

## Risposta all'impulso

- Sistemi lineari tempo invarianti:

$$\begin{array}{ccc}
 x(t) \longrightarrow & \boxed{\text{Sistema lineare}} & \longrightarrow y(t) \\
 & & \\
 & & \sum_{i=0}^n a_i D^i y(t) = \sum_{i=0}^m b_i D^i x(t)
 \end{array}$$

- La funzione di trasferimento  $G(s)$  è definita a condizioni iniziali nulle:

$$\begin{array}{ccc}
 X(s) \longrightarrow & \boxed{G(s)} & \longrightarrow Y(s) \\
 & & \\
 & & G(s) = \frac{Y(s)}{X(s)} = \frac{\sum_{i=0}^m b_i s^i}{\sum_{i=0}^n a_i s^i}
 \end{array}$$

- Si noti che i coefficienti  $a_i$  e  $b_i$  della funzione di trasferimento  $G(s)$  sono gli stessi che caratterizzano l'equazione differenziale.
- Relazioni esistenti fra segnali di ingresso e di uscita:

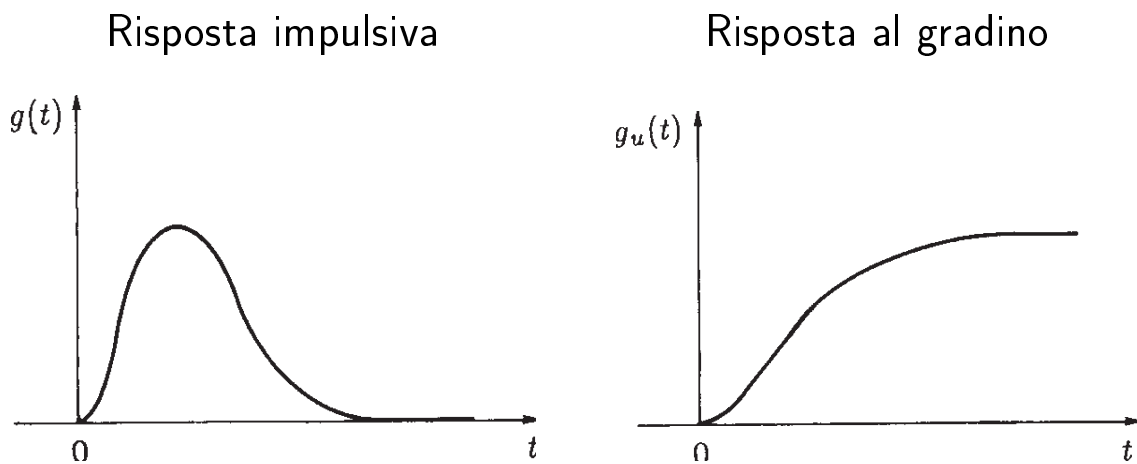
$$\text{Se } y(t) \text{ è la risposta al segnale } x(t), \quad \Rightarrow \quad Y(s) = G(s)X(s)$$

$$\int_0^t y(t) dt \text{ è la risposta al segnale } \int_0^t x(t) dt \quad \Rightarrow \quad \frac{Y(s)}{s} = G(s) \frac{X(s)}{s}$$

$$\text{e } \frac{dy(t)}{dt} \text{ è la risposta al segnale } \frac{dx(t)}{dt} \quad \Rightarrow \quad sY(s) = G(s) sX(s)$$

- La risposta alla rampa unitaria è la derivata della risposta alla parabola unitaria; la risposta al gradino unitario è la derivata della risposta alla rampa unitaria; ecc.
- *Risposte canoniche*: sono le risposte del sistema ai segnali tipici (impulso, gradino, rampa, parabola, ecc.)
- Le *risposte canoniche* caratterizzano completamente il comportamento dinamico del sistema: dalla conoscenza di una di esse si può risalire alla risposta ad un segnale qualsiasi.

- Le risposte canoniche più frequentemente utilizzate nella pratica sono la *risposta all'impulso* (di Dirac) o *risposta impulsiva*  $g(t)$  e *risposta al gradino* o *risposta indiciale*  $g_u(t)$ .



- La risposta all'impulso  $g(t)$  è la trasformata di Laplace inversa della funzione di trasferimento  $G(s)$  del sistema:

$$g(t) = \mathcal{L}^{-1}[G(s)] \quad \leftrightarrow \quad G(s) = \mathcal{L}[g(t)]$$

- La risposta all'impulso  $g(t)$  compendia tutte le informazioni necessarie per determinare la risposta, a partire dalla condizione iniziale di quiete, a qualunque segnale di ingresso. Infatti, partendo dalla relazione

$$Y(s) = G(s) X(s)$$

e applicando il teorema della trasformata del prodotto integrale si ha che

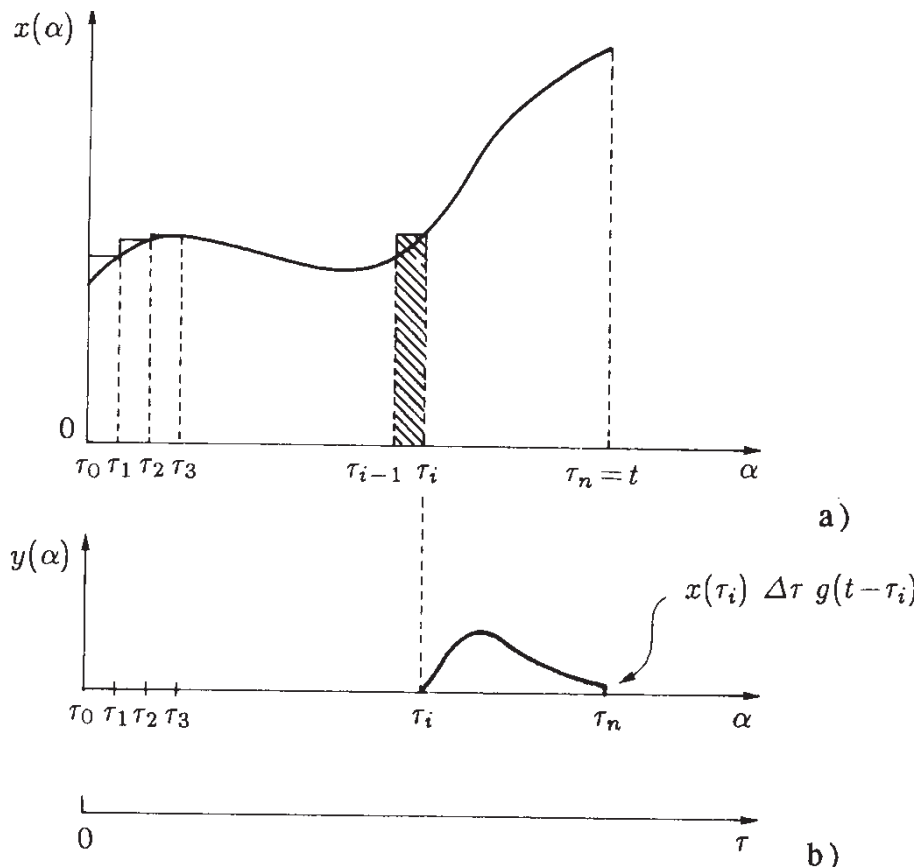
$$y(t) = \int_0^{\infty} x(\tau) g(t-\tau) d\tau$$

cioè calcolando un *integrale di convoluzione* ( o *integrale di Duhamel*) è possibile determinare la risposta  $y(t)$  del sistema a qualunque segnale di ingresso  $x(t)$ .

- Essendo  $x(t) = 0$  e  $g(t) = 0$  per  $t < 0$ , l'integrale di convoluzione diventa:

$$y(t) = \int_0^t x(\tau) g(t-\tau) d\tau$$

- L'integrale di convoluzione si ottiene applicando semplicemente il principio di sovrapposizione degli effetti.



- Si scompone l'intervallo  $0 \leq \tau < t$  in  $n$  intervalli elementari:

$$\tau_{i-1} \leq \tau < \tau_i \quad (i = 1, \dots, n; \tau_0 = 0, \tau_n = t)$$

in ciascuno dei quali la funzione  $x(\tau)$  si suppone costante di valore  $x(\tau_i)$ .

- Si considera poi il generico impulso (indicato a tratteggio in figura) di area  $x(\tau_i) \Delta\tau$ . Supponendo  $\Delta\tau$  sufficientemente piccolo, la risposta del sistema a tale impulso è prossima alla risposta a un impulso di Dirac di area  $x(\tau_i) \Delta\tau$  applicato all'istante  $\tau_i$ .
- Poiché vale la sovrapposizione degli effetti è possibile scrivere che:

$$y(t) \simeq \sum_{i=1}^n x(\tau_i) g(t - \tau_i) \Delta\tau$$

Facendo tendere  $\Delta\tau$  a zero, la sommatoria tende all'integrale all'integrale di convoluzione.