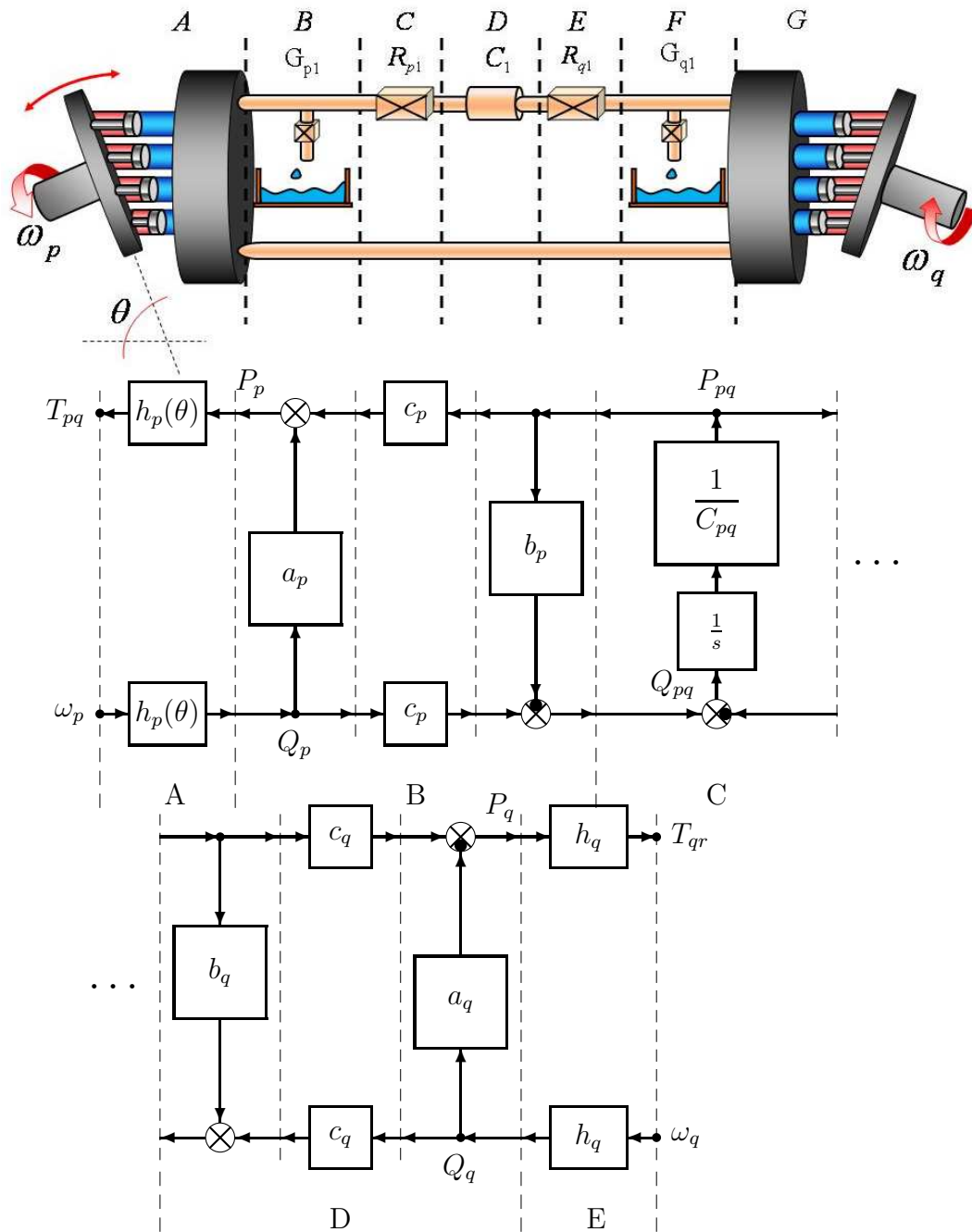


Figura 2.6: Schema POG semplificato per il circuito idraulico.

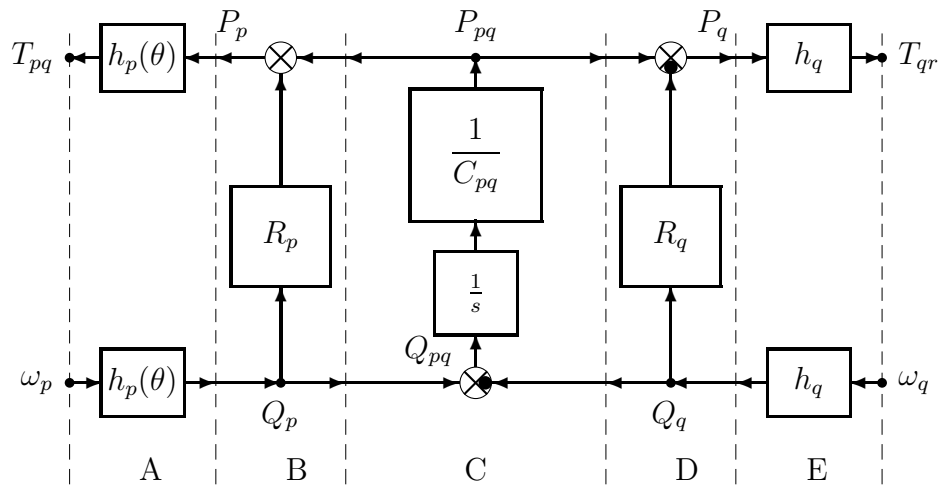


Figura 2.7: Schema POG per il circuito idraulico, ottenuto mandando a zero le perdite.

ruote dentate. Questo è necessario per ottenere i rispettivi valori tangenziali, utili per la modellazione degli elementi dinamici degli ingranaggi.

## 2.2.2 Gruppo epicicloidale

I rotismi esistenti si possono distinguere in ordinari ed epicicloidali. Nei primi gli assi di rotazione degli ingranaggi sono fissi, nei secondi sono liberi di muoversi. Il caso in esame è un rotismo epicicloidale.

Il gruppo di ingranaggi che trasmette il moto alle ruote, chiamato gruppo epicicloidale, è composto da una serie di ruote dentate accoppiate come da Fig. 2.9. L'ingranaggio centrale è il "solare" o "sun" e, in questo caso, è direttamente connesso con l'albero motore, la corona esterna è il "ring" ed è collegata al motore idraulico, i "satelliti" sono le quattro ruote dentate disposte intorno al "solare" e saldamente collegate mediante un portasatelliti. Questi ricevendo il moto sia dal solare che dal ring compiono una rotazione sul proprio

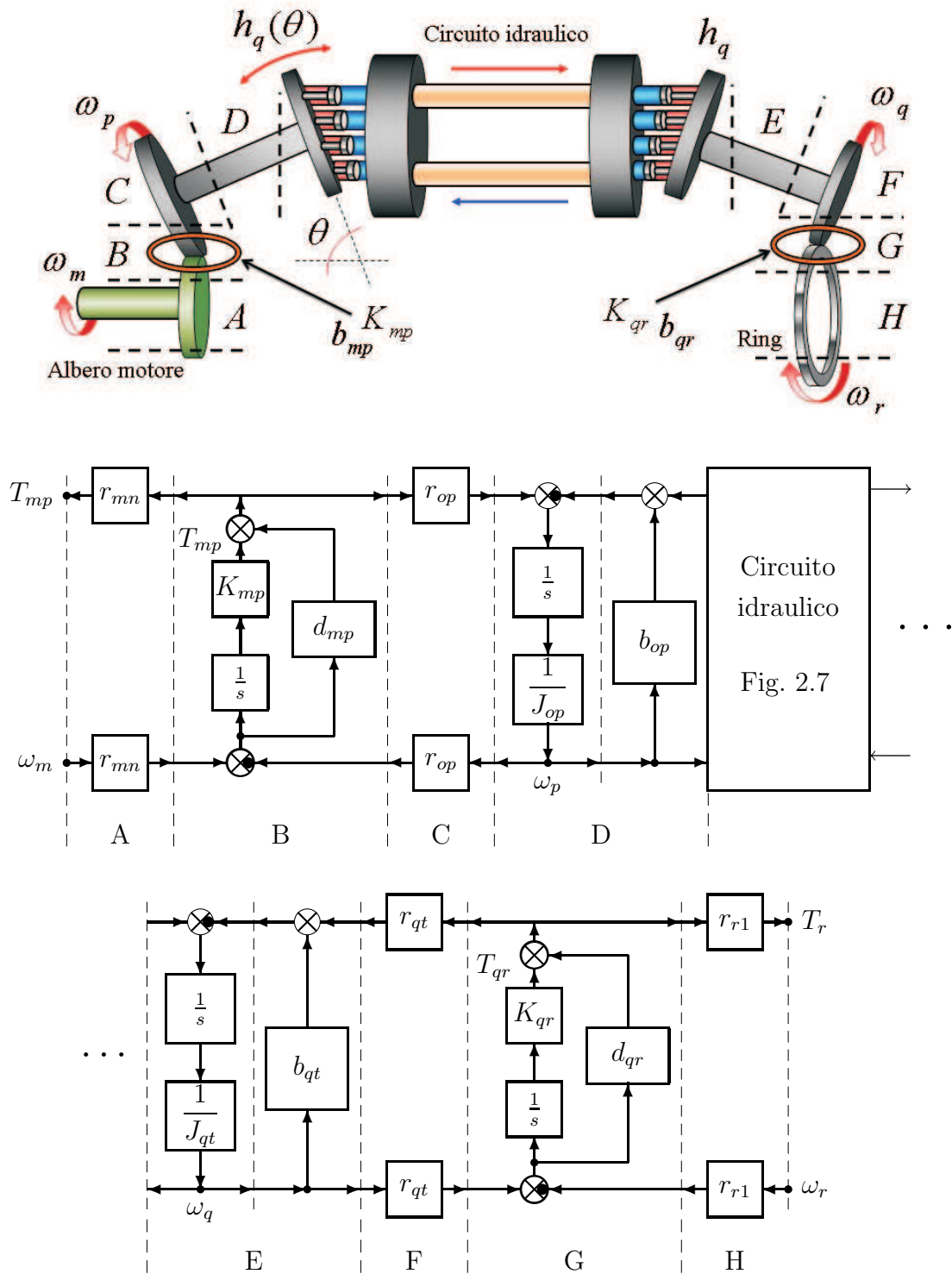


Figura 2.8: Schema di interconnessione della parte idraulica con il resto della trasmissione (in alto) con relativa modellizzazione POG delle parti dinamiche.

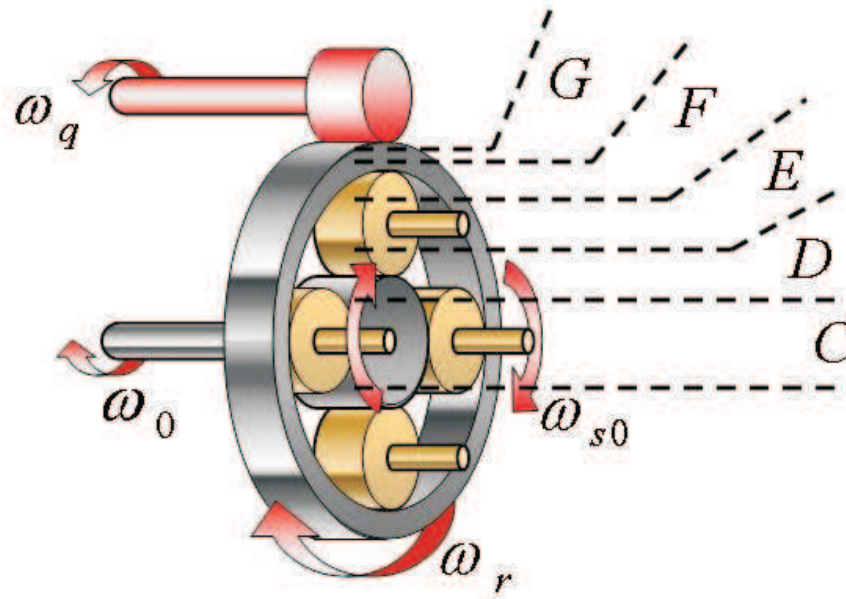


Figura 2.9: Gruppo epicicloidale del sistema CVT

asse ed una rivoluzione attorno all'asse del "solare". In questo modo rendono il sistema di secondo grado cioè con due gradi di libertà.

In Fig. 2.10 il gruppo epicicloidale è stato aggiunto delle porzioni contrassegnate dalle lettere *A* e *B*, per poter valutare le interconnessioni con le restanti parti del sistema. La sezione *A* evidenzia, grazie ad una coppia di ruote dentate, il collegamento tra l'albero motore e l'ingresso del circuito idraulico. Nella sezione *B* è rappresentata l'elasticità posseduta dall'albero di trasmissione. Lo schema POG presente in Fig. 2.11 descrive il gruppo epicicloidale e relative interconnessioni. Passando ad analizzare lo schema,  $T_{em}$  e  $T_{mp}$  sono coppie fornite in ingresso direttamente dal motore e dalla pompa idraulica,  $T_r$  è la coppia trasmessa al ring tramite motore idraulico,  $T_{0s}$  e  $T_0$  rappresentano la coppia trasmessa al ring tramite motore idraulico,  $T_{0s}$  e  $T_0$  rappresentano la coppia resistente delle ruote del mezzo agricolo che a seconda dell'utilizzo viene applicata rispettivamente al solare o al portasatelliti. Le sezioni *A*, *C*, *E*

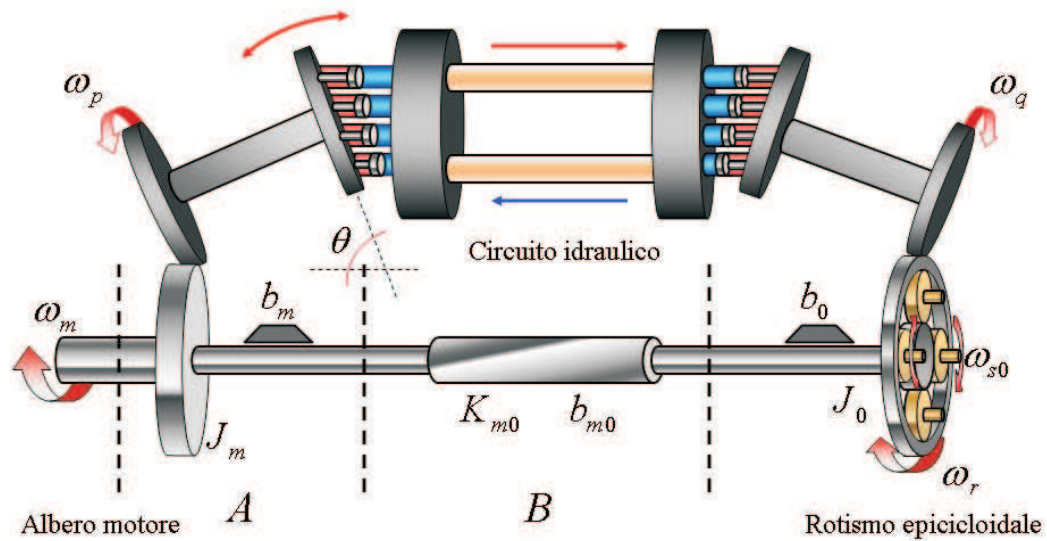


Figura 2.10: Schema del sistema CVT completo.

e  $G$  modellano, rispettivamente, l'inerzia della ruota dentata che interagisce con la pompa idraulica, del solare, dei satelliti e del ring. La sezione  $E$  a differenza delle altre è modellata in due dimensioni per la presenza di due gradi di libertà dei satelliti (rotazione intorno al proprio asse, rivoluzione intorno al solare). Le rimanenti sezioni modellano le elasticità e le connessioni (utili a trasformare una forza in una coppia e a convertire una velocità angolare in una velocità tangenziale) tra albero motore e solare, solare e satelliti e satelliti e ring. Assumendo ragionevolmente che i quattro satelliti siano tutti uguali tra di loro e volendo semplificare la modellazione, si può considerare un unico ingranaggio con massa quattro volte più grande. L'uscita del sistema consiste nella velocità angolare del sun  $\omega_0$  e in quella dei satelliti  $\omega_{s0}$  perchè come detto in precedenza le ruote possono essere connesse sia al portasatelliti che al sun.

Tutte le variabili che riguardano il gruppo epicicloidale si possono vedere in Fig. 2.12.

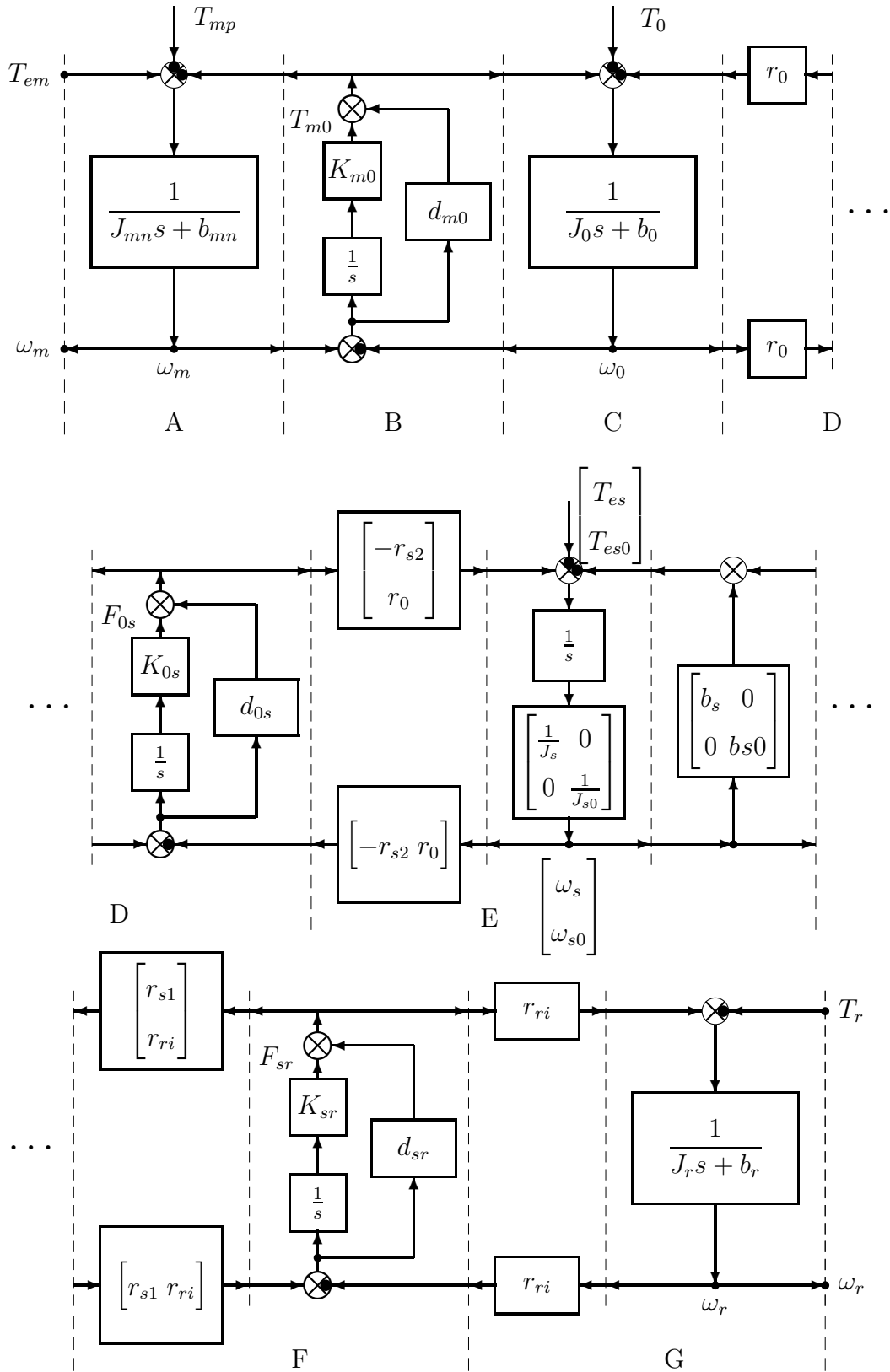


Figura 2.11: Schema POG della sezione relativa al rotismo epicicloidale e alla sua connessione con l'albero motore e con il circuito idraulico.

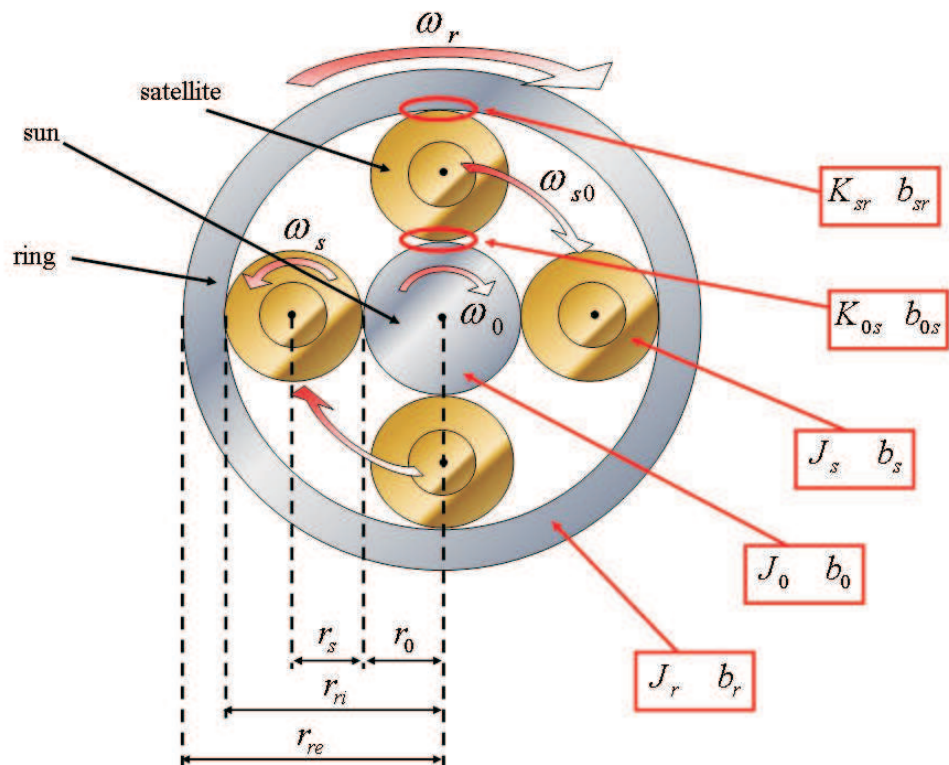


Figura 2.12: Visuale frontale del gruppo epicicloidale con definizione grandezze di sistema.

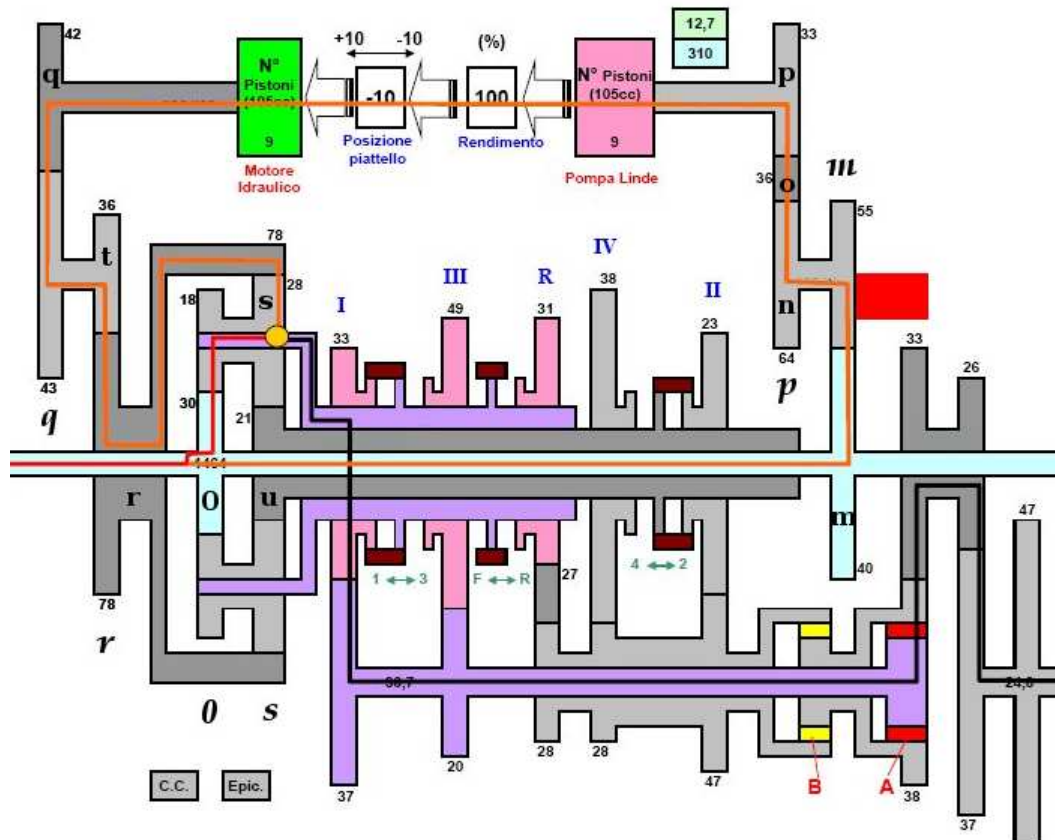


Figura 2.13: Realizzazione dettagliata dello schema CVT CNH

Lo schema in Fig. 2.13, realizzato mediante foglio exel, vuole rendere, in maniera dettagliata, il funzionamento della trasmissione idraulica. L'albero motore, rappresentato in colore celeste chiaro, presenta alle estremità due ruote dentate di diverso raggio e numero di denti. La ruota dentata a sinistra (solare) trasmette direttamente il moto ai satelliti, quella a destra, mediante una serie di riduzioni, trasmette il moto alla pompa idraulica (rettangolo rosa in alto). Di fondamentale importanza l'angolazione del piattello di controllo che determina il valore della portata idraulica all'interno del circuito è la cilindrata variabile della pompa. Al piattello sono legati con delle cerniere nove pistoni che spingono una certa quantità di liquido in direzione del motore idraulico (rettangolo verde in alto) mettendolo in moto e permettendo, mediante un'ulteriore serie di riduzioni, la trasmissione del moto al ring (sezione grigio scuro adiacente i satelliti). I satelliti, compiendo un moto di rotazione sul loro asse centrale ed un moto di rivoluzione intono al solare, trasferiscono coppia al portasatelliti (sezione viola uscente dal gruppo epicicloidale) che li lega in maniera solidale e ad un ulteriore solare interno (sezione grigia) che si sviluppa parallelamente all'albero motore. Le marce, distribuite longitudinalmente all'albero motore, trasferiscono coppia ad un sistema secondario ad alberi coassiali. All'estremità del sistema secondario due frizioni di colore rosso e giallo, rispettivamente contrassegnate dalla lettera *A* e *B*, attivano in maniera alterna l'uno o l'altro albero, a seconda della marcia inserita. Da qui la coppia è trasferita direttamente alle ruote della macchina agricola permettendo alla stessa di muovere.

### 2.2.3 Descrizione degli stati

Gli schemi a blocchi di Fig. 2.6, Fig. 2.8 e Fig. 2.11 possono essere descritti nello spazio degli stati nel modo seguente:

$$\mathbf{L} \dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A} \mathbf{x} + \mathbf{B} \mathbf{u}$$

Struttura a blocchi delle matrici  $\mathbf{L}$ ,  $\mathbf{A}$  e del vettore  $\mathbf{x}$ :

$$\mathbf{L} = \begin{bmatrix} \mathbf{L}_1 & 0 \\ 0 & \mathbf{L}_2 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{A} = \begin{bmatrix} \mathbf{A}_{11} & \mathbf{A}_{12} \\ \mathbf{A}_{21} & \mathbf{A}_{22} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{x} = \begin{bmatrix} \mathbf{x}_1 \\ \mathbf{x}_2 \end{bmatrix}$$

Vettore di stato  $\mathbf{x}_1$  e matrice energia  $\mathbf{L}_1$ :

$$\mathbf{x}_1 = \begin{bmatrix} \omega_m \\ T_{m0} \\ \omega_0 \\ F_{0s} \\ \omega_s \\ \omega_{s0} \\ F_{sr} \\ \omega_r \end{bmatrix}, \quad \mathbf{L}_1 = \begin{bmatrix} J_m n & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{K_{m0}} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & J_0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{K_{0s}} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & J_s & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & J_{s0} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{K_{sr}} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & J_r \end{bmatrix}$$

Vettore di stato  $\mathbf{x}_2$  e matrice energia  $\mathbf{L}_2$ :

$$\mathbf{x}_2 = \begin{bmatrix} T_{mp} \\ \omega_p \\ P_{pq} \\ \omega_q \\ T_{qr} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{L}_2 = \begin{bmatrix} \frac{1}{K_{mp}} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & J_{op} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & C_{pq} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & J_{qt} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{K_{qr}} \end{bmatrix}$$

Matrice di sistema  $\mathbf{A}_{11}$  ( $r_{ri} = r_0 + 2r_s$ ):

$$\mathbf{A}_{11} = \begin{bmatrix} -b_m n - d_{m0} & -1 & d_{m0} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ d_{m0} & 1 & -b_0 - d_{m0} - r_0^2 d_{0s} & -r_0 & -d_{0s} r_0 r_{s2} & d_{0s} r_0^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & r_0 & 0 & r_{s2} & -r_0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -d_{0s} r_0 r_{s2} & -r_{s2} & -b_s - r_{s2}^2 d_{0s} - r_{s1}^2 d_{sr} & r_0 r_{s2} d_{0s} - r_{s1} r_{ri} d_{sr} & -r_{s1} & r_{ri} r_{s1} d_{sr} \\ 0 & 0 & d_{0s} r_0^2 & r_0 & r_0 r_{s2} d_{0s} - r_{s1} r_{ri} d_{sr} & -b_{s0} - r_0^2 d_{0s} - r_{ri}^2 d_{sr} & -r_{ri} & r_{ri}^2 d_{sr} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & r_{s1} & r_{ri} & 0 & -r_{ri} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & r_{ri} r_{s1} d_{sr} & r_{ri}^2 d_{sr} & r_{ri} & -b_r - d_{sr} r_{ri}^2 \end{bmatrix}$$

Matrice di sistema  $\mathbf{A}_{22}$ :

$$\mathbf{A}_{22} = \begin{bmatrix} 0 & -r_{op} & 0 & 0 & 0 \\ r_{op} & -b_{op} - d_{mp} r_{op}^2 - (h_p(\theta))^2 R_p & -h_p(\theta) & 0 & 0 \\ 0 & h_p(\theta) & 0 & -h_q & 0 \\ 0 & 0 & h_q & -b_{qt} - d_{qr} r_{qt}^2 - h_q^2 R_q & -r_{qt} \\ 0 & 0 & 0 & r_{qt} & 0 \end{bmatrix}$$

Matrici  $\mathbf{A}_{12}$  e  $\mathbf{A}_{21}$ :

$$\mathbf{A}_{12} = \begin{bmatrix} r_{mn} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ r_{mn} d_{mp} r_{op} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -r_{r1} r_{qt} d_{qr} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & r_{r1} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{A}_{21} = \mathbf{A}_{12}^T$$

Matrice  $\mathbf{B}^T$  e vettore degli ingressi  $\mathbf{u}$

$$\mathbf{B}^T = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{u} = \begin{bmatrix} \omega_m \\ \omega_0 \\ \omega_{s0} \end{bmatrix}$$

Si faccia riferimento alla seguente matrice  $\mathbf{T}_t$ :

$$\mathbf{T}_t = \begin{bmatrix} \mathbf{e}_1 & \mathbf{e}_3 & \mathbf{e}_5 & \mathbf{e}_6 & \mathbf{e}_8 & \mathbf{e}_{10} & \mathbf{e}_{12} & \mathbf{e}_2 & \mathbf{e}_4 & \mathbf{e}_7 & \mathbf{e}_9 & \mathbf{e}_{11} & \mathbf{e}_{13} \end{bmatrix}$$

dove con  $\mathbf{e}_i$  si è indicata la colonna  $i$ -esima della matrice identità di ordine 13. Se si applica al sistema di partenza la matrice di trasformazione  $\mathbf{T}_t$  si ottiene il sistema trasformato

$$\tilde{\mathbf{L}} \dot{\tilde{\mathbf{x}}} = \tilde{\mathbf{A}} \tilde{\mathbf{x}} + \tilde{\mathbf{B}} \tilde{\mathbf{u}} \quad (2.1)$$

dove

$$\tilde{\mathbf{L}} = \mathbf{T}_t^T \mathbf{L} \mathbf{T}_t, \quad \tilde{\mathbf{A}} = \mathbf{T}_t^T \mathbf{A} \mathbf{T}_t, \quad \tilde{\mathbf{B}} = \mathbf{T}_t^T \mathbf{B} \quad (2.2)$$

Nuovo vettore di stato  $\tilde{\mathbf{x}}$  e nuova matrice di sistema  $\tilde{\mathbf{L}}$ :

$$\tilde{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} \omega_m \\ \omega_0 \\ \omega_s \\ \omega_{s0} \\ \omega_r \\ \omega_p \\ \omega_q \\ T_{m0} \\ F_{s0} \\ F_{sr} \\ T_{mp} \\ P_{pq} \\ T_{qr} \end{bmatrix}, \quad \tilde{\mathbf{L}} = \begin{bmatrix} J_{mn} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & J_0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & J_s & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & J_{s0} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & J_r & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & J_{op} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & J_{qt} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{K_{m0}} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{K_{0s}} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{K_{sr}} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{K_{mp}} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & C_{pq} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{K_{qr}} \end{bmatrix}$$

Struttura della matrice  $\tilde{\mathbf{A}}$ :

$$\tilde{\mathbf{A}} = \begin{bmatrix} \tilde{\mathbf{A}}_{11} & \tilde{\mathbf{A}}_{12} \\ \tilde{\mathbf{A}}_{21} & 0 \end{bmatrix}$$

Matrice  $\tilde{\mathbf{A}}_{11}$ :

$$\begin{bmatrix} -b_{mn} - d_{m0} - d_{mp}r_{mn}^2 & d_{m0} & 0 & 0 \\ d_{m0} & -b_0 - d_{m0} - d_{0s}r_0^2 & -d_{0s}r_0r_{s2} & d_{0s}r_0^2 \\ 0 & -d_{0s}r_0r_{s2} & -b_s - d_{0s}r_{s2}^2 - d_{sr}r_{s1}^2 & d_{0s}r_0r_{s2} - d_{sr}r_{ri}r_{s1} \\ 0 & d_{0s}r_0^2 & d_{0s}r_0r_{s2} - d_{sr}r_{ri}r_{s1} & -b_{s0} - d_{0s}r_0^2 - d_{sr}r_{ri}^2 & \dots \\ 0 & 0 & d_{sr}r_{ri}r_{s1} & d_{sr}r_{ri}^2 \\ -d_{mp}r_{mn}r_{op} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ & 0 & -d_{mp}r_{mn}r_{op} & 0 \\ & 0 & 0 & 0 \\ \dots & d_{sr}r_{ri}r_{s1} & 0 & 0 \\ & d_{sr}r_{ri}^2 & 0 & 0 \\ -b_r - d_{sr}r_{ri}^2 - d_{qr}r_{ri}^2 & 0 & 0 & -d_{qr}r_{qt}r_{r1} \\ 0 & -b_{op} - d_{mp}r_{op}^2 - (h_p(\theta))^2R_p & 0 & 0 \\ -d_{qr}r_{qt}r_{r1} & 0 & 0 & -b_{qt} - d_{qr}r_{qt}^2 - h_q^2R_q \end{bmatrix}$$

Matrice  $\tilde{\mathbf{A}}_{12}$ :

$$\tilde{\mathbf{A}}_{12} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & r_{mn} & 0 & 0 \\ 1 & -r_0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -r_{s2} & -r_{s1} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & r_0 & -r_{ri} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & r_{ri} & 0 & 0 & -r_{r1} \\ 0 & 0 & 0 & r_{op} & -h_p(\theta) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & h_q & -r_{qt} \end{bmatrix}$$

Matrice  $\tilde{\mathbf{A}}_{21}$ :

$$\tilde{\mathbf{A}}_{21} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & r_0 & r_{s2} & -r_0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & r_{s1} & r_{ri} & -r_{ri} & 0 & 0 & 0 \\ -r_{mn} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -r_{op} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & h_p(\theta) & -h_q & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & r_{r1} & 0 & 0 & r_{qt} \end{bmatrix}$$

La matrice  $\tilde{\mathbf{B}}$  assume la seguente struttura:

$$\tilde{\mathbf{B}}^T = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Applicando le tecniche di riduzione dei sistemi POG è possibile dimostrare che applicando al sistema (2.1) la seguente trasformazione di coordinate:

$$\begin{bmatrix} \omega_m \\ \omega_0 \\ \omega_s \\ \omega_{s0} \\ \omega_r \\ \omega_p \\ \omega_q \\ T_{m0} \\ F_{s0} \\ F_{sr} \\ T_{mp} \\ P_{pq} \\ T_{qr} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ \frac{h_p(\theta)r_0r_{mn}r_{qt}r_{ri}-h_qr_0r_{op}r_{r1}r_{ri}}{h_qr_0r_{op}r_{r1}r_{s1}+h_qr_{op}r_{r1}r_{ri}r_{s2}} \\ \frac{h_p(\theta)r_{mn}r_{qt}r_{ri}r_{s2}+h_qr_0r_{op}r_{r1}r_{s1}}{h_qr_{op}r_{r1}r_{s1}r_0+h_qr_{op}r_{r1}r_{ri}r_{s1}} \\ \frac{h_p(\theta)r_{mn}r_{qt}}{h_qr_{op}r_{r1}} \\ -\frac{r_{mn}}{r_{op}} \\ -\frac{h_p(\theta)r_{mn}}{h_qr_{op}} \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \omega_m, \quad \leftrightarrow \quad \tilde{\mathbf{x}} = \mathbf{T}_t \omega_m$$

si ottiene un sistema trasformato “ridotto”

$$J_t(\theta) \dot{\omega}_m = -b_t(\theta) \omega_m + \mathbf{T}_t^T \tau_\omega$$

che corrisponde a quello che si ottiene fisicamente quando tutte le rigidità  $K_{m0}$ ,  $K_{0s}$ ,  $K_{sr}$ ,  $K_{mp}$  e  $K_{qr}$  del sistema tendono all'infinito e la capacità idraulica  $C_{pq}$  tende a zero. I parametri  $J_t(\theta)$  e  $b_t(\theta)$  rappresentano, rispettivamente, il momento di inerzia equivalente

$$\begin{aligned} J_t(\theta) = & J_0 + J_{mn} + \frac{J_{op} r_{mn}^2}{r_{op}^2} + \frac{(h_p(\theta))^2 J_{qt} r_{mn}^2}{h_q^2 r_{op}^2} + \frac{(h_p(\theta))^2 J_r r_{mn}^2 r_{qt}^2}{h_q^2 r_{op}^2 r_{r1}^2} + \\ & + \frac{J_s (h_q r_0 r_{op} r_{r1} r_{ri} - h_p(\theta) r_0 r_{mn} r_{qt} r_{ri})^2}{(h_q r_0 r_{op} r_{r1} r_{s1} + h_q r_{op} r_{r1} r_{ri} r_{s2})^2} + \frac{J_{s0} (h_q r_0 r_{op} r_{r1} r_{s1} + h_p(\theta) r_{mn} r_{qt} r_{ri} r_{s2})^2}{(h_q r_0 r_{op} r_{r1} r_{s1} + h_q r_{op} r_{r1} r_{ri} r_{s2})^2} \end{aligned}$$

e il coefficiente di attrito equivalente

$$\begin{aligned} b_t(\theta) = & \frac{1}{(h_q^2 r_{op}^2 r_{r1}^2 (r_0 r_{s1} + r_{ri} r_{s2})^2)} (b_s r_0^2 r_{ri}^2 (h_q r_{op} r_{r1} - h_p(\theta) r_{mn} r_{qt})^2 + b_0 h_q^2 r_{op}^2 r_{r1}^2 \\ & (r_{s2} r_{ri} + r_{s1} r_0)^2 + b_{s0} (h_q r_{op} r_{r1} r_{s1} r_0 + h_p(\theta) r_{mn} r_{qt} r_{ri} r_{s2}) + \\ & R_p h_p(\theta)^2 r_{mn}^2 r_{r1}^2 h_q^2 (r_{s2} r_{ri} + r_{s1} r_0)^2 + R_q h_p(\theta)^2 r_{mn}^2 r_{r1}^2 h_q^2 (r_{s2} r_{ri} + \\ & r_{s1} r_0)^2 + b_{qt} h_p(\theta)^2 r_{mn}^2 r_{r1}^2 (r_{s2} r_{ri} + r_{s1} r_0)^2 + b_r h_p(\theta)^2 r_{mn}^2 r_{qt}^2 (r_{s2} r_{ri} + \\ & r_{s1} r_0)^2 + b_{mn} h_q^2 r_{op}^2 r_{r1}^2 (r_{s2} r_{ri} + r_{s1} r_0)^2 + b_{op} h_q^2 r_{mn}^2 r_{r1}^2 (r_{s2} r_{ri} + r_{s1} r_0)^2) \end{aligned}$$

dell'intero sistema al variare della posizione  $\theta$  del piattello del motore idraulico a cilindrata variabile. Il vettore degli ingressi  $\tau_\omega$  corrisponde al vettore delle variabili coniugate in potenza rispetto al vettore di stato  $\tilde{\mathbf{x}}$ . Lo schema POG del corrispondente sistema ridotto è mostrato in Fig. 2.14.

Lo schema POG generale e lo schema POG ridotto, durante la simulazione, si comportano nel medesimo modo se l'angolazione del piattello è costante. I due grafici discostano significativamente l'uno dall'altro se si considera una variazione in corso dell'angolazione del piattello. Per ovviare a questo fenomeno che si verifica solo durante il transitorio, nelle simulazioni con  $\theta$  variabile si adotta lo schema ridotto riportato in Fig. 2.15.

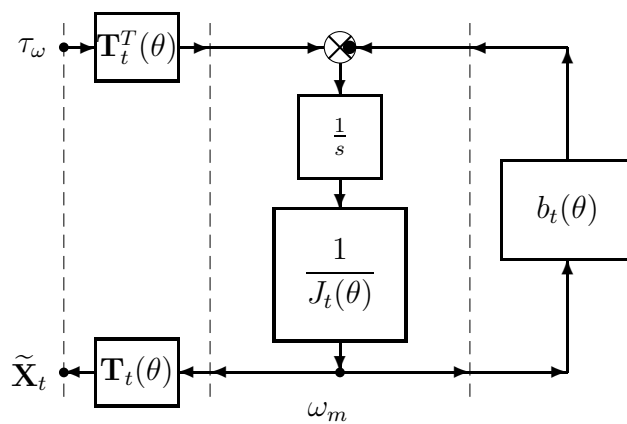


Figura 2.14: Modello dinamico ridotto del sistema CVT.

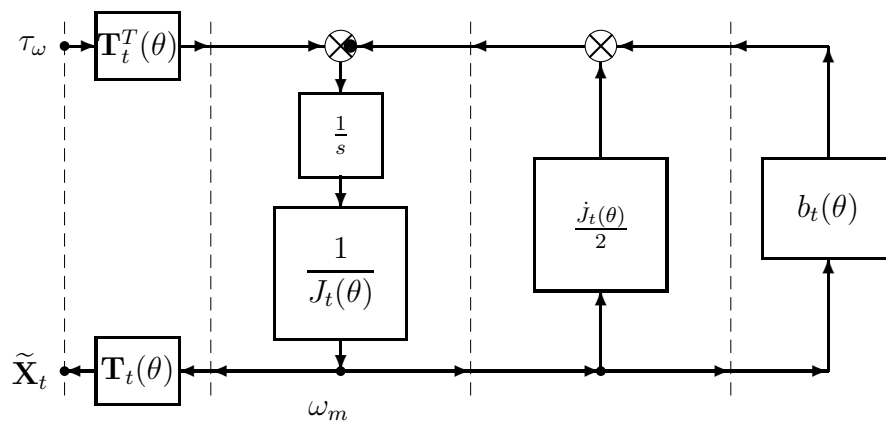


Figura 2.15: Modello dinamico ridotto del sistema CVT completo.

# Capitolo 3

## Band Stop Filter

### 3.1 Band Stop Filter

Nel trattamento dei segnali, il band stop filter è un filtro che passa la maggior parte delle frequenze inalterate ma attenua quelle in una specifica gamma di livelli molto bassi, al contrario di un filtro passa banda. In Fig. 3.1 il circuito del Band Stop Filter.

Nello spazio degli stati la struttura è descritta dalla relazione

$$\mathbf{L} \dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A} \mathbf{x} + \mathbf{B} \mathbf{u}$$

il vettore di stato  $\mathbf{x}$  è rappresentato da una matrice colonna ed i valori presenti in tale matrice sono le tensioni che agiscono sulle capacità del circuito

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} V_{12} \\ V_{23} \\ V_{40} \end{bmatrix}$$

$\mathbf{L}$  è la relativa matrice diagonale i cui valori corrispondono alle capacità

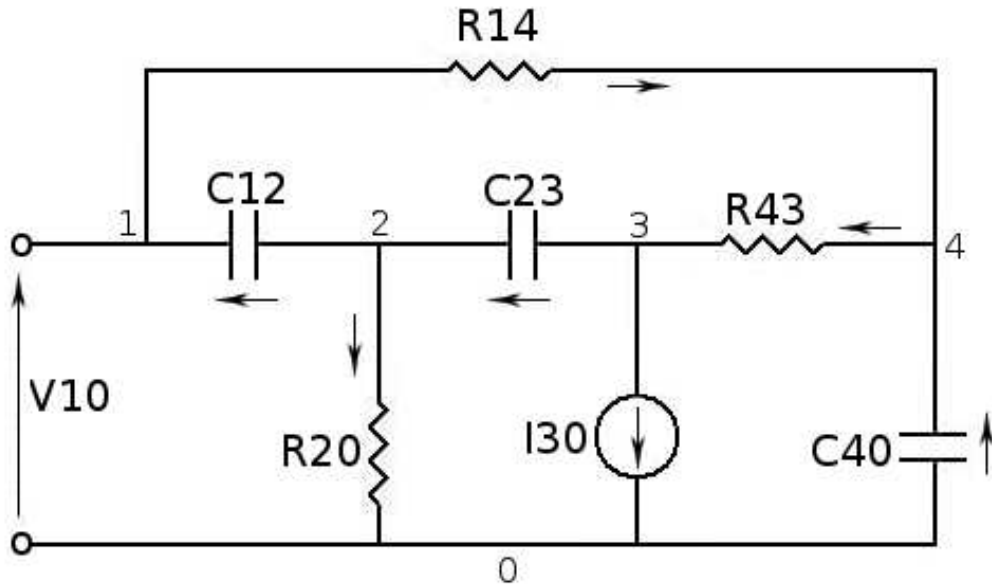


Figura 3.1: Schema elettrico Band Stop Filter

sopracitate

$$\mathbf{L} = \begin{bmatrix} C_{12} & 0 & 0 \\ 0 & C_{23} & 0 \\ 0 & 0 & C_{40} \end{bmatrix}$$

Per ultimo il vettore  $\mathbf{u}$  è una matrice colonna realizzata con gli ingressi del circuito

$$\mathbf{u} = \begin{bmatrix} V_{10} \\ I_{30} \end{bmatrix}$$

Analizzando lo schema elettrico in Fig. 3.1 otteniamo la matrice  $\mathbf{A}$

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{R_{20}} - \frac{1}{R_{43}} & -\frac{1}{R_{43}} & -\frac{1}{R_{43}} \\ -\frac{1}{R_{43}} & -\frac{1}{R_{43}} & -\frac{1}{R_{43}} \\ -\frac{1}{R_{43}} & -\frac{1}{R_{43}} & -\frac{1}{R_{14}} - \frac{1}{R_{43}} \end{bmatrix}$$

e la matrice  $\mathbf{B}$

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} \frac{1}{R_{20}} + \frac{1}{R_{43}} & 1 \\ \frac{1}{R_{43}} & 1 \\ \frac{1}{R_{14}} + \frac{1}{R_{43}} & 0 \end{bmatrix}$$

che lo descrivono completamente.

Una buona lettura dello schema elettrico del Band Stop Filter è data dalla realizzazione del relativo POG proposto in Fig. 3.2

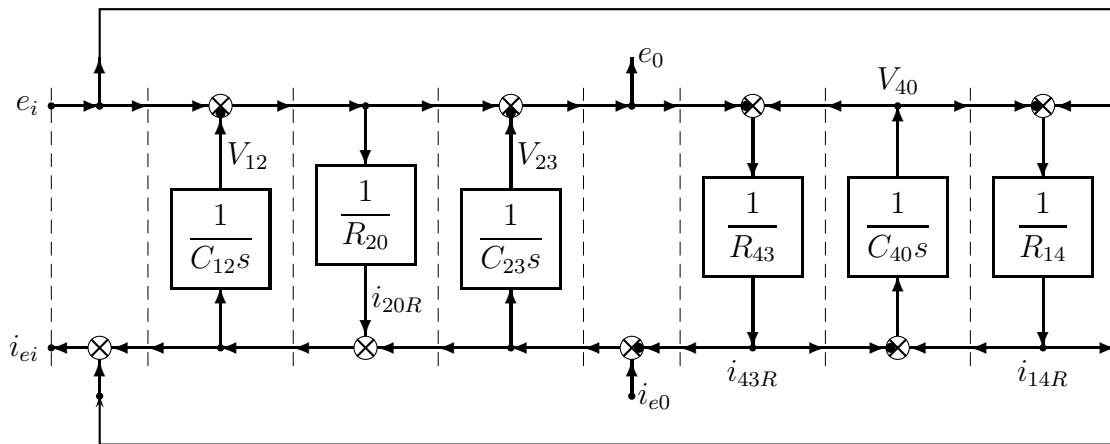


Figura 3.2: Schema POG del Band Stop Filter .

Osservando lo schema POG in Fig. 3.2 ed in particolare i blocchi relativi alle resistenze, è possibile notare sempre il medesimo verso di percorrenza ove si ha un ingresso con tensione ed un'uscita con corrente. In questa particolare circostanza è possibile porre delle induttanze in serie ad ogni resistenza aumentando così il numero di componenti del circuito ma senza compromettere in alcun modo il funzionamento. Il nuovo schema elettrico è riportato in Fig. 3.3 e permette di considerare le induttanze come fornitrici di corrente, la resistenze come semplici componenti passivi.

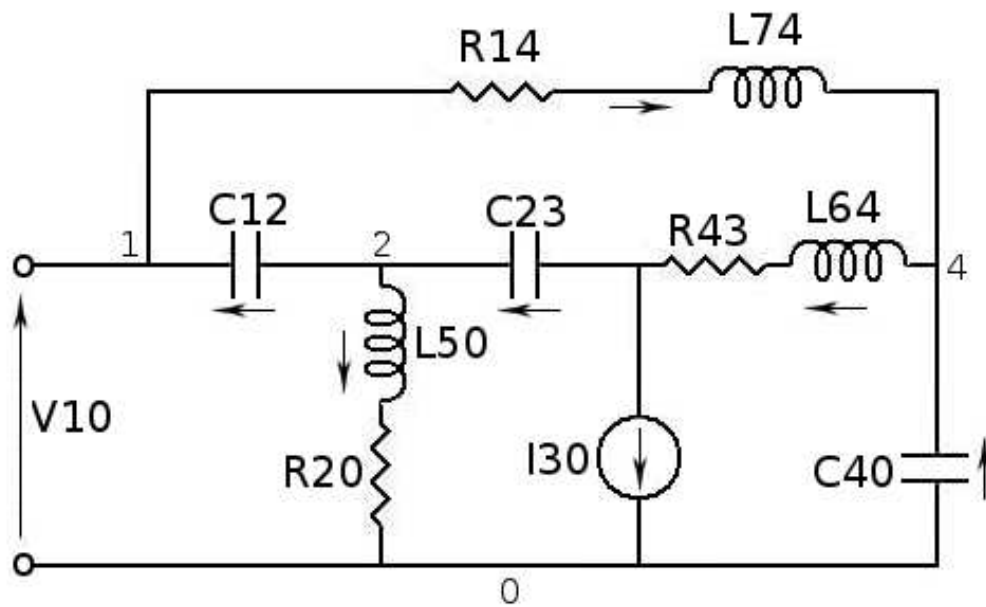


Figura 3.3: Schema elettrico Band Stop Filter

Chiaramente questo comporta delle variazioni nella rappresentazione dello spazio degli stati. Il vettore di stato  $\mathbf{x}$  aggiunge i valori delle correnti a quelli delle tensioni evolvendo come segue

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} V_{12} \\ V_{23} \\ V_{40} \\ I_{50} \\ I_{64} \\ I_{74} \end{bmatrix}$$

mentre la matrice diagonale  $\mathbf{L}$  prende in considerazione anche le induttanze

oltre alle capacità

$$\mathbf{L} = \left[ \begin{array}{ccc|ccc} C_{12} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & C_{23} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & C_{40} & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & L_{50} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & L_{64} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & L_{74} \end{array} \right]$$

La successiva analisi del circuito permette di ricavare la matrice  $\mathbf{A}$

$$\mathbf{A} = \left[ \begin{array}{cc} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{array} \right] = \left[ \begin{array}{ccc|ccc} 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 \\ \hline -1 & 0 & 0 & -R_{20} & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & -R_{43} & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & -R_{14} \end{array} \right]$$

e la matrice  $\mathbf{B}$

$$\mathbf{B} = \left[ \begin{array}{c} B_1 \\ B_2 \end{array} \right] = \left[ \begin{array}{c|c} 0 & 1 \\ 0 & 1 \\ \hline 1 & 0 \\ -1 & 0 \\ 1 & 0 \end{array} \right]$$

dove

$$\mathbf{A}_{11} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{A}_{12} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

e

$$\mathbf{A}_{21} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{A}_{22} = \begin{bmatrix} -R_{20} & 0 & 0 \\ 0 & -R_{43} & 0 \\ 0 & 0 & -R_{14} \end{bmatrix}$$

$\mathbf{B}_1$  e  $\mathbf{B}_2$  sono rispettivamente le matrici formate dalle prime e dalle ultime tre righe di  $\mathbf{B}$ .

$$\mathbf{B}_1 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{B}_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

In Fig. 3.4 la rappresentazione dello schema POG che prende in considerazione anche le induttanze aggiuntive.

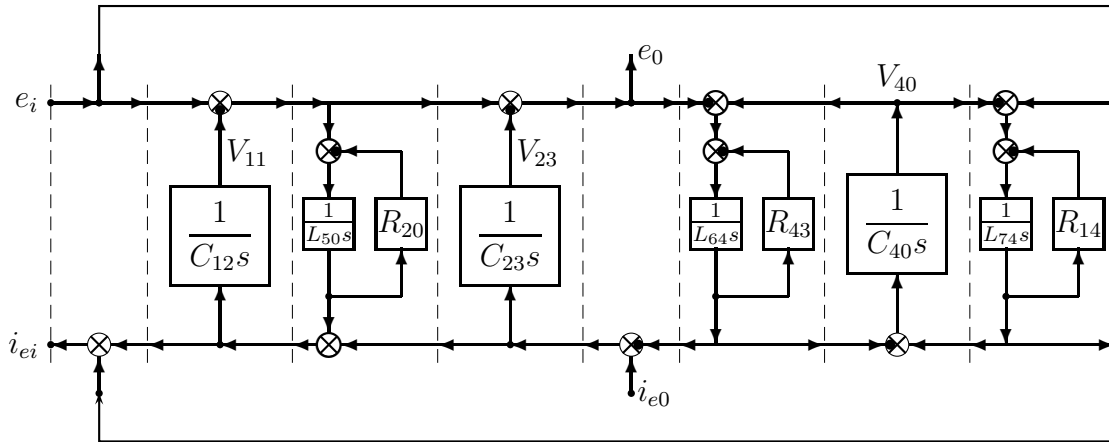


Figura 3.4: Schema POG del Band Stop Filter con induttanze aggiuntive.

Facendo tendere a zero le induttanze fittizie, possiamo scrivere la matrice

energia come

$$\mathbf{L}_{L \rightarrow 0} = \left[ \begin{array}{ccc|ccc} C_{12} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & C_{23} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & C_{40} & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right]$$

Passiamo a calcolare le matrici trasformazione che permettono la riduzione del circuito. La matrice  $T$  si compone di

$$\mathbf{T} = \left[ \begin{array}{c} T_1 \\ T_2 \end{array} \right] = \left[ \begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & & & \\ 0 & 1 & 0 & & & \\ 0 & 0 & 1 & & & \\ \hline -\frac{1}{R_{20}} & 0 & 0 & & & \\ \frac{1}{R_{43}} & \frac{1}{R_{43}} & \frac{1}{R_{43}} & & & \\ 0 & 0 & -\frac{1}{R_{43}} & & & \end{array} \right]$$

dove  $T_1$  è matrice identità

$$\mathbf{T}_1 = \left[ \begin{array}{ccc} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{array} \right]$$

e  $T_2$  si calcola dal prodotto righe per colonne tra la matrice  $A_{22}$  invertita e cambiata di segno e la matrice  $A_{21}$  ( $T_2 = -A_{22}^{-1}A_{21}$ )

$$-\mathbf{A}_{22}^{-1} = \left[ \begin{array}{ccc} \frac{1}{R_{20}} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{R_{43}} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{R_{14}} \end{array} \right], \quad \mathbf{A}_{21} = \left[ \begin{array}{ccc} -1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{array} \right]$$

$$\mathbf{T}_2 = \left[ \begin{array}{ccc} -\frac{1}{R_{20}} & 0 & 0 \\ \frac{1}{R_{43}} & \frac{1}{R_{43}} & \frac{1}{R_{43}} \\ 0 & 0 & -\frac{1}{R_{14}} \end{array} \right]$$

La matrice  $T_b$  si compone di

$$\mathbf{T}_b = \begin{bmatrix} T_{b1} \\ T_{b2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ \frac{1}{R_{20}} & 0 \\ -\frac{1}{R_{43}} & 0 \\ \frac{1}{R_{14}} & 0 \end{bmatrix}$$

dove  $T_{b1}$  è una matrice nulla

$$\mathbf{T}_{b1} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

e  $T_{b2}$  si calcola dal prodotto righe per colonne tra la matrice  $A_{22}$  invertita e cambiata di segno e la matrice  $B_2$  ( $T_{b2} = -A_{22}^{-1}B_2$ )

$$\mathbf{T}_{b2} = \begin{bmatrix} \frac{1}{R_{20}} & 0 \\ -\frac{1}{R_{43}} & 0 \\ \frac{1}{R_{14}} & 0 \end{bmatrix}$$

Applicando ora le trasformazioni alle matrici  $L_{L->0}$ ,  $A$  e  $B$

$$\mathbf{L}_T = \mathbf{T}^T \mathbf{L}_{L->0} \mathbf{T} = \left[ \begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -\frac{1}{R_{20}} & \frac{1}{R_{43}} & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & \frac{1}{R_{43}} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \frac{1}{R_{43}} & \frac{1}{R_{14}} \end{array} \right] \dots$$

$$\dots \left[ \begin{array}{ccc|ccc} C_{12} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & C_{23} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & C_{40} & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right] \left[ \begin{array}{ccc} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ \hline -\frac{1}{R_{20}} & 0 & 0 \\ \frac{1}{R_{43}} & \frac{1}{R_{43}} & \frac{1}{R_{43}} \\ 0 & 0 & -\frac{1}{R_{43}} \end{array} \right] = \left[ \begin{array}{ccc} C_{12} & 0 & 0 \\ 0 & C_{23} & 0 \\ 0 & 0 & C_{40} \end{array} \right]$$

$$\mathbf{A}_T = \mathbf{T}^T \mathbf{A} \mathbf{T} = \left[ \begin{array}{ccc|cc} 1 & 0 & 0 & -\frac{1}{R_{20}} & \frac{1}{R_{43}} & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & \frac{1}{R_{43}} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \frac{1}{R_{43}} & \frac{1}{R_{14}} \end{array} \right] \left[ \begin{array}{ccc|ccc} 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 \\ \hline -1 & 0 & 0 & -R_{20} & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & -R_{43} & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & -R_{14} \end{array} \right] \dots$$

$$\dots \left[ \begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & & & \\ 0 & 1 & 0 & & & \\ 0 & 0 & 1 & & & \\ \hline -\frac{1}{R_{20}} & 0 & 0 & & & \\ \frac{1}{R_{43}} & \frac{1}{R_{43}} & \frac{1}{R_{43}} & & & \\ 0 & 0 & -\frac{1}{R_{43}} & & & \end{array} \right] = \left[ \begin{array}{cccc} -\frac{1}{R_{20}} - \frac{1}{R_{43}} & -\frac{1}{R_{43}} & -\frac{1}{R_{43}} & -\frac{1}{R_{43}} \\ -\frac{1}{R_{43}} & -\frac{1}{R_{43}} & -\frac{1}{R_{43}} & -\frac{1}{R_{43}} \\ -\frac{1}{R_{43}} & -\frac{1}{R_{43}} & -\frac{1}{R_{14}} - \frac{1}{R_{43}} & \end{array} \right]$$

$$\mathbf{B}_T = \mathbf{T}^T (\mathbf{B} + \mathbf{A} \mathbf{T}_b) = \left[ \begin{array}{ccc|cc} 1 & 0 & 0 & -\frac{1}{R_{20}} & \frac{1}{R_{43}} & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & \frac{1}{R_{43}} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \frac{1}{R_{43}} & \frac{1}{R_{14}} \end{array} \right] \dots$$

$$\dots \left\{ \left[ \begin{array}{cc|ccc} 0 & 1 & & & & \\ 0 & 1 & & & & \\ 0 & 0 & & & & \\ \hline 1 & 0 & & & & \\ -1 & 0 & & & & \\ 1 & 0 & & & & \end{array} \right] + \left[ \begin{array}{ccc|ccc} 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 \\ \hline -1 & 0 & 0 & -R_{20} & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & -R_{43} & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & -R_{14} \end{array} \right] \dots$$

$$\dots \left[ \begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & & & \\ 0 & 1 & 0 & & & \\ 0 & 0 & 1 & & & \\ \hline -\frac{1}{R_{20}} & 0 & 0 & & & \\ \frac{1}{R_{43}} & \frac{1}{R_{43}} & \frac{1}{R_{43}} & & & \\ 0 & 0 & -\frac{1}{R_{43}} & & & \end{array} \right] = \left[ \begin{array}{cc} \frac{1}{R_{20}} + \frac{1}{R_{43}} & 1 \\ \frac{1}{R_{43}} & 1 \\ \frac{1}{R_{14}} + \frac{1}{R_{43}} & 0 \end{array} \right]$$

otteniamo le matrici originariamente presenti nella descrizione dello spazio degli stati.

# Capitolo 4

## Rotismo Epicicloidale - Formula di Willis

### 4.1 Rotismo Epicicloidale - Formula di Willis

Tra i diversi rotismi epicicloidali, quello da noi preso in considerazione è rappresentato in Fig. 4.1 a destra. Esso è composto da quattro membri: le ruote (una delle quali, la 3, funge da telaio) ed un quarto membro accoppiato rotoidalmente alle ruote 1 e 2. La ruota 1 è vincolata rotoidalmente ai membri 3 e 4 e con coppia superiore alla ruota 2; questa è vincolata rotoidalmente al membro 4 e con coppia superiore alle ruote 1 e 3; la ruota 3, infine, è vincolata con coppia superiore alla ruota 2 e con coppia rotoidale alla ruota 1. La catena cinematica è quella stessa del rotismo di Fig. 4.1 a sinistra, nel quale funge da telaio il membro 4 (il rotismo è ordinario). Ciascuno dei due meccanismi di Fig. 4.1 ha ovviamente un solo grado di libertà.

La ruota 1 sia il movente del rotismo di Fig. 4.1 a destra. Essa ruotando pone in movimento la ruota 2. Il moto della ruota due può essere facilmente individuato osservando che la circonferenza primitiva della ruota 2 deve ro-

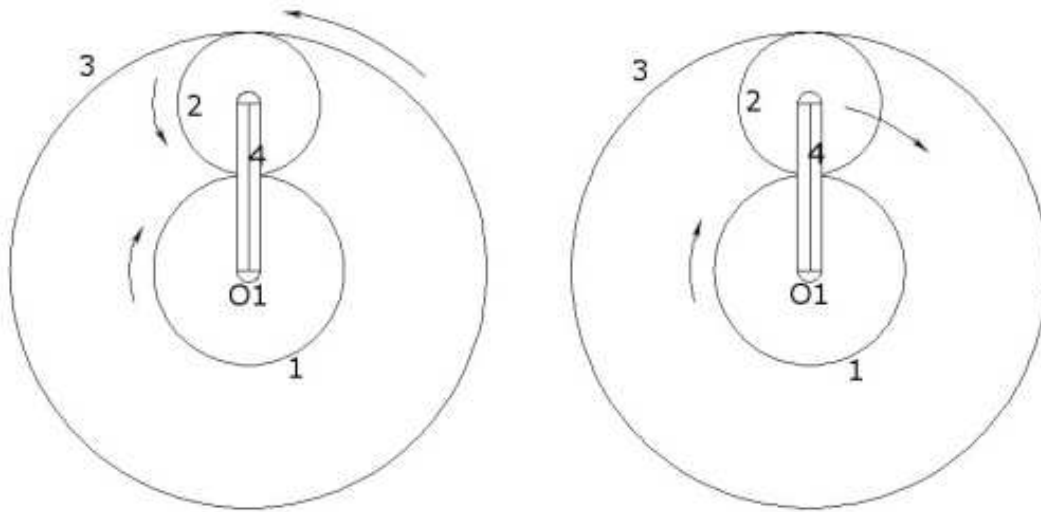


Figura 4.1: Rotismo a tre ruote con una ruota interna: a sinistra rotismo ordinario; a destra rotismo epicicloidale

tolare sia sulla primitiva della ruota 1, sia sulla primitiva (fissa) della ruota 3. L'asse della ruota due si sposta lungo una circonferenza  $O_1$  trascinando in rotazione attorno ad  $O_1$  il membro 4, che funge da cedente.

In un rotismo epicicloidale non esiste sempre una ruota fissa; in alcune fra le più importanti applicazioni, infatti, i rotismi epicicloidali sono sistemi a due gradi di libertà. In ogni caso un rotismo epicicloidale contiene ruote con assi mobili vincolate rotoidalmente ad un membro rotante attorno ad un asse fisso; a ciascuna di queste ruote si da il nome di satellite, mentre al membro al quale esse sono vincolate rotoidalmente si da il nome di portasatellite.

Ciò premesso, vediamo come si possano trovare le relazioni cinematiche fondamentali per i rotismi epicicloidali. Indicheremo con  $\Omega_i$  la velocità angolare della ruota  $i$ , mentre con  $\Omega_p$  indicheremo la velocità angolare del portasatellite. Si consideri un rotismo epicicloidale (ad esempio quello di Fig. 4.1 a destra).

Sia assuma come prima ruota del rotismo una delle ruote rotanti attorno ad un asse fisso; si individui la ruota con il numero 1. Le altre ruote siano individuate da numeri interi successivi, fino all'ultima ruota, che indichiamo con il numero  $n$  ( $n$  uguale a 3 in Fig. 4.1 a destra).

Siano  $\Omega_1$  e  $\Omega_n$  le velocità angolari della prima e dell'ultima ruota; per generalità le consideriamo per ora entrambe diverse da zero.

Supponiamo di porre in rotazione tutto il rotismo attorno all'asse di rotazione del portasatellite, con velocità angolare  $-\Omega_p$ , uguale in valore assoluto ma di verso opposto a quella del portasatellite. In questo modo il portasatellite resta fermo. Il rotismo diviene un rotismo ordinario. Le velocità angolari della prima e dell'ultima ruota divengono  $\Omega_1 - \Omega_p$  ed  $\Omega_n - \Omega_p$ . Indichiamo con  $\tau_0$  il rapporto di trasmissione in questo rotismo ordinario;  $\tau_0$  è dunque il rapporto fra la velocità angolare  $\Omega_n - \Omega_p$  dell'ultima ruota e la velocità angolare  $\Omega_1 - \Omega_p$  della prima ruota. Si ha cioè:

$$\tau_0 = \frac{\Omega_n - \Omega_p}{\Omega_1 - \Omega_p} \quad (4.1)$$

Questa formula è nota come Formula di Willis.

Nello studio dei rotismi a due gradi di libertà, ed in particolare dei rotismi differenziali, si presenta frequentemente il caso che una sola delle velocità dei 3 membri principali del rotismo sia nota. In tale caso la sola formula di Willis non permette, ovviamente, la completa soluzione del problema cinematico del rotismo.

Indichiamo con  $M_1$ ,  $M_n$ ,  $M_p$  i momenti applicati dall'esterno alla prima, all'ultima ed al portasatellite (che diviene telaio se il rotismo è ordinario). Se prescindiamo dalle perdite di potenza dovute alle forze interne di attrito possiamo scrivere:

$$M_1 d\vartheta_1 + M_n d\vartheta_n + M_p d\vartheta_p = 0 \quad (4.2)$$

Infatti, in condizioni ideali di assenza di attrito, la somma algebrica delle potenze motrici e resistenti deve essere uguale a zero.

Sapendo che  $\tau_0$  può essere scritta come:

$$\tau_0 = -\frac{z_1}{z_3} \quad (4.3)$$

dove i valori indicati con  $z$  sono il numero di denti, otteniamo, mediate una semplice uguaglianza, che:

$$z_1 d\vartheta_1 + z_3 d\vartheta_3 - (z_1 + z_3) d\vartheta_p = 0 \quad (4.4)$$

Mettendo a sistema le equazioni (4.2) e (4.4) possiamo dire che esiste  $\lambda$  tale che  $\lambda z_1 = M_1$ ,  $\lambda z_3 = M_3$  e  $-\lambda(z_1 + z_3) = M_p$ . Ne deriva che

$$\frac{M_1}{z_1} = \frac{M_3}{z_3} = -\frac{M_p}{z_1 + z_3} \quad (4.5)$$

# Capitolo 5

## Analisi del Sistema

### 5.1 Analisi del Sistema

In Fig. 5.1 è riproposto lo schema dettagliato del CVT. Ci proponiamo in questa sezione di semplificare lo schema adattandolo, non senza adeguate compensazioni, al sistema semplificato preso in considerazione per lo studio della trasmissione idraulica.

Volendo sfruttare le informazioni presenti nella Fig. 5.1, cerchiamo di ottenere una relazione che, per ogni ruota dentata, leghi raggio e numero di denti. A tal proposito supponiamo che i denti delle varie ruote dentate siano tutti uguali tra loro. Considerando la circonferenza pari a  $2\pi r$  (dove  $r$  è un generico raggio) e supponendo la larghezza massima di un dente  $x_d$  possiamo scrivere

$$\frac{2\pi r}{x_d} = N_d \quad (5.1)$$

dove  $N_d$  è il numero di denti. La stessa relazione può anche essere scritta come

$$\frac{x_d}{2\pi} N_d = r \quad (5.2)$$

I raggi presi in considerazione sono:

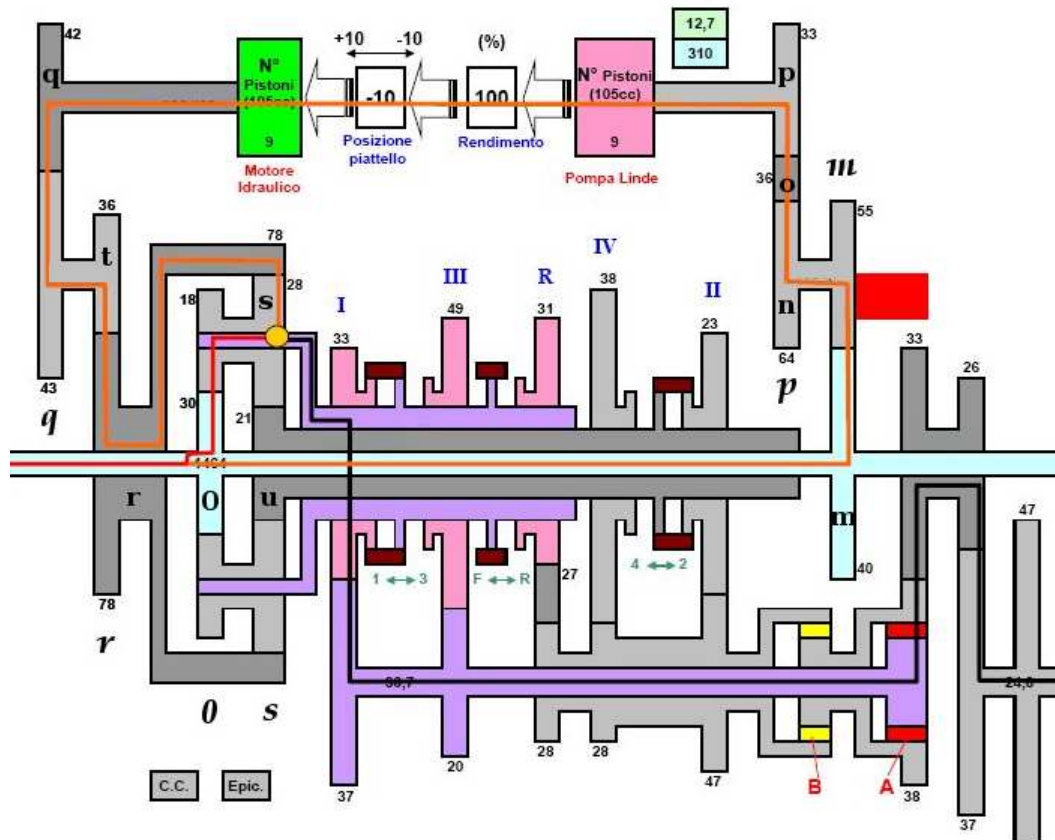


Figura 5.1: Realizzazione dettagliata dello schema CVT CNH

- $r_{mn}$  raggio del motore endotermico;
- $r_{op}$  raggio del motore idraulico;
- $r_{qt}$  raggio della pompa idraulica;
- $r_{r1}$  raggio esterno del ring;
- $r_{ri}$  raggio interno del ring;
- $r_{s1}$   $r_{s2}$  raggi dei satelliti;
- $r_0$  raggio del solare.

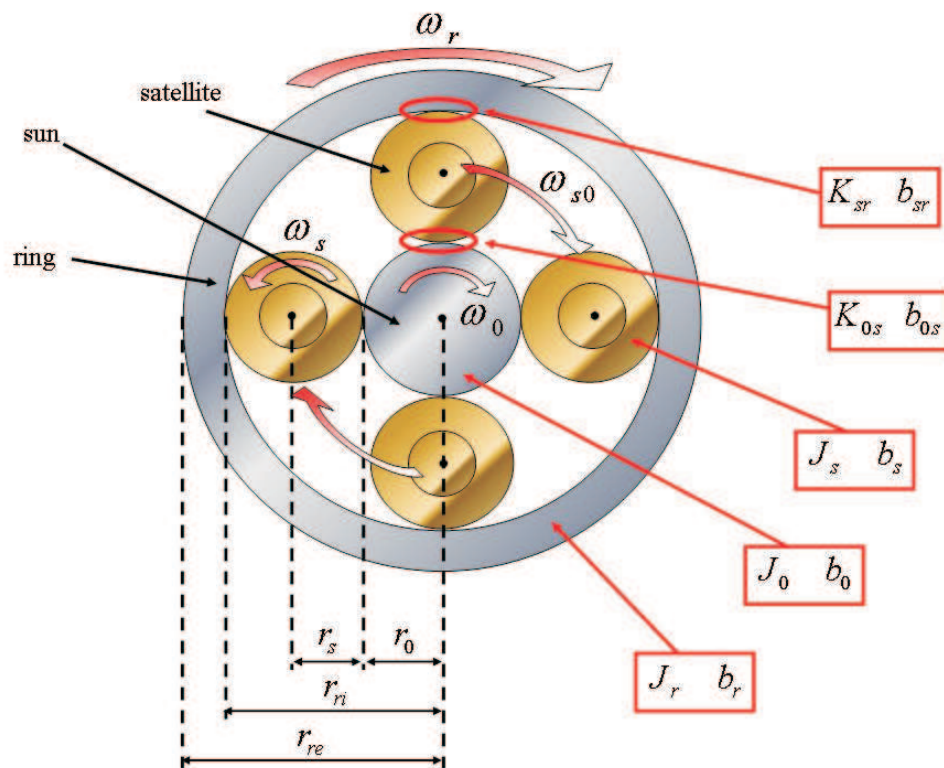


Figura 5.2: Visuale frontale del gruppo epicicloidale con definizione grandezze di sistema.

In Fig. 5.2 sono riportati tutti i raggi relativi al sistema epicicloidale.

In Fig. 5.1 abbiamo assegnato una lettera identificativa ad ogni ruota dentata di nostro interesse. È possibile affermare che il passo di ogni dente (quindi anche il relativo profilo) è identico per ruote dentate che interagiscono direttamente tra loro. Queste osservazioni consentono di identificare sei diversi passi che indichiamo con  $xd$  seguito dalla lettera che caratterizza la ruota dentata direttamente collegata ad uno dei punti nevralgici del sistema ( $m$  - motore endotermico,  $p$  - pompa idraulica,  $q$  - motore idraulico,  $r$  - ring,  $s$  - satellite,  $0$  - solare).

Un'ulteriore semplificazione consiste nel considerare una ruota dentata al pari di un cilindro omogeneo di massa  $M$ , raggio  $R$  e altezza  $H$  (per cui  $M = \rho\pi R^2 H$ ). Se si considera tale corpo come un sistema di punti materiali ciascuno caratterizzato da un volume  $\Delta V$  ed una massa  $\Delta m = \rho\Delta V$  (dove  $\rho$  è la densità), si può estendere la definizione di momento d'inerzia anche ad un corpo rigido di volume  $V$ . Il contributo di tale elemento di volume al momento di inerzia è dato da  $\Delta I_z = \rho\Delta V r^2$  (essendo  $r$  la distanza dell'elemento dall'asse di rotazione). Il momento di inerzia si ottiene sommando tutti i contributi e passando al continuo. Per  $\Delta V \rightarrow 0$  otteniamo:

$$I_z = \int_V \rho r^2 dV \quad (5.3)$$

Se il corpo è omogeneo (la sua densità è quindi una funzione costante) ed è caratterizzato da particolari simmetrie, allora il calcolo dell'integrale risulta particolarmente semplice. La misura del generico elemento di volume mostrato in Fig. 5.3 è data da  $Hrdrd\theta$  e il momento di inerzia rispetto all'asse del cilindro è dato da:

$$I_z = \int_0^R \rho r^2 H 2\pi r dr = 2\rho\pi H \int_0^R r^3 dr = \frac{\pi\rho H R^4}{2} = \frac{MR^2}{2} \quad (5.4)$$

In ultimo, considerando un coefficiente di proporzionalità  $k_b$  tra il coeffi-

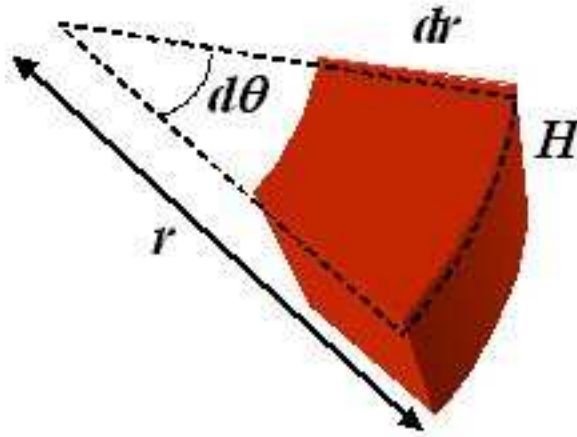


Figura 5.3: Elemento volumetrico

ciente di attrito  $b$  ed l'inerzia  $J$  di una ruota, possiamo ottenere tutti i valori di attrito sfruttando la relazione  $b = k_b J$ .

## 5.2 Riduzione del sistema

Riportiamo di seguito gli schemi POG che descrivono le riduzioni presenti nel sistema completo. Successivamente, semplifichiamo gli schemi POG riportati in Fig. 5.4 e in Fig. 5.5 facendo collassare alcune delle ruote dentate che chiamiamo secondarie (le ruote contrassegnate dalle lettere  $n$ ,  $o$ ,  $t$ ). Questa operazione riduce gli schemi sopracitati come mostrato in Fig. 5.6 e in Fig. 5.7 e consente, inoltre, di ricavare i valori equivalenti di inerzia, raggio e attrito.

Valori equivalenti di inerzia, raggio e attrito:

$$J_{mn} = J_m + J_n \left( \frac{N_m}{N_{n1}} \right)^2 \quad (5.5)$$

$$J_{op} = J_p + J_o \left( \frac{N_p}{N_o} \right)^2 \quad (5.6)$$

$$J_{qt} = J_q + J_t \left( \frac{N_q}{N_{t1}} \right)^2 \quad (5.7)$$

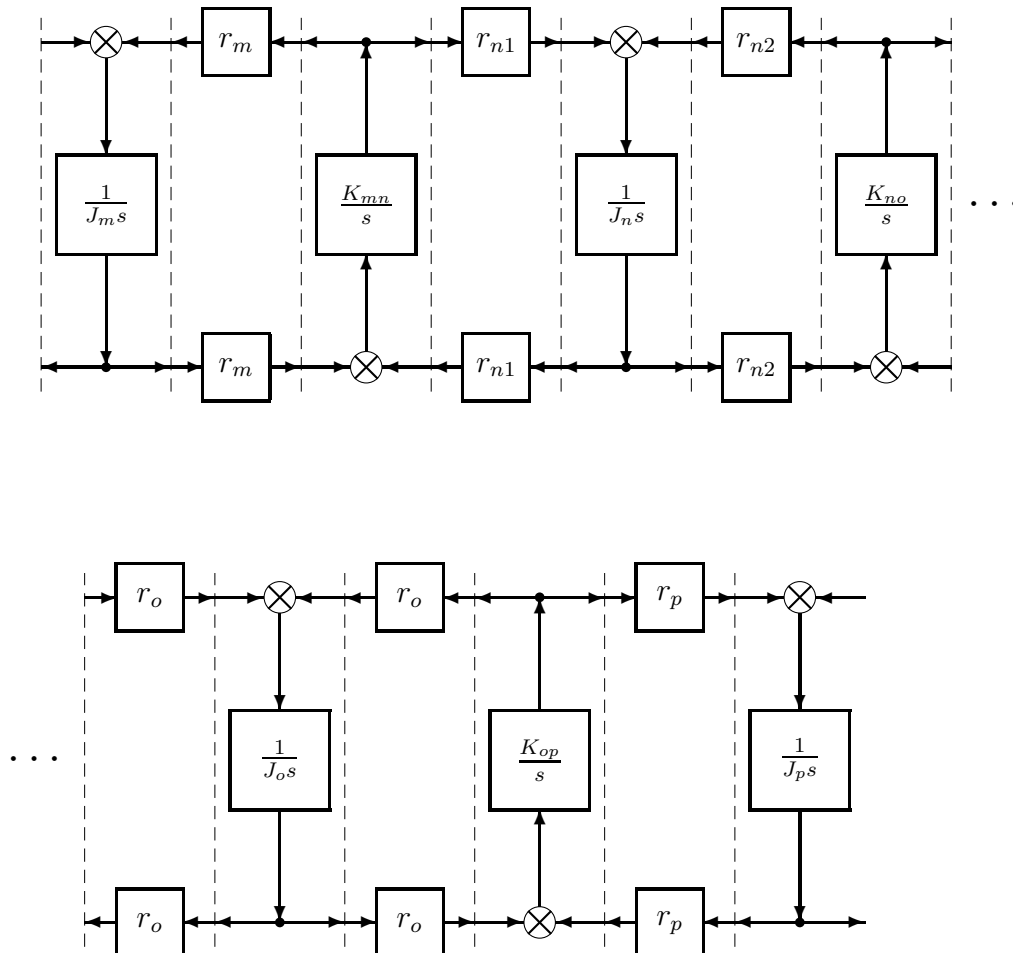


Figura 5.4: Schema POG del sistema di ingranaggi che lega motore endotermico e pompa idraulica.

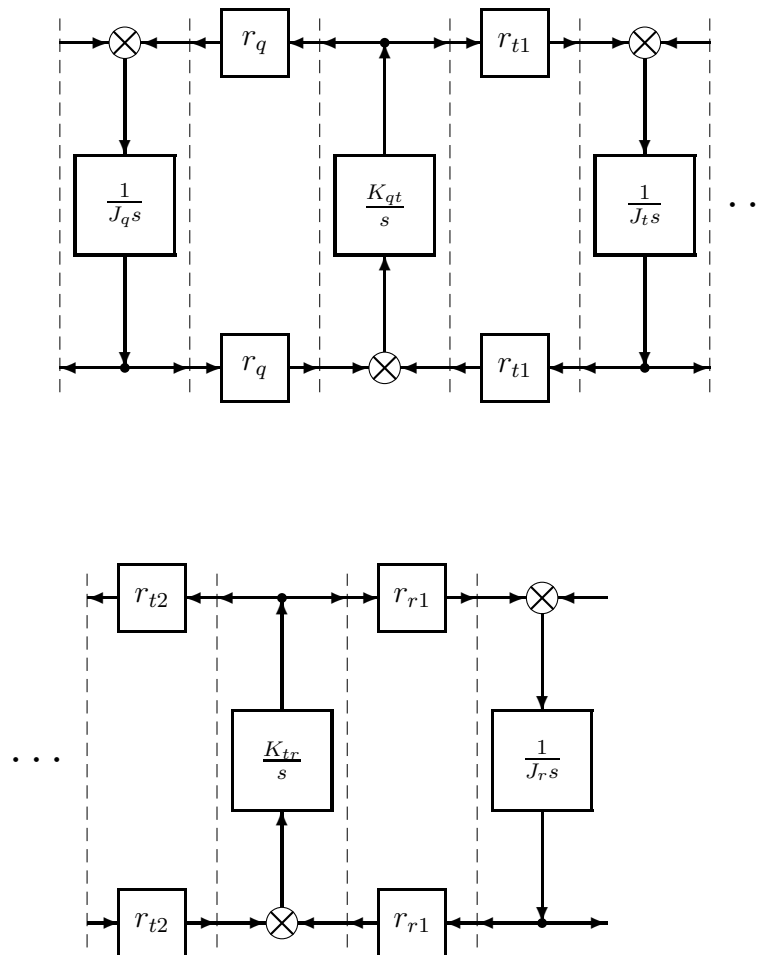


Figura 5.5: Schema POG del sistema di ingranaggi che lega motore idraulico e gruppo epicicloidale.

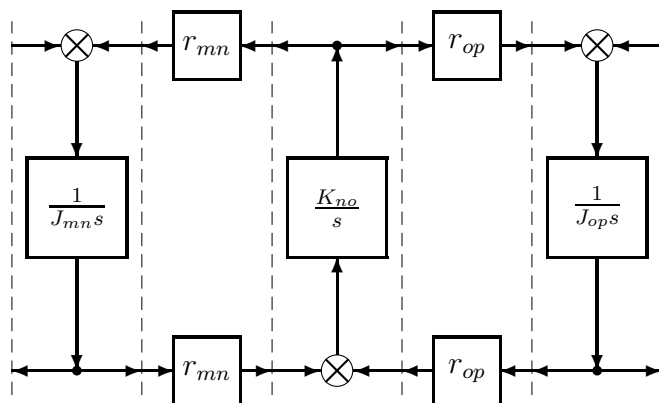


Figura 5.6: Schema POG ridotto del sistema di ingranaggi che lega motore endotermico e pompa idraulica.

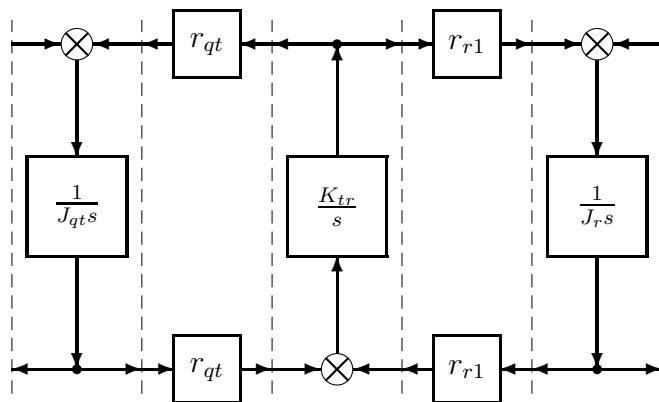


Figura 5.7: Schema POG ridotto del sistema di ingranaggi che lega motore idraulico e gruppo epicicloidale.

$$r_{mn} = \frac{N_m}{N_{n1}} r_{n2} \quad (5.8)$$

$$r_{op} = \frac{N_p}{N_o} r_o \quad (5.9)$$

$$r_{qt} = \frac{N_q}{N_{t1}} r_{t2} \quad (5.10)$$

$$b_{mn} = b_m + b_n \left( \frac{N_m}{N_{n1}} \right)^2 \quad (5.11)$$

$$b_{op} = b_p + b_o \left( \frac{N_p}{N_o} \right)^2 \quad (5.12)$$

$$b_{qt} = b_q + b_t \left( \frac{N_q}{N_{t1}} \right)^2 \quad (5.13)$$

### 5.3 Simulazioni Sistema Completo e Sistema Ridotto

Avendo ricondotto il sistema generale al sistema analizzato per lo sviluppo del progetto, ne simuliamo il funzionamento per verificare che vi sia corrispondenza tra il sistema completo ed il sistema ridotto equivalente. In Fig. 5.8 e in Fig. 5.9 sono mostrate rispettivamente le velocità angolari delle singole ruote dentate che compongono il sistema. Nel primo caso la simulazione stata eseguita con angolazione del piattello paria a  $\theta = -15$  gradi, nel secondo caso l'angolazione del piattello è stata portata a  $\theta = 40$  gradi. L'andamento delle curve non presenta alcun genere di disturbo essendo questo un sistema ideale, quindi con elasticità nulla e infinitamente rigido. Le due figure mettono in evidenza differenti velocità angolari.

In Fig. 5.10 e in Fig. 5.12 sono messe a confronto le simulazioni risultanti dal sistema ridotto equivalente e dal sistema generale (Reale). Come in precedenza, per le simulazioni si usano diverse angolazioni del piattello ( $\theta = -15$  gradi e  $\theta = 40$  gradi). Il lieve disturbo iniziale (transitorio) è dato dal fatto che

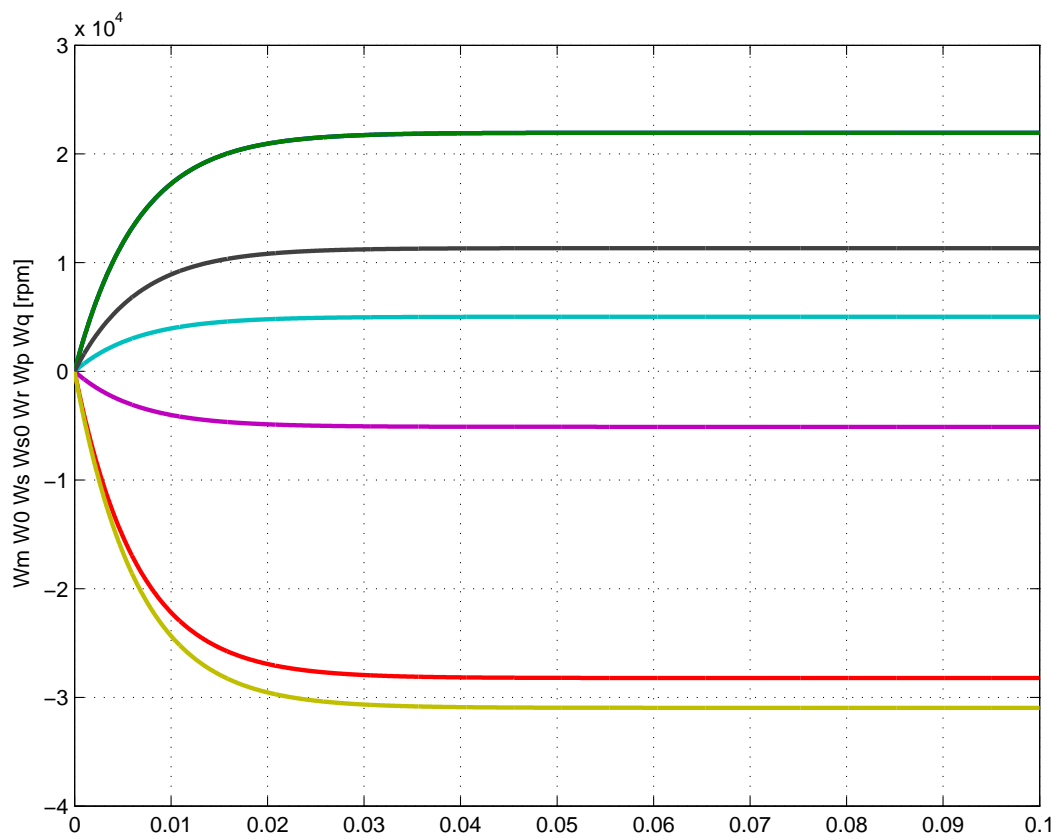


Figura 5.8: Velocità angolari delle singole ruote dentate nel sistema ridotto (angolo  $\theta = -15$  gradi)

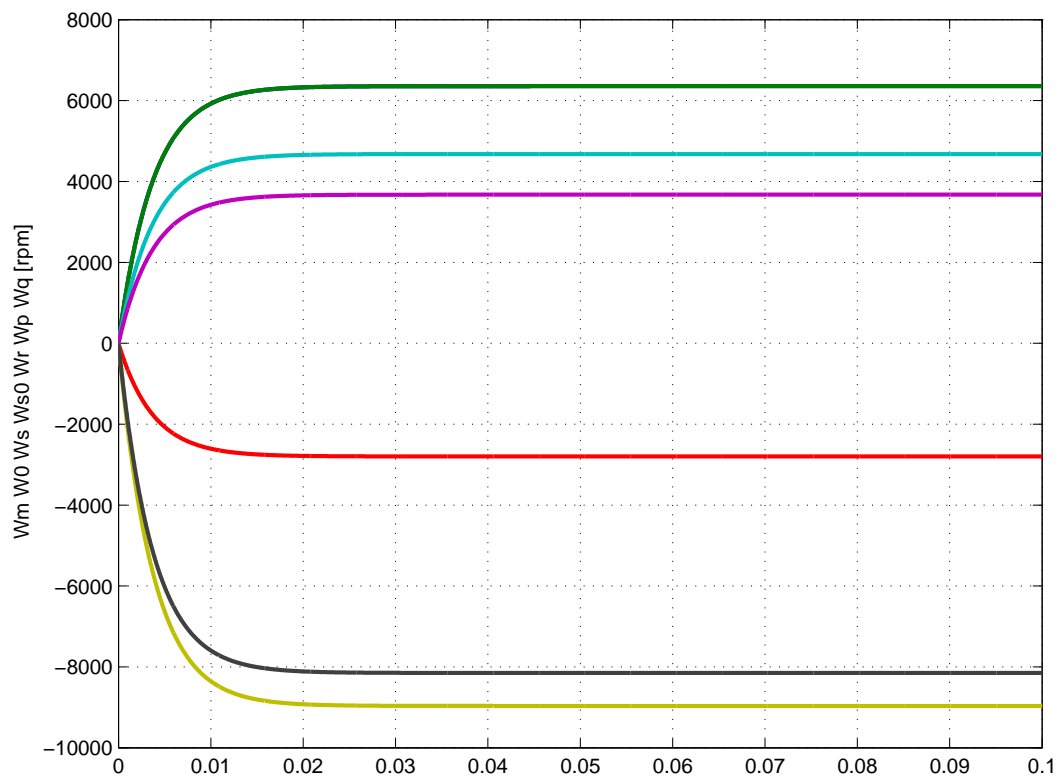


Figura 5.9: Velocità angolari delle singole ruote dentate nel sistema ridotto (angolo  $\theta = 40$  gradi)

per simulare l'infinita rigidità si è sostituito un valore molto grande, quindi non realmente infinito. In Fig. 5.11 e in Fig. 5.13 un particolare che evidenzia i differenti andamenti dei due sistemi nel transitorio.

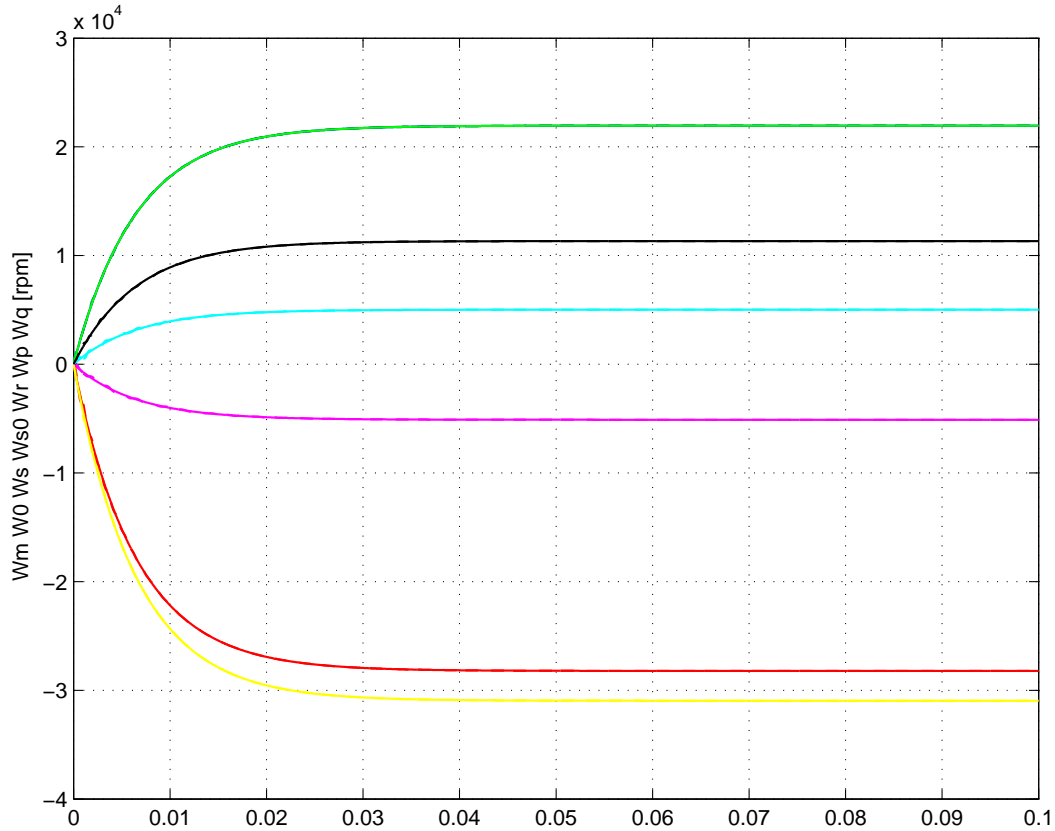


Figura 5.10: Confronto delle velocità angolari delle singole ruote dentate tra sistema ridotto e sistema completo (angolo  $\theta = -15$  gradi)

La Fig. 5.14 evidenzia la funzione che è stata scelta per far variare l'angolazione del piattello durante la simulazione del sistema.

Inizialmente il piattello assume angolazione pari a  $\theta = -15$  gradi, all'istante  $T_1 = 0.04$  secondi il piattello inizia a variare la sua posizione seguendo una funzione lineare, fino a raggiungere  $\theta = 40$  gradi all'istante  $T_2 = 0.05$  secondi. La graficazione che ne scaturisce è mostrata in Fig. 5.15 per il sistema ridotto-

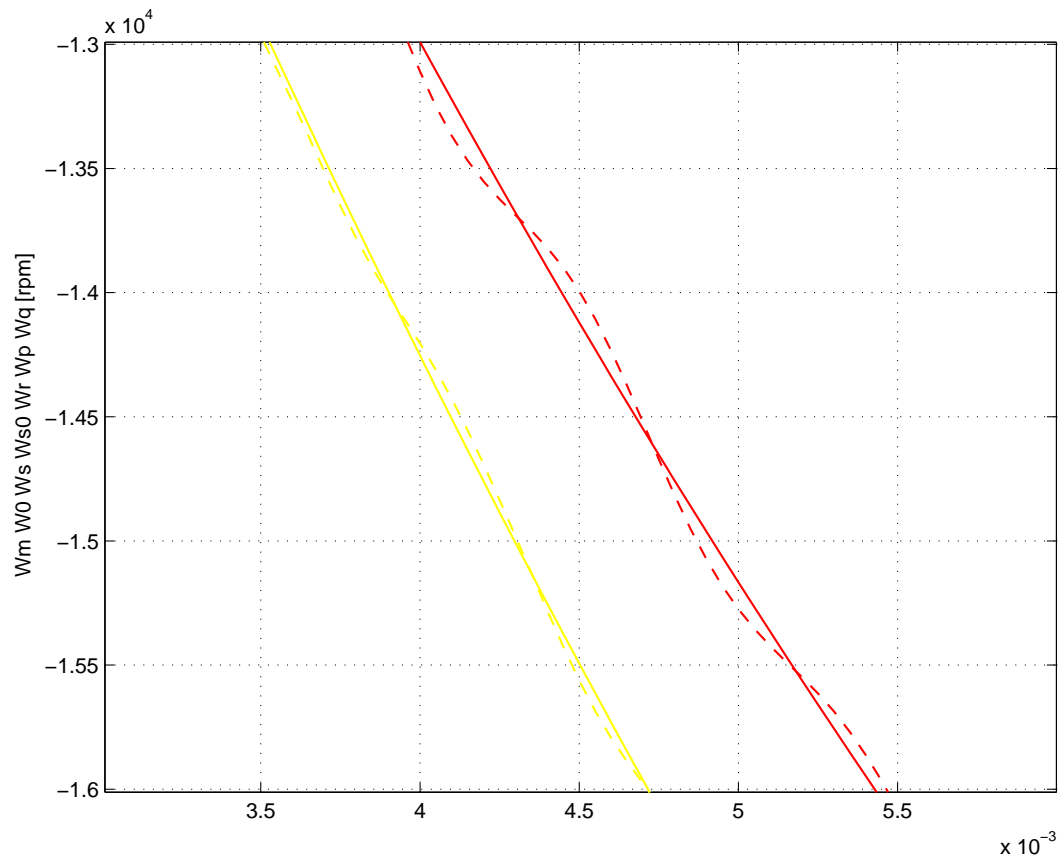


Figura 5.11: Particolare della Fig. 5.10

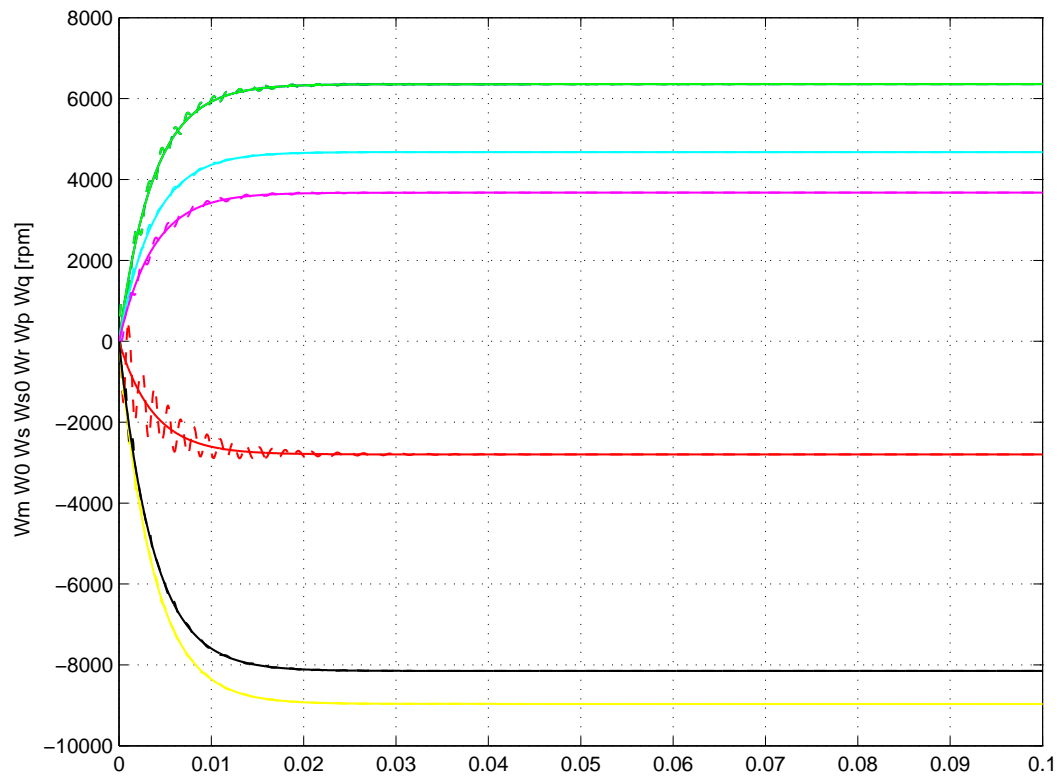


Figura 5.12: Confronto delle velocità angolari delle singole ruote dentate tra sistema ridotto e sistema completo (angolo  $\theta = 40$  gradi)

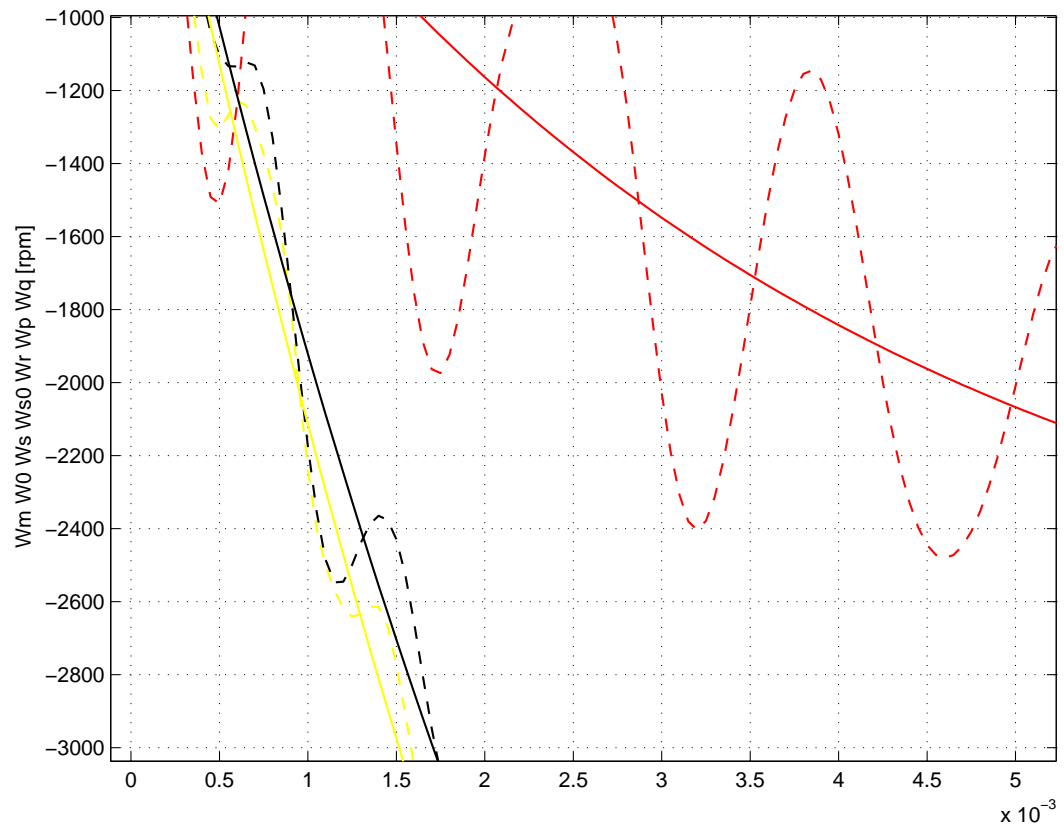


Figura 5.13: Particolare della Fig. 5.12

to equivalente, mentre la Fig. 5.16 evidenzia il confronto tra sistema ideale e sistema reale. Come mostrato in Fig. 5.17 ed evidenziato nel particolare di seguito proposto in Fig. 5.19, i due grafici discostano significativamente l'uno dall'altro se si considera una variazione in corso dell'angolazione del piattello. Per ovviare a questo problema, lo schema POG che è stato adottato per eseguire la simulazione del sistema ridotto è quello mostrato in Fig. 2.15, dove è stato aggiunto un blocco corrispondente alle derivata prima dell'inerzia diviso 2 ( $\frac{j}{2}$ ). In Fig. 5.18 è mostrato un particolare del transitorio durante la variazione dell'angolazione del piattello.

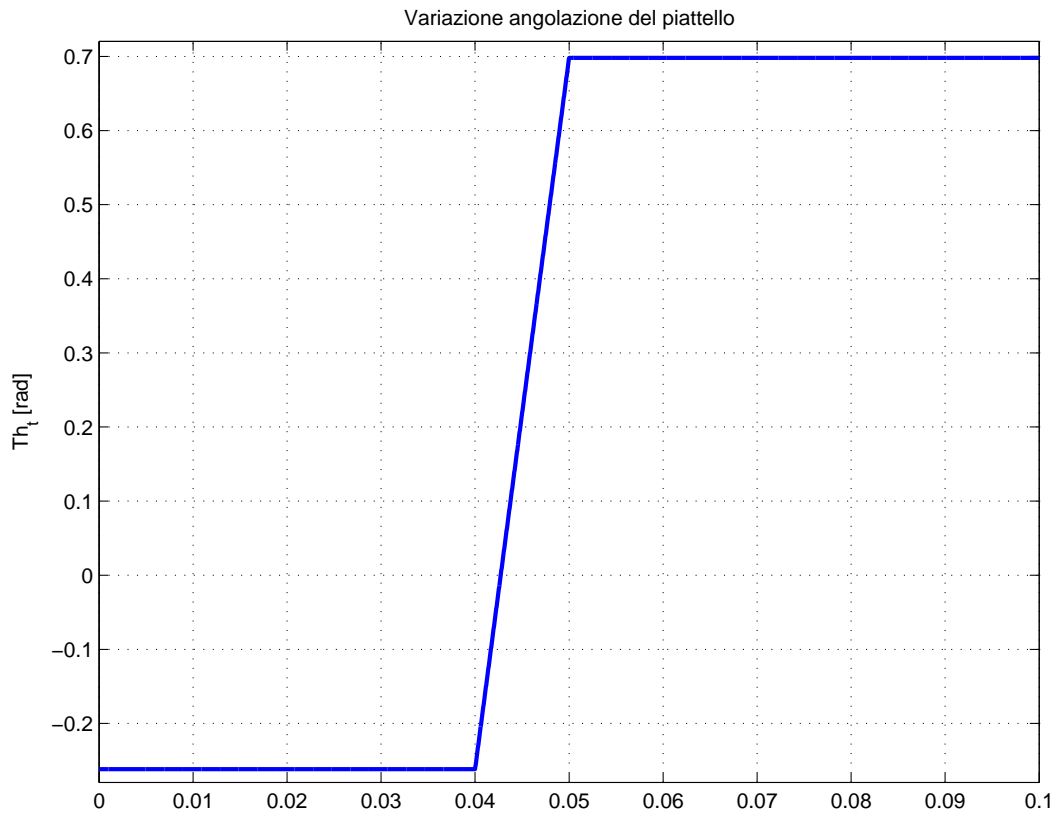


Figura 5.14: Grafico indicativo della variazione dell'angolazione del piattello

Le Fig. 5.20 e Fig. 5.21 descrivono rispettivamente l'andamento dell'inerzia equivalente e dell'attrito equivalente al variare dell'angolazione  $\theta$  (compresa

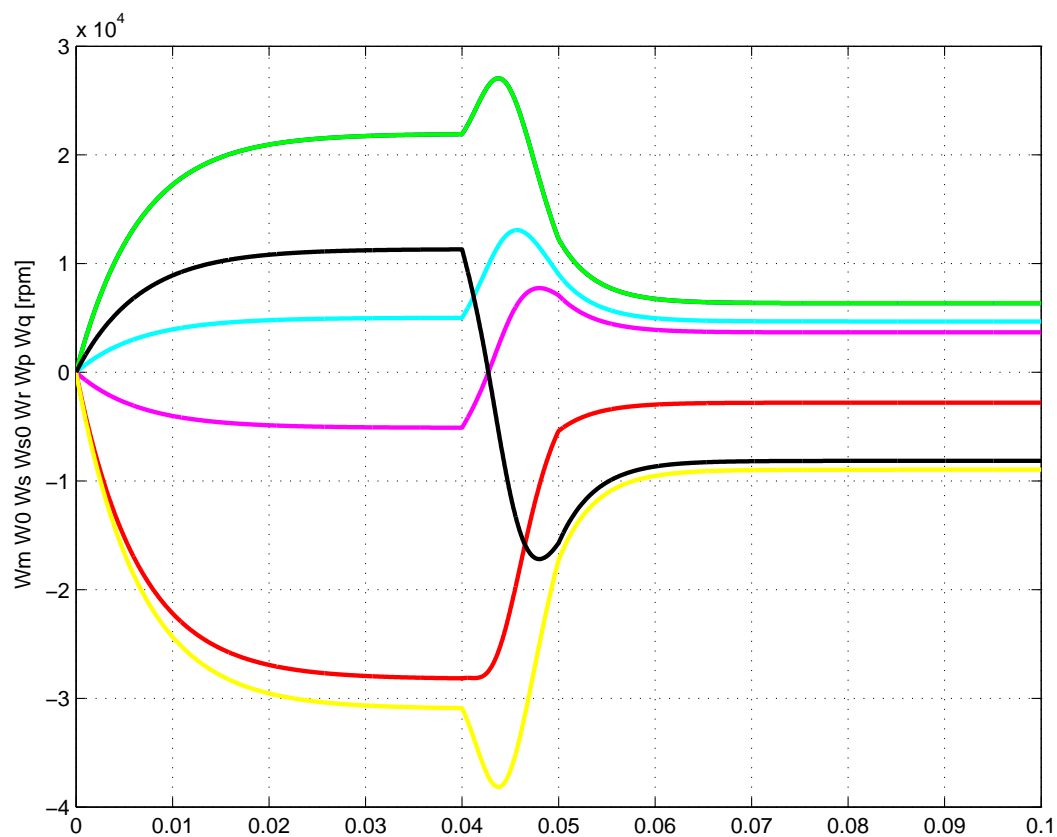


Figura 5.15: Velocità angolari delle singole ruote dentate nel sistema ridotto. Variazione dell'angolazione del piattello da  $\theta = -15$  gradi a  $\theta = 40$  gradi

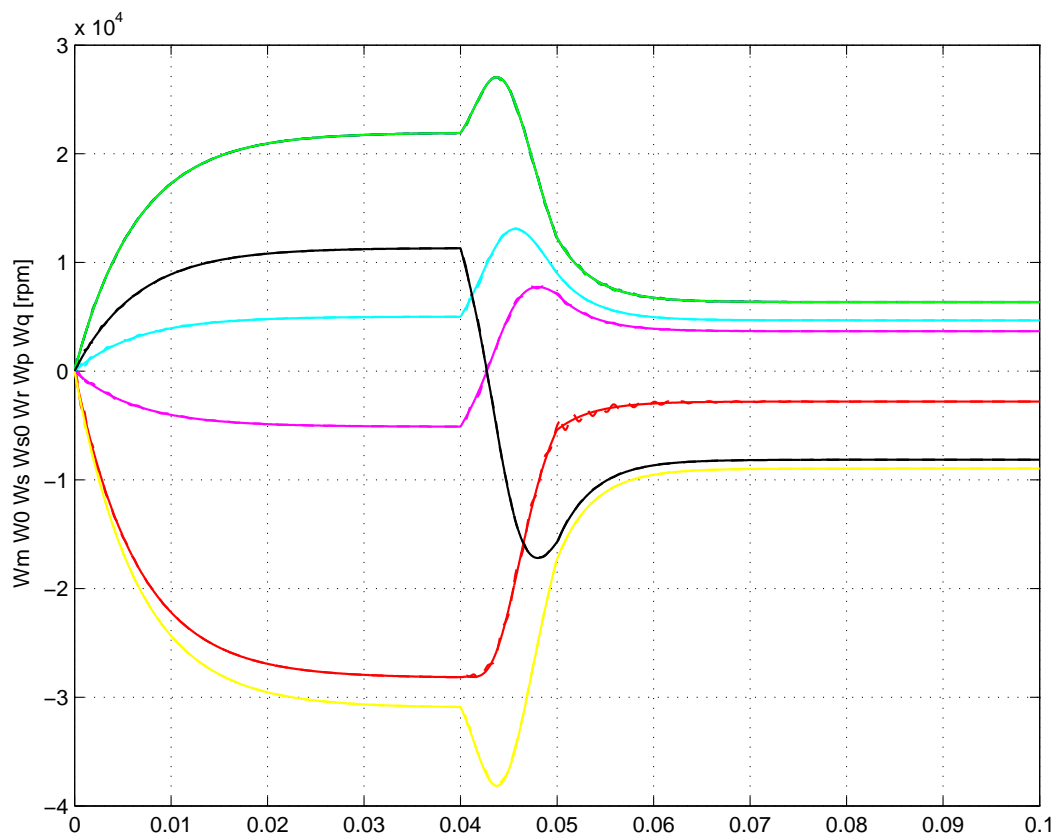


Figura 5.16: Confronto delle velocità angolari delle singole ruote dentate, tra sistema ridotto e sistema completo. Variazione dell'angolazione del piattello da  $\theta = -15$  gradi a  $\theta = 40$  gradi

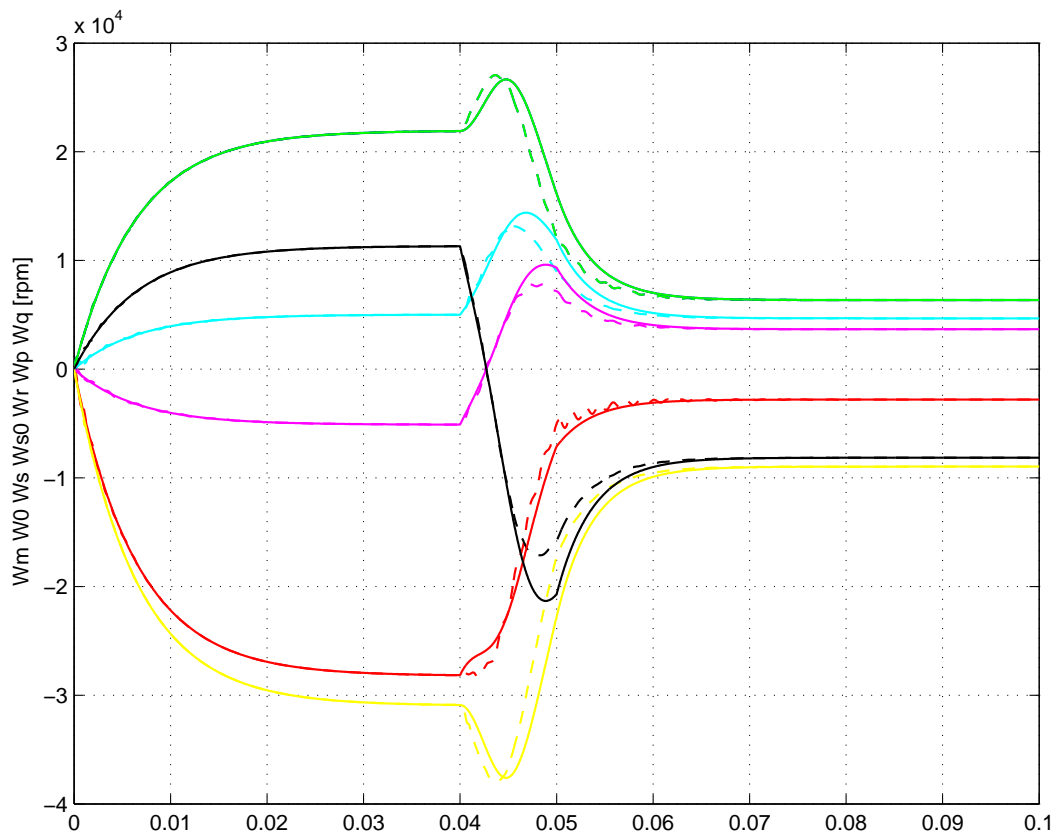


Figura 5.17: Confronto delle velocità angolari delle singole ruote dentate, tra sistema ridotto privo del blocco  $\frac{J}{2}$  e sistema completo. Variazione dell'angolazione del piattello da  $\theta = -15$  gradi a  $\theta = 40$  gradi

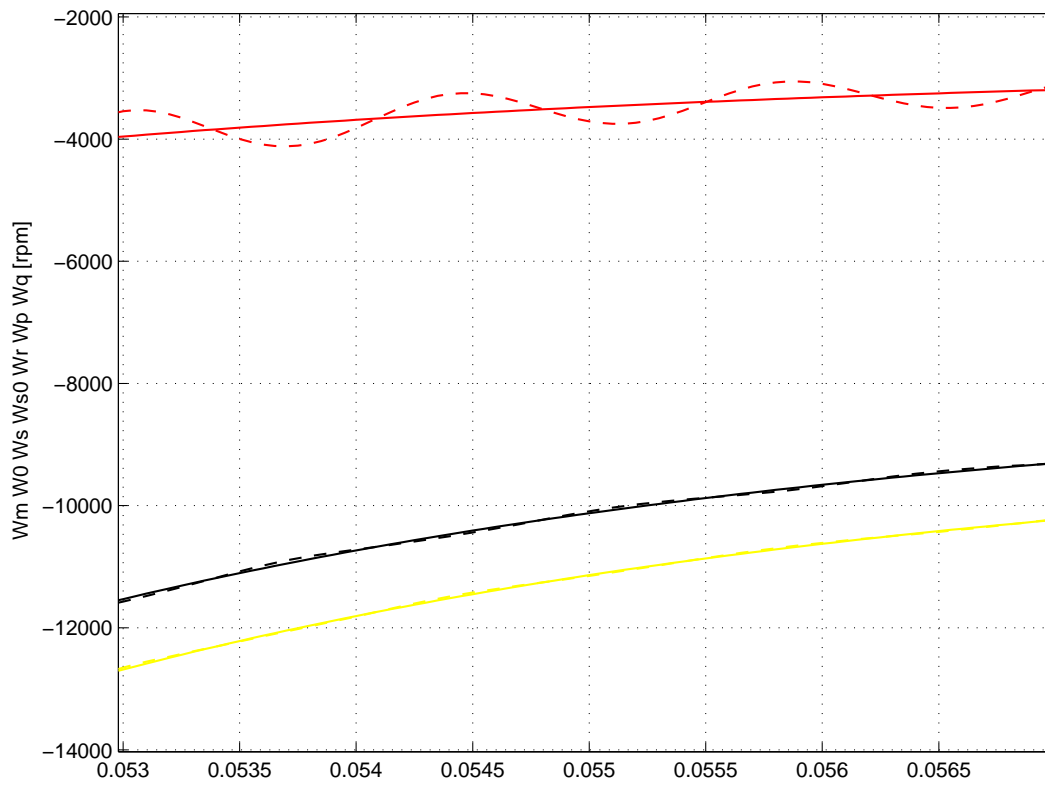


Figura 5.18: Particolare della Fig. 5.16

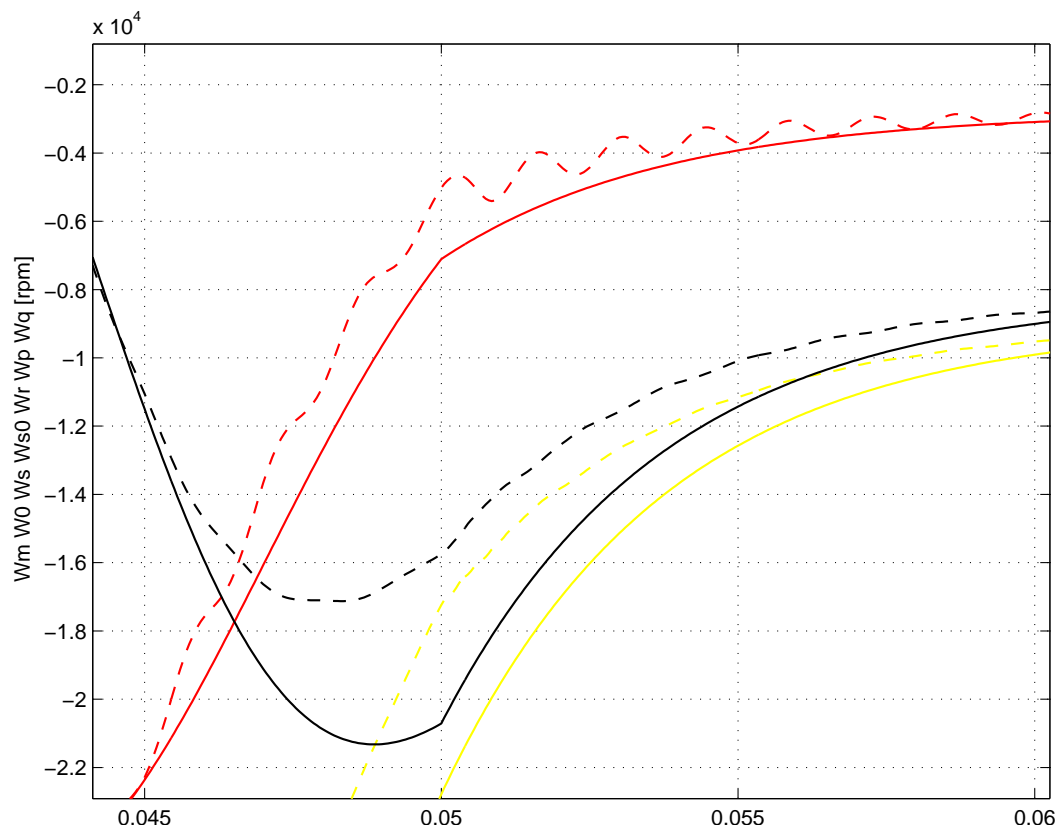


Figura 5.19: Particolare della Fig. 5.17

tra  $-\frac{\pi}{4}$  e  $\frac{\pi}{4}$  radianti) del piattello. Le due funzioni crescono con l'aumentare dell'angolo. La Fig. 5.22 mostra la relazione che intercorre tra l'inerzia equivalente e l'attrito equivalente. L'angolo utilizzato per le simulazioni è  $\theta = 25$  gradi.

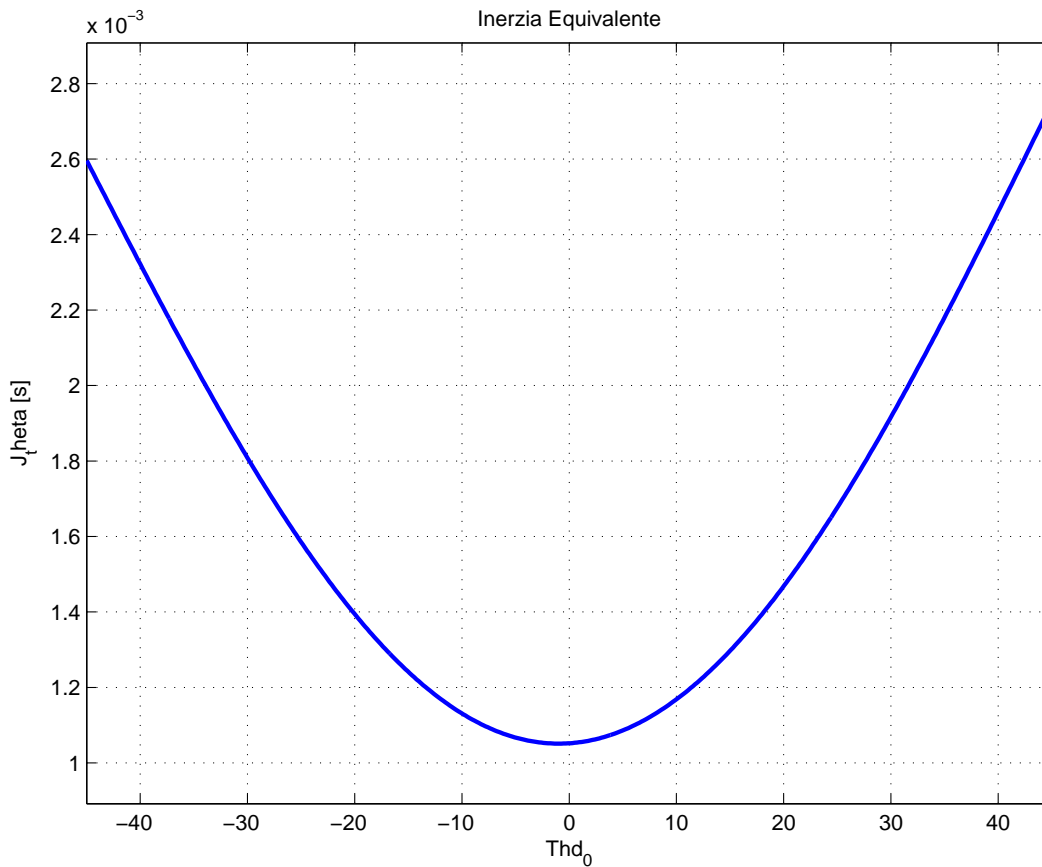


Figura 5.20: Andamento Inerzia equivalente

In ultimo, in Fig. 5.23 è evidenziato il rapporto di trasmissione al variare dell'angolo  $\theta$  del piattello. È immediato notare che la funzione che descrive quest'andamento è continua, come continua deve essere la trasmissione di coppia del sistema CVT (Continuous Variable Transmission) al terreno. Il punto della funzione corrispondente a  $-41,71$  gradi evidenzia la posizione che

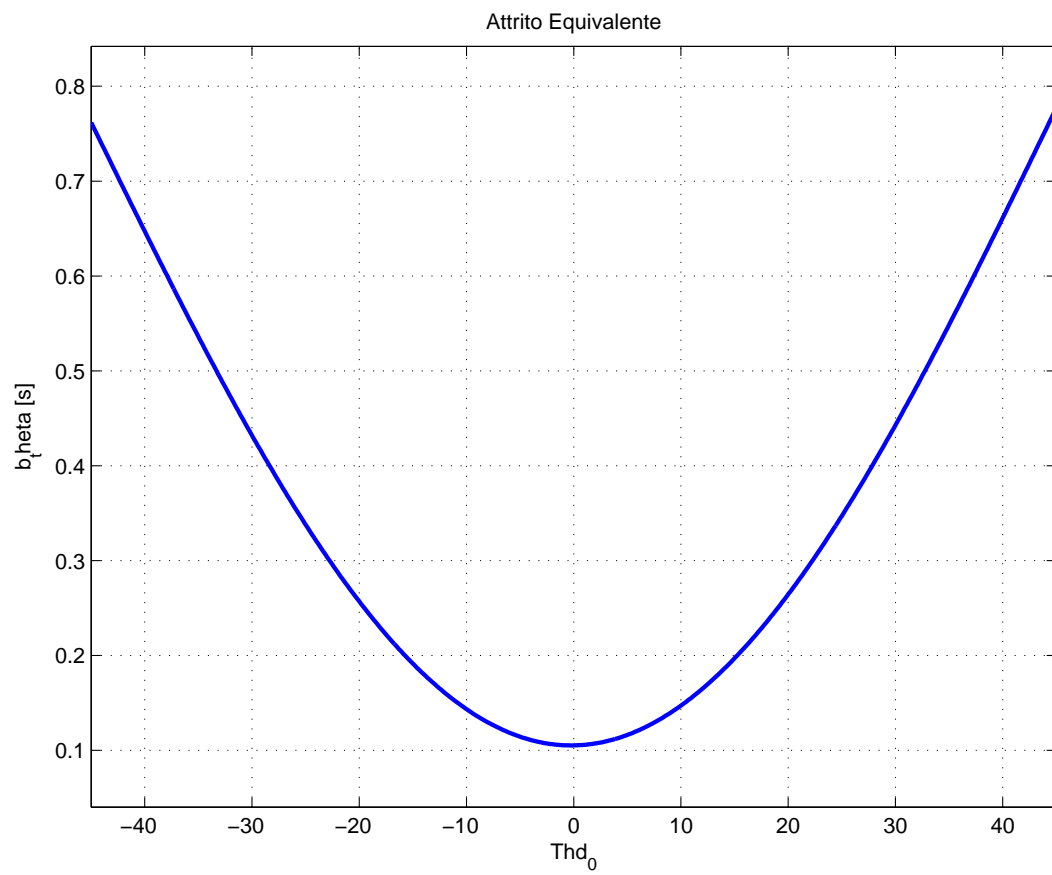


Figura 5.21: Andamento Attrito equivalente

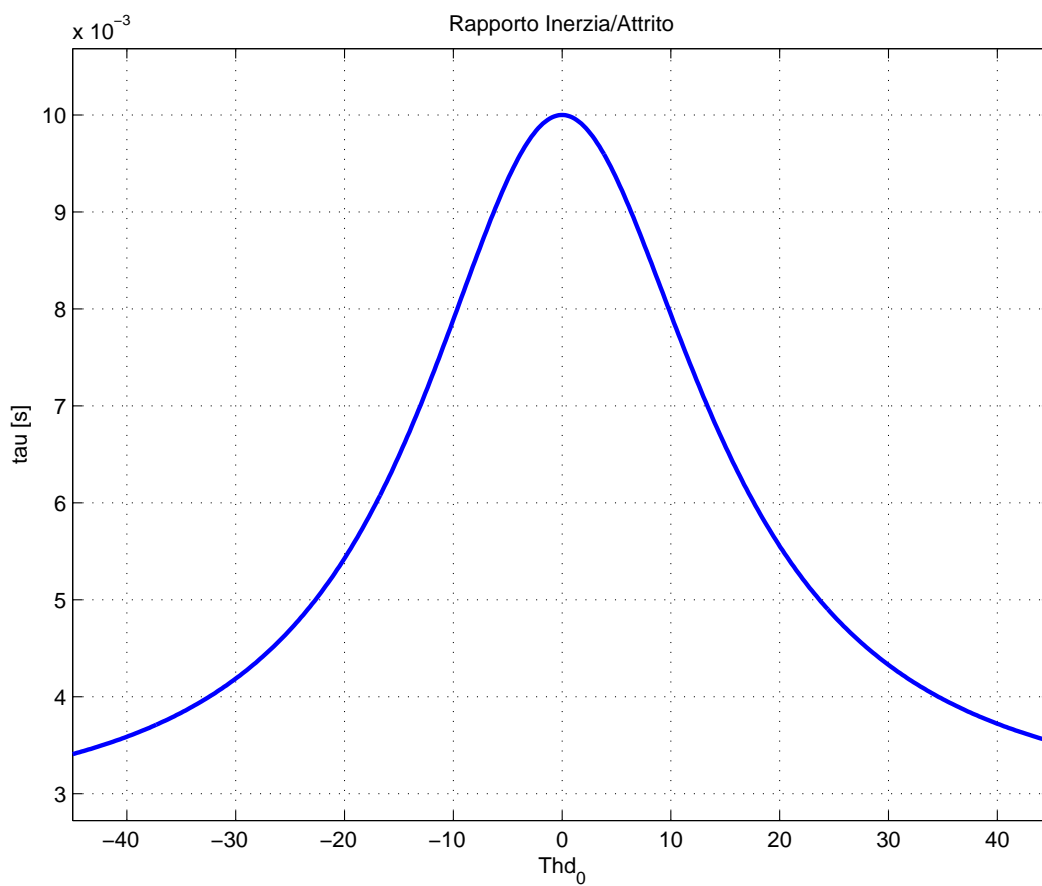


Figura 5.22: Rapporto tra inerzia equivalente e attrito equivalente

il piattello deve ottenere perchè la macchina agricola sia ferma.

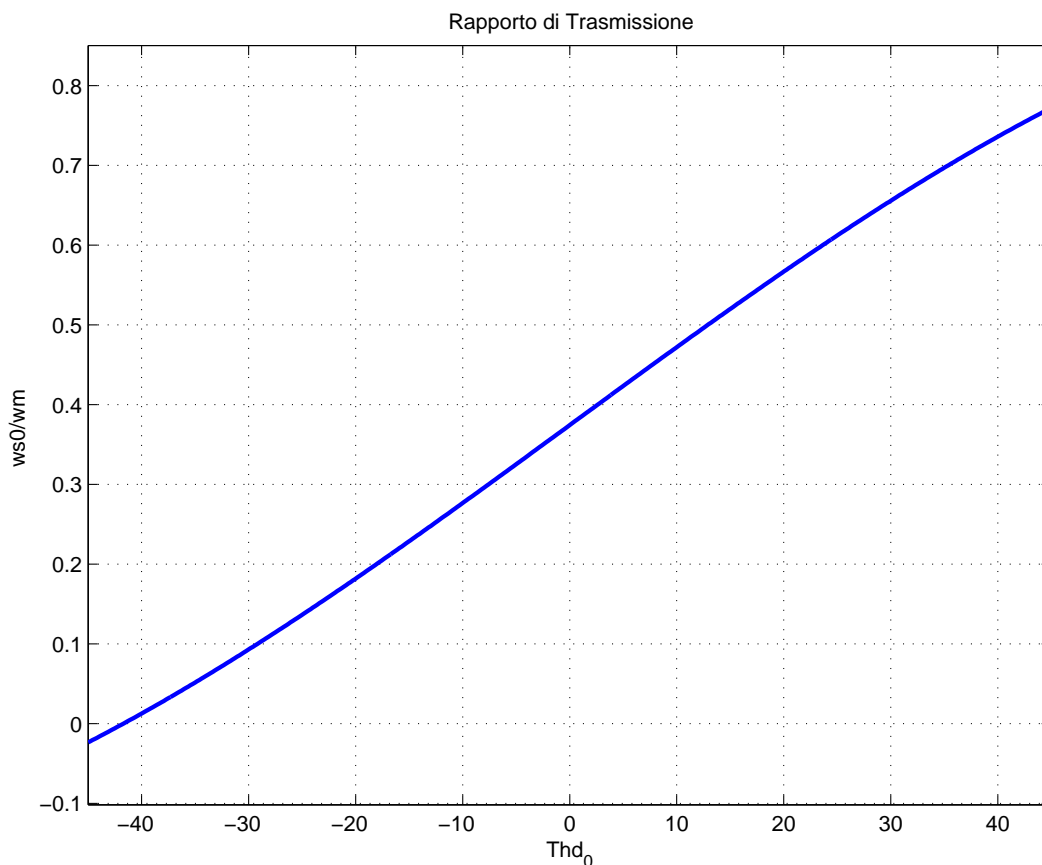


Figura 5.23: Rapporto di trasmissione

Di seguito è proposta una simulazione che prevede un sistema non ideale. Al precedente circuito è stato applicato un carico (dettato dal peso del mezzo) e delle funzioni descrivono le caratteristiche dello pneumatico. Non essendo un sistema infinitamente rigido, i grafici presentano un andamento ondulatorio per un breve lasso di tempo, fino ad assestarsi su un valore finale. In Fig. 5.24 e in Fig. 5.25 sono evidenziati gli andamenti delle velocità angolari di ogni ruota dentata considerata nel sistema CVT. Il numero di giri motore evidenziato nella simulazione è negativo o positivo a seconda che la ruota dentata muova in senso

orario o antiorario. Le successive Fig. 5.26 e Fig. 5.27 mostrano la pressione idraulica che agisce sul sistema (il segno della stessa dipende dall'angolazione del piattello), la velocità raggiunta dal mezzo nel tempo di simulazione, la componente forza e lo scivolamento degli pneumatici.

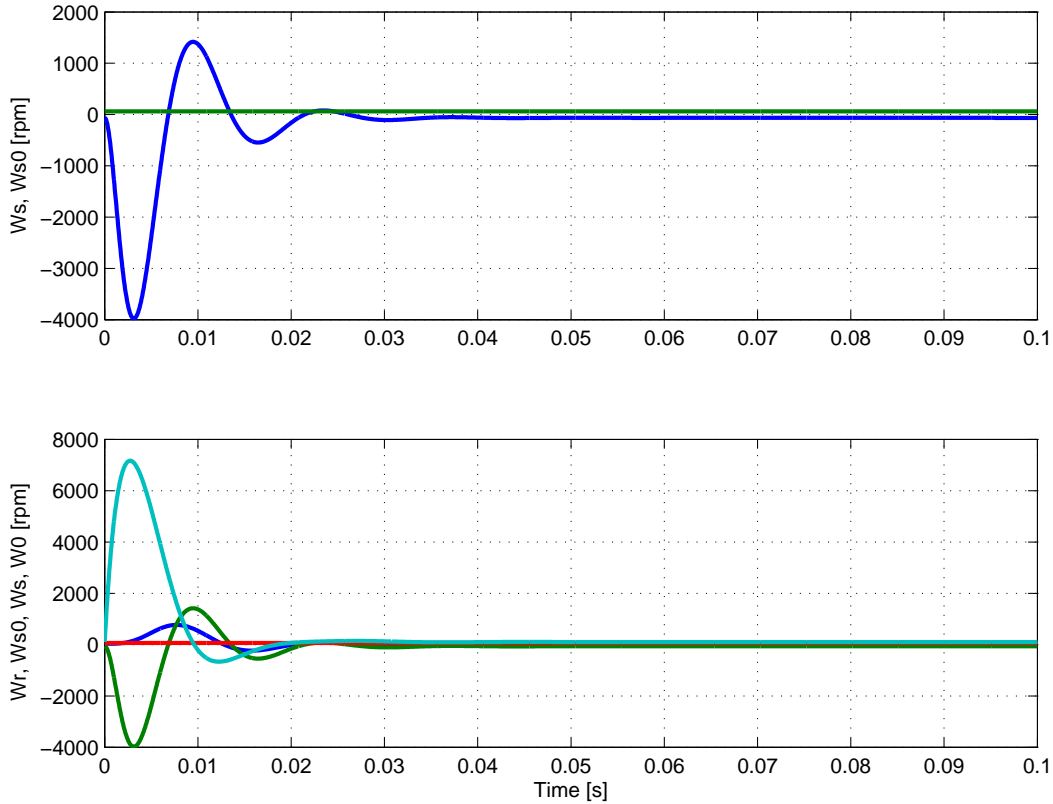


Figura 5.24: Velocità angolari di pompa idraulica, motore endotermico e solare nella simulazione in alto. Velocità angolari di motore idraulico e ring nella simulazione in basso.

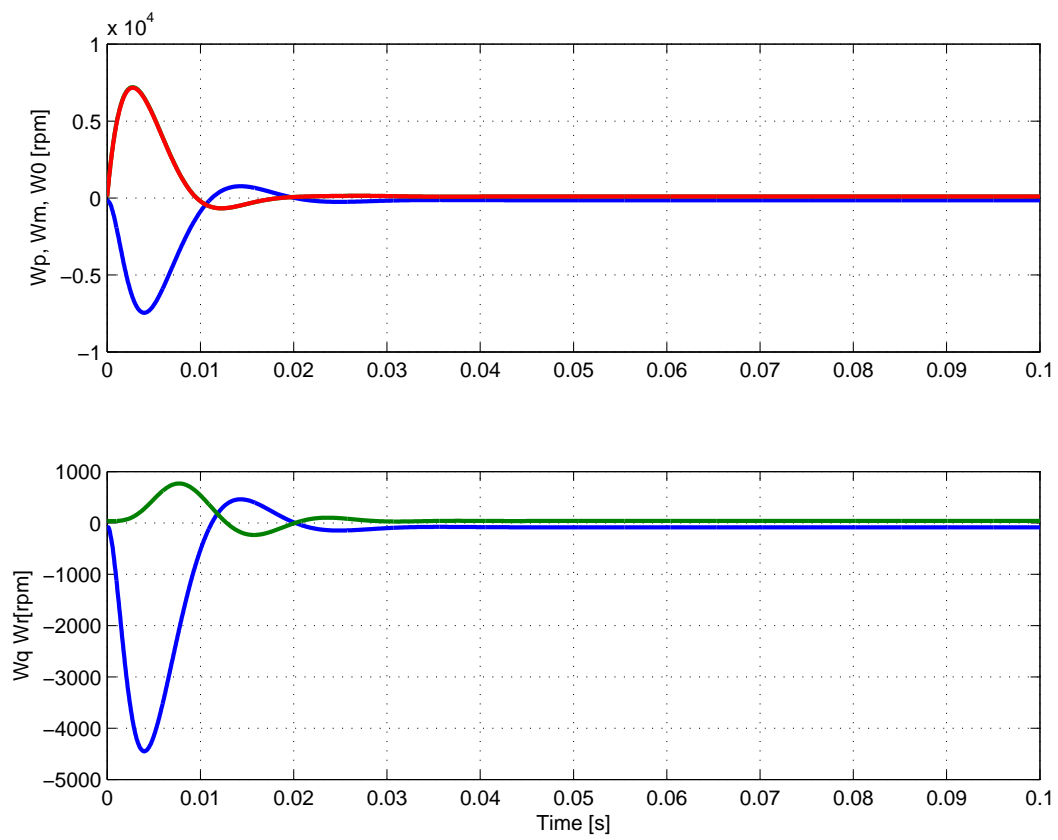


Figura 5.25: Velocità angolari di satelliti e portasatelliti nella simulazione in alto. Velocità angolari di satelliti, portasatelliti, ring e solare nella simulazione in basso.

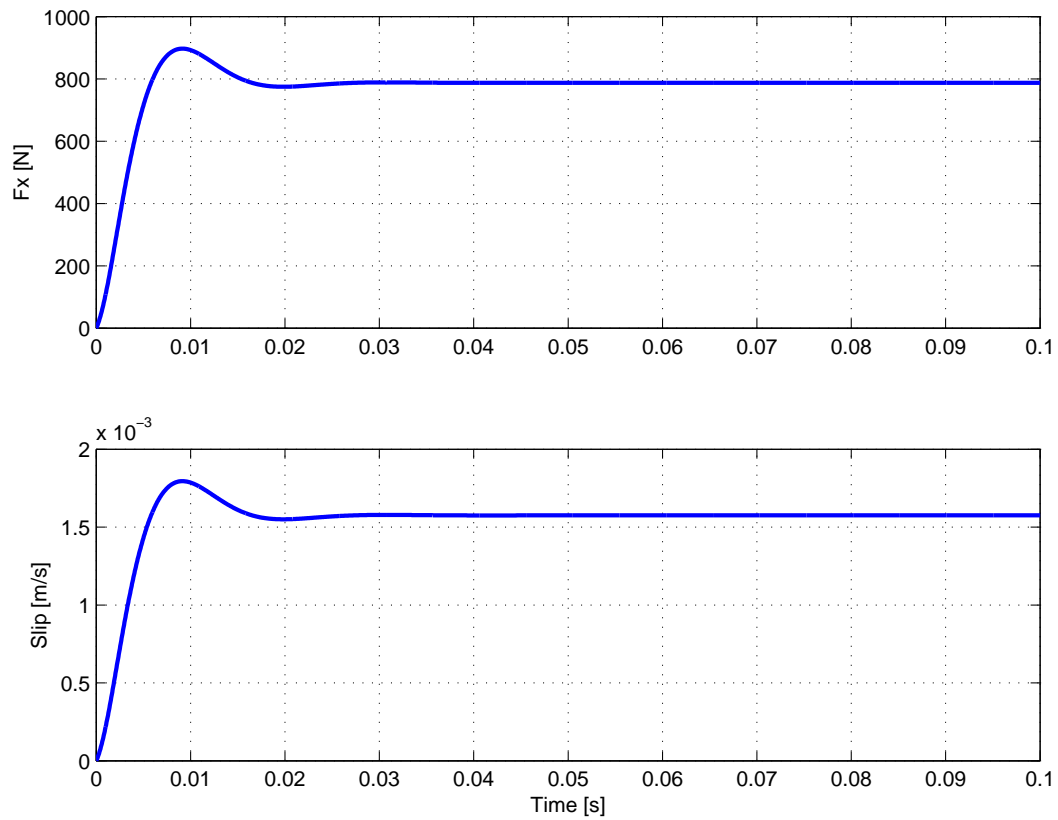


Figura 5.26: Scivolamento della ruota e forza agente

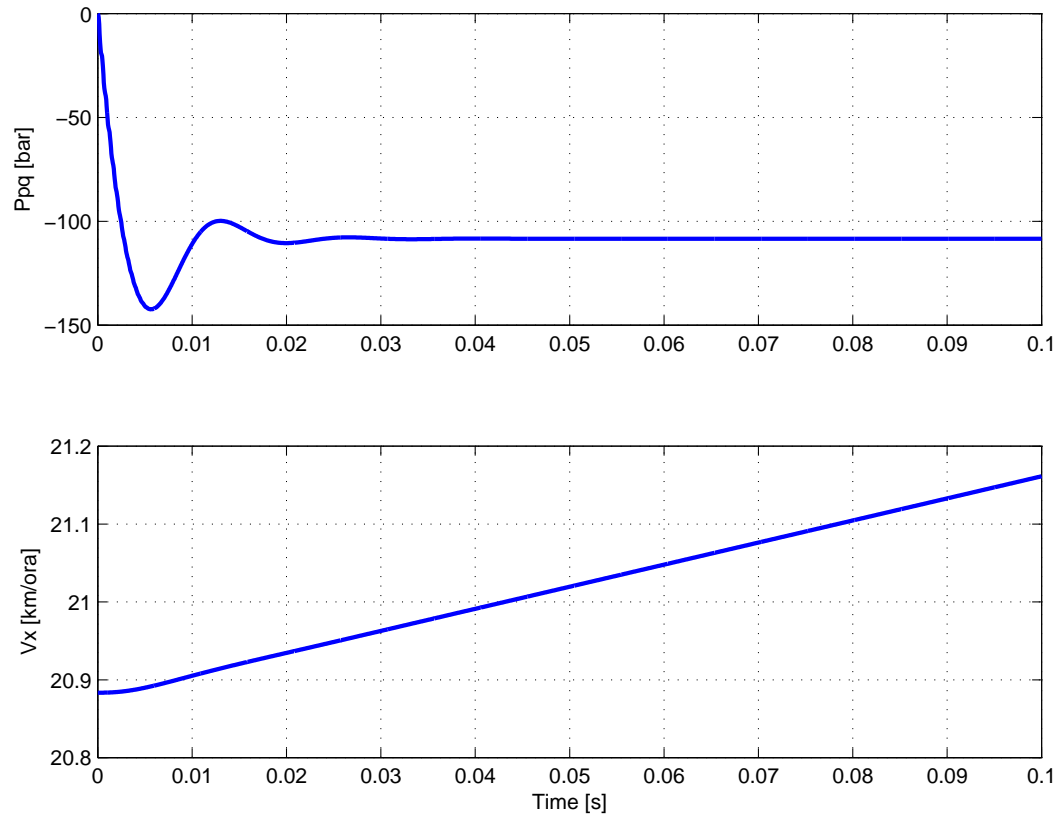


Figura 5.27: Pressione idraulica e velocità del mezzo



# Capitolo 6

## Conclusione

### 6.1 Conclusione

Le problematiche che sono state affrontate nella tesi, riguardano lo sviluppo in ambiente Matlab/Simulink di modelli dinamici ridotti di un sistema CVT (Continuous Variable Transmission) per un trattore agricolo.

L'utilizzo di schemi POG ha consentito, inizialmente, un'ottima descrizione della parte idraulica del sistema CVT e, in seguito, la descrizione dell'intero sistema. Inoltre, essendo lo schema a blocchi descrivibile nello spazio degli stati nel seguente modo:

$$\mathbf{L} \dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A} \mathbf{x} + \mathbf{B} \mathbf{u}$$

dopo aver applicato le tecniche di riduzione descritte precedentemente, è stato possibile ricavare le equazioni dinamiche che definiscono il sistema ed il relativo schema ridotto.

Parallelamente a questo lavoro, partendo da una rappresentazione reale dello schema CVT e adottando le dovute riduzioni, sono stati ricavati dati utili alle simulazioni.

In ultimo, in ambiente Matlab/Simulink, sono stati realizzati e ricalcola-

ti gli schemi POG e dalle successive simulazioni sono stati ricavati i grafici descrittivi del sistema CVT.

I risultati finali dimostrano che i due schemi, generale e ridotto, in condizioni ideali, descrivono andamenti equivalenti. Inoltre, la funzione che descrive il rapporto di trasmissione dimostra che la coppia si trasferisce a terra con continuità.

# Appendice A

## Codice Matlab

```
clear all close all

%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
% DEFINIZIONE DELLE UNITA' DI MISURA DEL SISTEMA INTERNAZIONALE (SI)
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
m = 1; cm = 0.01*m; mm = 0.001*m; km = 1000*m;
kg = 1;
N = 1;
kN = 1000*N;
secondo = 1; ora = 60*60*secondo; minuti = 60*secondo;
ms = 0.001*secondo;
Pa = 1;
rad = 1;
gradi = ( pi/180)*rad;
bar = 10^5*Pa;
lt = 0.001*m^3;
rpm = 2*pi/60*rad/secondo;
g = 9.8*m/secondo^2;

%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
% DATI DEI PNEUMATICI
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%

tabDryFX=10*[-2500 -2620 -2740 -2860 -2980 -3100 -3220 -3340 -3420 -3500
-3530 -3450 -3350 -3000 -2600 -1850 -1000 0 1000 1850 2600 3000 3350 3450
3530 3500 3420 3340 3220 3100 2980 2860 2740 2620 2500 ]';
```

```

slip1=[-0.7 -0.6 -0.5 -0.45 -0.4 -0.35 -0.3 -0.25 -0.2 -0.16 -0.14 -0.12 -0.1
-0.08 -0.06 -0.04 -0.02 0 0.02 0.04 0.06 0.08 0.1 0.12 0.14 0.16 0.2 0.25 0.3
0.35 0.4 0.45 0.5 0.6 0.7];

vetSLIPDry=[-0.7 -0.6 -0.5 -0.45 -0.4 -0.35 -0.3 -0.25 -0.2 -0.16 -0.14 -0.12
-0.1 -0.08 -0.06 -0.04 -0.02 0 0.02 0.04 0.06 0.08 0.1 0.12 0.14 0.16 0.2 0.25
0.3 0.35 0.4 0.45 0.5 0.6 0.7]';
%vetSLIPDry=vetSLIPDry+vetSLIPDry*0.2;

%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
% DATI DEL VEICOLO
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%

Mv=4000*kg;           %Massa del mezzo
Rr=0.905*m;           %Raggio della ruota
Vx_00=0.0000001;      %Velocit\'a

%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
rho_acc=7.5;          % Densit\'a dell'acciaio
kb=100;               % Coefficiente di proporzionalit\'a tra il coefficiente
                      % di attrito b e l'inerzia J_m di una ruota

%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
% DEFINIZIONE DELLE VARIABILI STANDARD
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
%%% PASSO LINEARE DEI DENTI
xd=2*cm;
xdm=xd;
xdp=xd;
xdq=xd;
xdr=xd;
xds=xd;
xd0=xd;
%%% SPESSORE DELLE RUOTE DENTATE (LARGHEZZA DEI DENTI)
hm=3*cm;
hp=3*cm;
hq=3*cm;
hr=3*cm;
hs=3*cm;
h0=3*cm;

```

```

%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
% DEFINIZIONE DELLE CARATTERISTICHE FISICHE DEL SISTEMA
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
%%%
%%%
%%% Rounta "m" connessa al motore endotermico
Nm=40; % Numero denti ruota dentata
r_m=xdm*Nm/(2*pi); % Raggio ruota dentata
J_m=1.2*pi*hm*rho_acc*r_m^4/2; % Inerzia
b_m=kb*J_m; % Attrito
%%%
%%% Rounta intermedia "n"
Nn1=55;
Nn2=64;
r_n1=xdm*Nn1/(2*pi);
r_n2=xdp*Nn2/(2*pi);
J_n=0.5*pi*rho_acc*(hm*r_n1^4 + hp*r_n2^4);
b_n=kb*J_n;
%%%
%%% Rounta intermedia "o"
No=36;
r_o=xdp*No/(2*pi);
J_o=0.5*pi*rho_acc*hp*r_o^4;
b_o=kb*J_o;
%%%
%%% Rounta "p" connessa alla pompa idraulica
Np=33;
r_p=xdp*Np/(2*pi);
J_p=0.5*pi*rho_acc*hp*r_p^4;
b_p=kb*J_p;
%%%
%%% Rounta "q" connessa al motore idraulico
Nq=42;
r_q=xdq*Nq/(2*pi);
J_q=0.5*pi*rho_acc*hq*r_q^4;
b_q=kb*J_q;
%%%
%%% Rounta intermedia "t"
Nt1=43;
Nt2=36;
r_t1=xdq*Nt1/(2*pi);

```







```

Sys=SysS;

syms Th
% Prelevo le variabili di inerzia, attrito e angolazione del piattello
% dal sistema Sys
J_theta=vpa(subs(Sys.L),50);
b_theta=-vpa(subs(Sys.A),50);
Tt_theta=Sys.Ci;
% Ridefinisco il valore della portata idraulica in funzione
% dell'angolazione del piattello
Hp_th=Hp_max*sin(Th)/sin(Th_max);

Sys.L=vpa(subs(Sys.L),50);
Sys.A=vpa(subs(Sys.A),50);
Sys.Bi=vpa(subs(Sys.Bi),50);
Sys.Bu=vpa(subs(Sys.Bu),50);
Sys.Ci=vpa(subs(Sys.Ci),50);
Sys.Cu=vpa(subs(Sys.Cu),50);
Sys.Dii=0;
Sys.Diu=0;
Sys.Dui=0;
Sys.Duu=0;
Sys.Yi=vpa(subs(Sys.Yi),50);
Sys.Yu=vpa(subs(Sys.Yu),50);
SysN=Sys;

Show_Sys(SysN)

%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%% POSIZIONE DEL PIATTELO %%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%

Tfin=0.1*secondo;           % Durata della simulazione

Th_1=-15*gradi;           % Posizione angolare di partenza
Th_2=40*gradi;           % Posizione angolare di arrivo
T_1=0.04*secondo;        % Istante oltre il quale il piattello non pi\'u a Th_1
T_2=0.05*secondo;        % Istante oltre il quale il piattello si trova a Th_2
time=[0:0.0002:1]*Tfin; % Conto entro 0.1 secondi con precisione di 0.0002
Th_t=0*time;             % Tempo di partenza
% Conto da uno a tempo massimo. Se istante attuale <= di T_1 allora il

```





```

%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
Tc=0.05*ms;          %%%% Switching period
sim('CVT_New_th_md1',Tfin);          % Simulazione CVT

%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
% GRAFICAZIONE CONFRONTO SISTEMI
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%

figure(10)
clf
plot(t,Wm/rpm,'b--','LineWidth',1)
hold on
plot(t,W0/rpm,'g--','LineWidth',1)
plot(t,Ws0(:,1)/rpm,'r--','LineWidth',1)
plot(t,Ws0(:,2)/rpm,'c--','LineWidth',1)
plot(t,Wr/rpm,'m--','LineWidth',1)
plot(t,Wp/rpm,'y--','LineWidth',1)
plot(t,Wq/rpm,'k--','LineWidth',1)

plot(t,Xt(:,1)/rpm,'b','LineWidth',1)
plot(t,Xt(:,2)/rpm,'g','LineWidth',1)
plot(t,Xt(:,3)/rpm,'r','LineWidth',1)
plot(t,Xt(:,4)/rpm,'c','LineWidth',1)
plot(t,Xt(:,5)/rpm,'m','LineWidth',1)
plot(t,Xt(:,6)/rpm,'y','LineWidth',1)
plot(t,Xt(:,7)/rpm,'k','LineWidth',1)
ylabel('Wm W0 Ws Ws0 Wr Wp Wq [rpm]')
zoom on
grid on

% %%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
% %%%% PER LA SIMULAZIONE CON CARICO, UNCOMMENT QUELLO CHE SEGUE %%%%
% %%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
% % SIMULAZIONE GENERALE CON CARICO
% %%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
%
% Tc=0.05*ms;          %%%% Switching period
% Tfin=0.1*secondo;
% sim('CVT_New_Carico_md1',Tfin);          % Simulazione CVT

```

```
%  
% %%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%  
% % GRAFICAZIONE SISTEMA GENERALE CON CARICO  
% %%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%  
%  
% figure(6)  
% clf  
% subplot(211)  
% plot(t,[Wp Wm W0]/rpm)  
% ylabel('Wp, Wm, W0 [rpm]')  
% zoom on  
% %  
% subplot(212)  
% plot(t,[Wq Wr]/rpm)  
% ylabel('Wq Wr[rpm]')  
% xlabel('Time [s]')  
% zoom on  
%  
% figure(7)  
% clf  
% subplot(211)  
% plot(t,[Ws0(:,1) Ws0(:,2)]/rpm)  
% ylabel('Ws, Ws0 [rpm]')  
% zoom on  
% %  
% subplot(212)  
% plot(t,[Wr Ws0(:,1) Ws0(:,2) W0]/rpm)  
% ylabel('Wr, Ws0, Ws, W0 [rpm]')  
% xlabel('Time [s]')  
% zoom on  
%  
% figure(8)  
% clf  
% subplot(211)  
% plot(t,Ppq/bar)  
% ylabel('Ppq [bar]')  
% zoom on  
% %  
% subplot(212)  
% plot(t,Vx/(km/ora))  
% ylabel('Vx [km/ora]')
```

```

% xlabel('Time [s]')
% zoom on
%
% figure(9)
% clf
% subplot(211)
% plot(t,Fx)
% ylabel('Fx [N]')
% zoom on
% %
% subplot(212)
% plot(t,Slip)
% ylabel('Slip [m/s]')
% xlabel('Time [s]')
% zoom on
%
% %%%%%%%%%%%

syms Thd_0

Thd_max=Th_max/gradi;

Hp_th=Hp_max*sin(Thd_0*gradi)/sin(Thd_max*gradi); % Variazione porta,
                                                    % andamento sinusoidale

J_theta=vpa(subs(J_theta),50);
b_theta=vpa(subs(b_theta),50);
tau_theta=J_theta/b_theta;

Tt_theta=vpa(subs(Tt_theta),50);

figure(20)
clf
h=ezplot(J_theta,[-Thd_max,Thd_max]);
set(h,'LineWidth',2)
title('Inerzia equivalente')
grid on
ylabel('J_theta [s]')

figure(21)
clf

```

```

h=ezplot(b_theta,[-Thd_max,Thd_max]);
set(h,'LineWidth',2)
title('Attrito equivalente')
grid on
ylabel('b_theta [s]')

figure(22)
clf
h=ezplot(tau_theta,[-Thd_max,Thd_max]);
set(h,'LineWidth',2)
title('Rapporto tra Inerzia e Attrito')
grid on
ylabel('tau [s]')

figure(23)
clf
plot(time,Th_t,'LineWidth',2)
title('Variazione angolazione del piattello')
grid on
ylabel('Th_t [rad]')

figure(24)
clf
h=ezplot(Tt_theta(4),[-Thd_max,Thd_max]);
set(h,'LineWidth',2)
title('Rapporto di Trasmissione')
grid on
ylabel('ws0/wm ')

function Sys=Calcola_CVT

syms u_i u_u y_i y_u

syms J_mn b_mn w_m T_em % Qui si definiscono le variabili simboliche

Sys.L=J_mn; % Qui gli elementi che andranno a costruire la matrice L
Sys.A=-b_mn; % Qui gli elementi che andranno a costruire la matrice A
Sys.Bi=1; % Elemento entrante dall'ingresso del blocco
Sys.Bu=1; % Elemento entrante dall'uscita del blocco
Sys.Ci=1; % Elemento uscente dall'ingresso del blocco
Sys.Cu=1; % Elemento uscente dall'uscita del blocco
Sys.Dii=0; % Percorsi che legano ingresso Bi con ingresso Ci

```

```

Sys.Diu=0;      % Percorsi che legano ingresso Bi con uscita Cu
Sys.Dui=0;      % Percorsi che legano uscita Bu con ingresso Ci
Sys.Duu=0;      % Percorsi che legano uscita Bu con uscita Cu
Sys.X=w_m;      % Elementi che andranno a comporre il vettore di stato
Sys.Ui=T_em;    % Elementi in ingresso
Sys.Uu=u_u;
Sys.Yi=w_m;     % Elementi in uscita
Sys.Yu=y_u;
Sys1=Sys;       % Carico il sistema in Sys1

syms K_m0 d_m0 T_m0

Sys.L=1/K_m0;
Sys.A=0;
Sys.Bi=1;
Sys.Bu=1;
Sys.Ci=1;
Sys.Cu=1;
Sys.Dii=d_m0;
Sys.Diu=d_m0;
Sys.Dui=d_m0;
Sys.Duu=d_m0;
Sys.X=T_m0;
Sys.Ui=u_i;
Sys.Uu=u_u;
Sys.Yi=y_i;
Sys.Yu=y_u;
Sys2=Sys;       % Carico il sistema in Sys2

% Qui di seguito, mediante la funzione componi, realizzo la composizione
% dei due sistemi Sys1 e Sys2 caricando il risultato in Sys1. In questo
% modo, dopo aver realizzato il sistema Sys3, chiamato comunque Sys2, posso
% nuovamente usare la ricca di comando "Sys1=Componi(Sys1, Sys2);" per avere
% la nuova composizione, somma in questo caso di tre blocchi. Proseguendo
% in questa maniera di arriva ad avere il Sistema A che rappresenta il
% primo dei due macroschemi.
Sys1=Componi(Sys1, Sys2);

syms J_0 b_0 r_0 w_0

Sys.L=J_0;

```

```
Sys.A=-b_0;
Sys.Bi=1;
Sys.Bu=r_0;
Sys.Ci=1;
Sys.Cu=r_0;
Sys.Dii=0;
Sys.Diu=0;
Sys.Dui=0;
Sys.Duu=0;
Sys.X=w_0;
Sys.Ui=u_i;
Sys.Uu=u_u;
Sys.Yi=y_i;
Sys.Yu=y_u;
Sys2=Sys;
```

```
Sys1=Componi(Sys1, Sys2);
```

```
syms K_0s d_0s F_0s
```

```
Sys.L=1/K_0s;
Sys.A=0;
Sys.Bi=1;
Sys.Bu=1;
Sys.Ci=1;
Sys.Cu=1;
Sys.Dii=d_0s;
Sys.Diu=d_0s;
Sys.Dui=d_0s;
Sys.Duu=d_0s;
Sys.X=F_0s;
Sys.Ui=u_i;
Sys.Uu=u_u;
Sys.Yi=y_i;
Sys.Yu=y_u;
Sys2=Sys;
```

```
Sys1=Componi(Sys1, Sys2);
```

```
syms J_s J_s0 b_s b_s0 r_s1 r_s2 r_ri w_s w_s0
```

```
Sys.L=diag([J_s J_s0]);
Sys.A=-diag([b_s b_s0]);
Sys.Bi=[-r_s2; r_0];
Sys.Bu=[r_s1; r_ri];
Sys.Ci=Sys.Bi.';
Sys.Cu=Sys.Bu.';
Sys.Dii=0;
Sys.Diu=0;
Sys.Dui=0;
Sys.Duu=0;
Sys.X=[w_s; w_s0];
Sys.Ui=u_i;
Sys.Uu=u_u;
Sys.Yi=y_i;
Sys.Yu=y_u;
Sys2=Sys;
```

```
Sys1=Componi(Sys1, Sys2);
```

```
syms K_sr d_sr F_sr
```

```
Sys.L=1/K_sr;
Sys.A=0;
Sys.Bi=1;
Sys.Bu=1;
Sys.Ci=1;
Sys.Cu=1;
Sys.Dii=d_sr;
Sys.Diu=d_sr;
Sys.Dui=d_sr;
Sys.Duu=d_sr;
Sys.X=F_sr;
Sys.Ui=u_i;
Sys.Uu=u_u;
Sys.Yi=y_i;
Sys.Yu=y_u;
Sys2=Sys;
```

```
Sys1=Componi(Sys1, Sys2);
```

```
syms J_r b_r w_r
```

```
Sys.L=J_r;
Sys.A=-b_r;
Sys.Bi=r_ri;
Sys.Bu=1;
Sys.Ci=r_ri;
Sys.Cu=1;
Sys.Dii=0;
Sys.Diu=0;
Sys.Dui=0;
Sys.Duu=0;
Sys.X=w_r;
Sys.Ui=u_i;
Sys.Uu=u_u;
Sys.Yi=y_i;
Sys.Yu=y_u;
Sys2=Sys;

SysA=Componi(Sys1,Sys2); % Macroschema SysA

%Show_Sys(SysA)

%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%

syms K_mp d_mp T_mp r_mn

Sys.L=1/K_mp;
Sys.A=0;
Sys.Bi=r_mn;
Sys.Bu=1;
Sys.Ci=r_mn;
Sys.Cu=1;
Sys.Dii=d_mp*r_mn^2;
Sys.Diu=d_mp*r_mn;
Sys.Dui=d_mp*r_mn;
Sys.Duu=d_mp;
Sys.X=T_mp;
Sys.Ui=u_i;
Sys.Uu=u_u;
Sys.Yi=y_i;
Sys.Yu=y_u;
```

```
Sys1=Sys;

syms J_op b_op r_op w_p Hp_th

Sys.L=J_op;
Sys.A=-b_op;
Sys.Bi=r_op;
Sys.Bu=Hp_th;
Sys.Ci=r_op;
Sys.Cu=Hp_th;
Sys.Dii=0;
Sys.Diu=0;
Sys.Dui=0;
Sys.Duu=0;
Sys.X=w_p;
Sys.Ui=u_i;
Sys.Uu=u_u;
Sys.Yi=y_i;
Sys.Yu=y_u;
Sys2=Sys;

Sys1=Componi(Sys1, Sys2);

syms C_pq R_p R_q P_pq

Sys.L=C_pq;
Sys.A=0;
Sys.Bi=1;
Sys.Bu=1;
Sys.Ci=1;
Sys.Cu=1;
Sys.Dii=R_p;
Sys.Diu=0;
Sys.Dui=0;
Sys.Duu=R_q;
Sys.X=P_pq;
Sys.Ui=u_i;
Sys.Uu=u_u;
Sys.Yi=y_i;
Sys.Yu=y_u;
Sys2=Sys;
```

---

```
Sys1=Componi(Sys1, Sys2);
```

```
syms Hq J_qt b_qt r_qt w_q
```

```
Sys.L=J_qt;
```

```
Sys.A=-b_qt;
```

```
Sys.Bi=Hq;
```

```
Sys.Bu=r_qt;
```

```
Sys.Ci=Hq;
```

```
Sys.Cu=r_qt;
```

```
Sys.Dii=0;
```

```
Sys.Diu=0;
```

```
Sys.Dui=0;
```

```
Sys.Duu=0;
```

```
Sys.X=w_q;
```

```
Sys.Ui=u_i;
```

```
Sys.Uu=u_u;
```

```
Sys.Yi=y_i;
```

```
Sys.Yu=y_u;
```

```
Sys2=Sys;
```

```
Sys1=Componi(Sys1, Sys2);
```

```
syms K_qr d_qr T_qr r_r1
```

```
Sys.L=1/K_qr;
```

```
Sys.A=0;
```

```
Sys.Bi=1;
```

```
Sys.Bu=r_r1;
```

```
Sys.Ci=1;
```

```
Sys.Cu=r_r1;
```

```
Sys.Dii=d_qr;
```

```
Sys.Diu=d_qr*r_r1;
```

```
Sys.Dui=d_qr*r_r1;
```

```
Sys.Duu=d_qr*r_r1^2;
```

```
Sys.X=T_qr;
```

```
Sys.Ui=u_i;
```

```
Sys.Uu=u_u;
```

```
Sys.Yi=y_i;
```

```
Sys.Yu=y_u;
```

```

Sys2=Sys;

SysB=Componi(Sys1, Sys2);    % Macroschema SysB

%Show_Sys(SysB)
% Volendo a questo punto unire in un unico sistema SysA e SysB,
% necessario invertire gli ingressi e le uscite di SysB in modo da renderle
% coincidenti con quelle di SysA
tmp=SysB.Bu;
SysB.Bu=SysB.Bi;
SysB.Bi=tmp;
%
tmp=SysB.Cu;
SysB.Cu=SysB.Ci;
SysB.Ci=tmp;
%
tmp=SysB.Dii;
SysB.Dii=SysB.Duu;
SysB.Duu=tmp;

SysC=Componi(SysA, SysB);    % Schema SysC completo ma privo di chiusura

%Show_Sys(SysC)

syms T_m T_0 T_s T_s0 T_r T_p T_q

En=eye(size(SysC.L,1));

% Qui di seguito stata eseguita la chiusura del sistema
Sys=SysC;
Sys.A=Sys.A+Sys.Bi*Sys.Cu-Sys.Bu*Sys.Ci-Sys.Bi*Sys.Duu*Sys.Ci;
Sys.Bi=En(:, [1 3 5 6 8 10 12]);
Sys.Ci=Sys.Bi';
Sys.Bu=0;
Sys.Cu=0;
Sys.Dii=0;
Sys.Diu=0;
Sys.Dui=0;
Sys.Duu=0;
Sys.Ui=[T_m; T_0; T_s; T_s0; T_r; T_p; T_q];
Sys.Yi=Sys.Ci*Sys.X;

```

---

```

Sys.Uu=0;
Sys.Yu=0;
SysC=Sys;

%Show_Sys(SysC)

Ixx=[En(:,[1 3 5 6 8 10 12]) En(:,[2 4 7 9 11 13])]; %Matrice trasformata

Sys=SysC; % Carico il sistema SysC in Sys
Sys.L=Ixx.'*Sys.L*Ixx; % Matrice L trasformata
Sys.A=Ixx.'*Sys.A*Ixx; % Matrice A trasformata
Sys.Bi=Ixx.'*Sys.Bi; % Matrice B trasformata
Sys.Ci=Sys.Ci*Ixx; % Matrice C trasformata
Sys.Bu=0;
Sys.Cu=0;
Sys.Dii=0;
Sys.Diu=0;
Sys.Dui=0;
Sys.Duu=0;
Sys.X=Ixx.'*Sys.X; % Matrice X trasformata
Sys.Ui=[T_m; T_0; T_s; T_s0; T_r; T_p; T_q]; % Vettore ingressi
Sys.Yi=Sys.Ci*Sys.X; % Vettore uscite
Sys.Uu=0;
Sys.Yu=0;
SysD=Sys; % Carico il sistema Sys in SysD

%Show_Sys(SysD)

Sys=SysD; % Carico il sistema SysD in Sys
% Applico le operazioni di riduzione del sistema
ns = 1;
nw = 6;
nk = 6;
A31 = Sys.A([ns+nw+1:ns+nw+nk],1);
A32 = Sys.A([ns+nw+1:ns+nw+nk],[ns+1:ns+nw]);
AX21 = simplify(-inv(A32)*A31);
T2 = simplify([eye(ns); AX21; zeros(nk,1)]);
%
Sys.L=simplify(T2.'*Sys.L*T2);
Sys.A=simplify(T2.'*Sys.A*T2);
Sys.Bi=simplify(T2.'*Sys.Bi);

```

```

Sys.Ci=simplify(Sys.Ci*T2);
Sys.Bu=0;
Sys.Cu=0;
Sys.Dii=0;
Sys.Diu=0;
Sys.Dui=0;
Sys.Duu=0;
Sys.X=Sys.X(ns);
Sys.Ui=[T_m; T_0; T_s; T_s0; T_r; T_p; T_q];
Sys.Yi=Sys.Ci*Sys.X;
Sys.Uu=0;
Sys.Yu=0;

%Show_Sys(Sys)

% function Sys=Componi(Sys1,Sys2)
%
% Sono state introdotte le sezioni energetiche tipo POG
%
function Sys=Componi(Sys1,Sys2)

Sys=Sys1;          % Assegno alla variabile Sys il valore di Sys1

%Realizzo la composizione delle singole matrici passandole a Sys
Sys.L=mdia(Sys1.L,Sys2.L);
Sys.A=[Sys1.A-Sys1.Bu*Sys2.Dii*Sys1.Cu, -Sys1.Bu*Sys2.Ci;...
       Sys2.Bi*Sys1.Cu, Sys2.A-Sys2.Bi*Sys1.Duu*Sys2.Ci];
Sys.Bi=[Sys1.Bi;Sys2.Bi*Sys1.Diu];
Sys.Bu=[-Sys1.Bu*Sys2.Diu;Sys2.Bu];
Sys.Ci=[Sys1.Ci,-Sys1.Dui*Sys2.Ci];
Sys.Cu=[Sys2.Diu*Sys1.Cu, Sys2.Cu];
Sys.Dii=Sys1.Dii;
Sys.Diu=Sys2.Diu*Sys1.Diu;
Sys.Dui=Sys1.Dui*Sys2.Dui;
Sys.Duu=Sys2.Duu;
Sys.X=[Sys1.X;Sys2.X];
Sys.Ui=Sys1.Ui;
Sys.Uu=Sys2.Uu;
Sys.Yi=Sys1.Yi;
Sys.Yu=Sys2.Yu;

return

```

```
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
```

```
function D=mdiag(M1,M2)

n1=size(M1);           % Assegno ad n1 la dimensione di M1
n2=size(M2);           % Assegno ad n2 la dimensione di M2
if (n1(1)~=n1(2))|(n2(1)~=n2(2)) % Verifico che le matrici siano quadrate
    disp(n1); disp(n2); disp('Dimensioni non corrette'); return
end
D(1:n1(1),1:n1(1))=M1;      % Dispongo sulla diagonale le due matrici
D(n1(1)+[1:n2(1)],n1(1)+[1:n2(1)])=M2;
return
```

```
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
```

```
% Show_Sys(Sys)
%
function Show_Sys(Sys)
disp('L=');disp(Sys.L)
disp('A=');disp(Sys.A)
disp('Bi=');disp(Sys.Bi)
disp('Bu=');disp(Sys.Bu)
disp('Ci=');disp(Sys.Ci)
disp('Cu=');disp(Sys.Cu)
disp('Dii=');disp(Sys.Dii)
disp('Diu=');disp(Sys.Diu)
disp('Dui=');disp(Sys.Dui)
disp('Duu=');disp(Sys.Duu)
disp('X=');disp(Sys.X)
disp('Ui=');disp(Sys.Ui)
disp('Uu=');disp(Sys.Uu)
disp('Yi=');disp(Sys.Yi)
disp('Yu=');disp(Sys.Yu)
return
```



# Bibliografia

- [1] R.Zanasi, R.Morselli:  
*Controlli Automatici A*, dispense del corso.
  
- [2] R.Zanasi, R.Morselli:  
*Controlli Automatici B*, dispense del corso.
  
- [3] R.Zanasi, R.Morselli  
*Sistemi di controllo*, dispense del corso.
  
- [4] F.Bedogni  
*Modello dinamico di trasmissione elettroidraulica di tipo innovativo per veicoli agricoli e stima della velocità di rotazione mediante ruota fonica.*, Tesi di laurea.
  
- [5] D.Vaccari  
*Modello di una trasmissione per veicoli agricoli e controllo del cambio marcia*, Tesi di laurea.

