

# INTRODUZIONE AL CONTROLLO OTTIMO

Giovanni Marro

## 1 Considerazioni generali

Gran parte della teoria classica dei controlli è dedicata allo studio dei sistemi di controllo in retroazione. Finché si considerano sistemi con una sola variabile manipolabile e una sola variabile controllata e se lo scopo del controllo è che la variabile controllata segua il più fedelmente possibile, anche in presenza di disturbi, l'andamento di un dato segnale di riferimento, il controllo in retroazione (feedback) risulta infatti il più conveniente.

Quando invece si considerano sistemi più complessi, caratterizzati dalla presenza di più variabili manipolabili e più variabili d'uscita, quali molti impianti industriali (impianti chimici, petrolchimici, cartiere, etc.), in cui l'impiego di apparati di elaborazione centralizzati è economicamente giustificato, lo scopo del controllo non è più il semplice "inseguimento" di certi segnali di riferimento da parte di alcune variabili del sistema, ma l'esercizio ottimo del sistema in base a dati criteri di valutazione. In questi casi può essere giustificato un controllo non in retroazione, bensì ad azione diretta (feedforward).

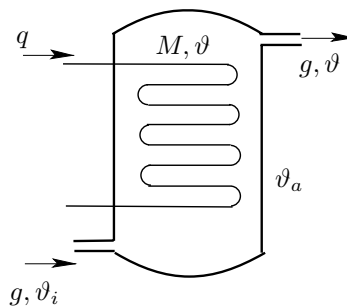


Figura 1: Scambiatore di calore.

Affinché risulti chiara la differenza nella sostanza, nonché nei pregi e nei difetti, che intercorre fra un controllo in retroazione ed uno ad azione diretta, si fa riferimento al semplice sistema fisico, rappresentato in Fig. 1, costituito da uno scambiatore di calore per il riscaldamento di un liquido: si suppone di voler controllare la temperatura del liquido nello scambiatore agendo sulla quantità di calore generata dal serpentino nell'unità di tempo. Posto così il problema di controllo, la prima operazione che si esegue per la sua soluzione è l'*identificazione* del sistema da controllare: l'identificazione consiste nella deduzione anche sperimentale, di un *modello matematico* del sistema, cioè di un complesso di equazioni, algebriche o differenziali, che ne descrivano il comportamento con sufficiente precisione.

Per il sistema di Fig. 1 un possibile modello matematico è dato dall'equazione differenziale

$$M c \dot{\vartheta}(t) = q - g c (\vartheta(t) - \vartheta_i) - K_s (\vartheta(t) - \vartheta_a)$$

in cui è:

- $M$  massa del liquido contenuto nello scambiatore;
- $c$  calore specifico del liquido;
- $\vartheta$  temperatura del liquido contenuto nello scambiatore (supposta uniforme);
- $g$  portata in massa, entrante ed uscente;
- $\vartheta_i$  temperatura del liquido all'entrata;
- $\vartheta_a$  temperatura ambiente;
- $q$  quantità di calore sviluppata dal riscaldatore per unità di tempo;
- $K_s$  coefficiente di scambio termico attraverso le pareti dello scambiatore.

Tale modello matematico è indubbiamente molto approssimativo (ad esempio vi si trascurano i fenomeni di propagazione), ma può essere sufficientemente preciso in relazione all'impiego che se ne farà: infatti in genere conviene adottare non un modello matematico inutilmente elaborato e complesso, ma un modello che sia un giusto compromesso fra la fedeltà di descrizione e la semplicità.

Nel caso che del sistema di Fig. 1 interessi solo il comportamento a regime (se tutte le variabili indipendenti variano in maniera sufficientemente lenta si può ragionevolmente supporre che il sistema funzioni sempre a regime) conviene assumere il più semplice modello matematico statico

$$q = g c (\vartheta - \vartheta_i) - K_s (\vartheta - \vartheta_a)$$

ottenuto annullando la derivata nella precedente equazione differenziale.

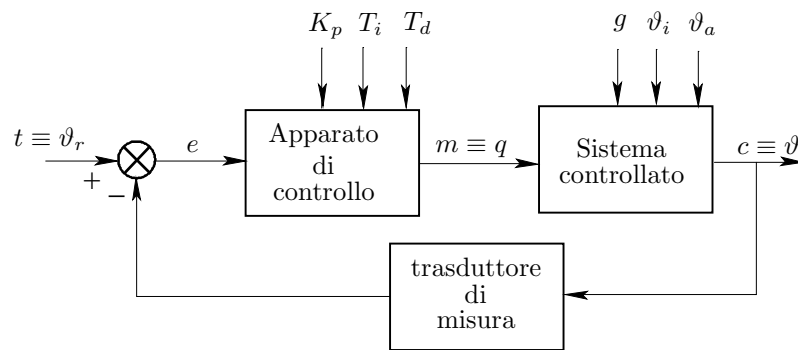


Figura 2: Dispositivo di controllo per lo scambiatore di calore.

È ragionevole controllare il sistema in esame con un dispositivo in retroazione, come quello indicato in Fig. 2, in cui la variabile manipolabile  $q$  viene regolata con un dispositivo PID. Supponendo per un momento costanti i disturbi, si noti che il sistema può essere descritto mediante la semplice funzione di trasferimento:

$$\frac{\Theta(s)}{Q(s)} = \frac{K}{1 + T s}, \quad \text{in cui è } K = \frac{1}{g c + K_s}, \quad T = \frac{M c}{g c + K_s}$$

Al variare dei disturbi  $g$ ,  $\vartheta_i$  e  $\vartheta_a$  i valori di  $K$  e  $T$  subiscono variazioni, per cui la scelta dei parametri  $K_p$ ,  $T_i$  e  $T_d$  del regolatore deve essere effettuata tenendo conto del fatto che il sistema controllato ha un comportamento dinamico non ben definito, ma variabile entro certi limiti. Un controllo più elaborato (controllo adattivo) si potrebbe effettuare variando i parametri del regolatore in funzione dell'entità delle grandezze

di disturbo cui il sistema è più sensibile (ad esempio nel caso in esame la portata  $g$ ), in modo da avere sempre un comportamento dinamico ottimo; un controllo adattivo non è certo giustificato nel caso in esame, ma è frequentemente impiegato negli autopiloti per aerei, in cui la risposta del sistema controllato (aereo) varia notevolmente al variare delle condizioni ambientali (quota e condizioni atmosferiche).

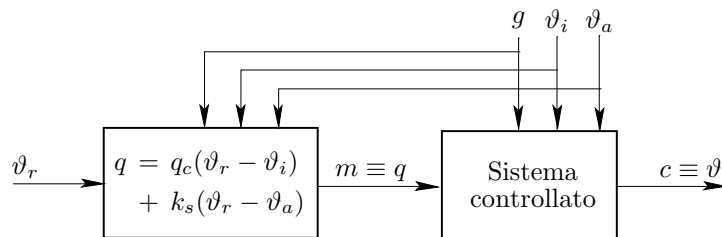


Figura 3: Controllo ad azione diretta dello scambiatore.

Vediamo ora come si potrebbe realizzare il controllo ad azione diretta, anzichè in retroazione, del sistema di Fig.1. Supponendo che i disturbi siano misurabili e variabili lentamente, cosicchè si possa realizzare un modello matematico statico, si può determinare facilmente, usando ad esempio un elaboratore in linea, il valore da assegnare alla variabile manipolabile  $q$  in modo che la temperatura si porti al valore voluto (Fig. 3). Un controllo ad azione diretta si può pertanto effettuare solo quando si disponga di un modello matematico sufficientemente accurato del sistema in esame e si possano conoscere, mediante opportuni dispositivi di misura, i valori di tutti i parametri che intervengono in tale modello che siano soggetti al variare nel tempo. Nel caso in esame un controllo ad azione diretta sarebbe sconsigliabile per la sua complessità e per la non grande precisione con la quale si possono conoscere i parametri del modello matematico (ad esempio  $K_s$  non è facilmente determinabile in modo preciso e non è costante nel tempo); non si avrebbero peraltro problemi di stabilità, non avendosi percorsi di segnale chiusi.

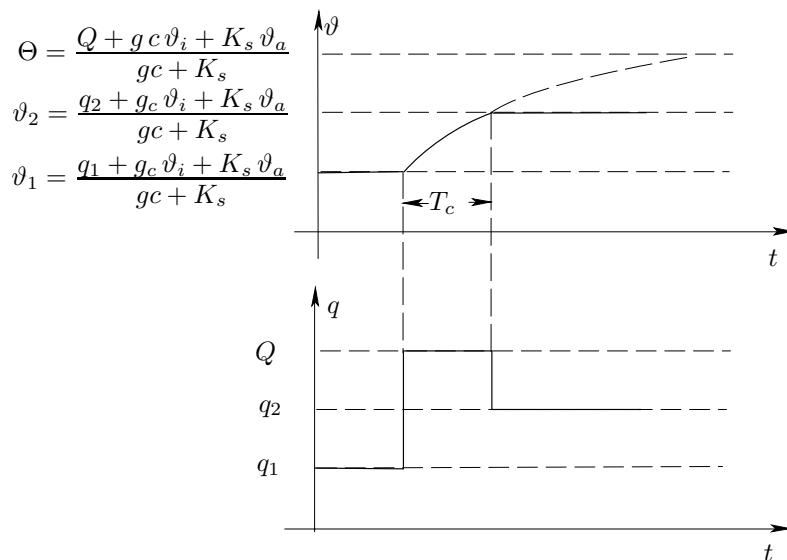


Figura 4: Controllo in tempo minimo.

Un controllo ad azione diretta, pur essendo in genere più complesso, è molto più flessibile di un controllo a retroazione. Si supponga infatti di voler portare il sistema di Fig. 1 nel più breve tempo possibile da una temperatura  $\vartheta_1$  ad una temperatura  $\vartheta_2$ , essendo la variabile manipolabile limitata nell'intervallo  $0 \leq q \leq Q$ . Il controllo si può operare come è indicato in Fig. 4, calcolando il tempo  $T_c$  durante il quale si deve tenere la variabile manipolabile al suo valore massimo, il che si può eseguire con facilità, anche automaticamente, disponendo del modello matematico dinamico del sistema.

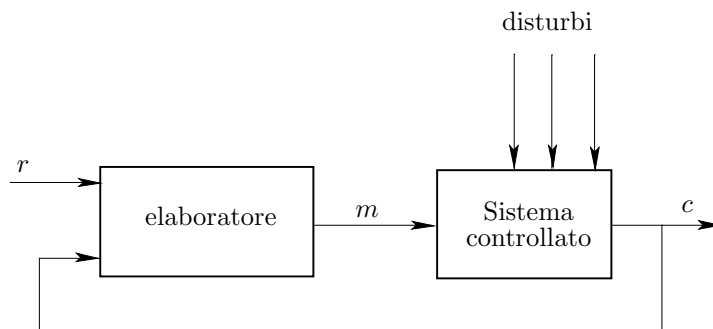


Figura 5: Controllo in retroazione.

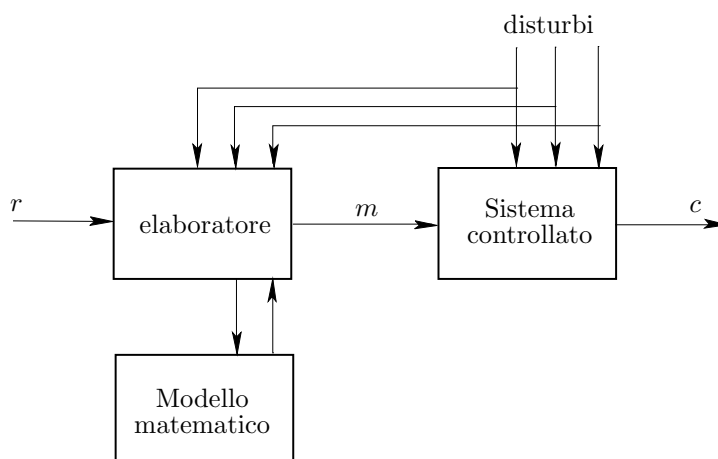


Figura 6: Controllo ad azione diretta.

Per concludere, le differenze fondamentali fra un controllo in retroazione, rappresentato dallo schema a blocchi di Fig. 5 (nel caso di una sola variabile controllata e di una sola variabile manipolabile) e un controllo ad azione diretta, rappresentato dallo schema a blocchi di Fig. 6 (ancora nel caso di una sola variabile controllata e una sola variabile manipolabile) sono le seguenti.

Il sistema in retroazione, poiché basa il suo intervento di correzione unicamente sull'entità della variabile errore, ossia di un parametro che misura lo scostamento tra il comportamento voluto ed il comportamento effettivo, non richiede una conoscenza accurata del modello matematico del sistema controllato; in particolare il controllo può essere accurato anche in presenza di disturbi, che sono parametri del modello matematico che, per loro stessa natura, sono di difficile conoscenza. Il sistema

in retroazione però presenta difficoltà di messa a punto, in ordine alla stabilità del sistema.

Il sistema ad azione diretta basa, invece, il suo intervento sulla conoscenza completa ed accurata delle equazioni del sistema controllato e, naturalmente, anche dei disturbi, che vi compaiono come azioni forzanti. Presenta il vantaggio di poter facilmente essere predisposto per ottenere un transitorio ottimo, in quanto, disponendo di un modello matematico completo, si può prevedere perfettamente il comportamento del sistema e quindi calcolare l'andamento da far seguire alla variabile manipolabile perché questo sia ottimo. Inoltre il sistema ad azione diretta non presenta alcuna difficoltà per ciò che riguarda la stabilità, non avendosi percorsi di segnali chiusi.

Nel controllo dei processi i sistemi in retroazione si dicono anche *controlli esplorativi*, appunto perché il loro funzionamento si basa su un'esplorazione del comportamento del sistema, alla quale viene legata l'azione di correzione; i sistemi ad azione diretta si dicono anche *controlli predittivi*, perché il loro funzionamento si basa sulla conoscenza a priori del comportamento del sistema.

In realtà i sistemi di controllo non sono in genere puramente esplorativi o predittivi, ma misti: la regolazione dei parametri  $K_p$ ,  $T_i$  e  $T_d$  in un regolatore PID corrisponde in un certo senso a dare caratteristiche predittive ad un controllo principalmente esplorativo, come gli eventuali dispositivi per modificare i valori dei parametri del modello matematico in base al quale funziona il controllo predittivo, che basano il loro intervento sul confronto fra il comportamento previsto e quello effettivo, sono sistemi di tipo esplorativo, che fanno parte di un controllo essenzialmente predittivo. Quando si considerano sistemi a più variabili il confronto, che per i sistemi ad una variabile si conclude a favore dei controlli in retroazione, porta spesso a far preferire i sistemi predittivi o essenzialmente predittivi (con una parte esplorativa per l'aggiornamento del modello matematico); questo per diverse ragioni:

- nei sistemi a molti anelli lo studio della stabilità e della correzione della risposta è notevolmente complesso;
- nei sistemi a più variabili lo scopo del controllo spesso non è l'*inseguimento*, ma l'*ottimizzazione*, e l'ottimizzazione si esegue più facilmente su basi predittive;
- quando si usino calcolatori di processo, la maggiore difficoltà di elaborazione associata al controllo predittivo non ha alcun peso, date le notevoli capacità dei dispositivi di calcolo.

Si presentano comunque casi in cui anche sistemi a più variabili sono controllati in retroazione: si consideri ad esempio la caldaia rappresentata in Fig. 7,a: le variabili manipolabili sono la quantità di calore sviluppata dal bruciatore per unità di tempo (che si regola agendo sulle portate di combustibile ed aria) e la portata dell'acqua di alimentazione. Il controllo si può eseguire in retroazione, secondo lo schema di Fig. 7,b, in base alle equazioni

$$\begin{aligned} M_1(s) &= G_{11}(s) E_1(s) + G_{12}(s) E_2(s) \\ M_2(s) &= G_{21}(s) E_1(s) + G_{22}(s) E_2(s) \end{aligned}$$

in cui è

$$G_{ij}(s) = K_{p,ij} \left( 1 + \frac{1}{T_{i,ij} s} + T_{d,ij} s \right) \quad (i, j = 1, 2)$$

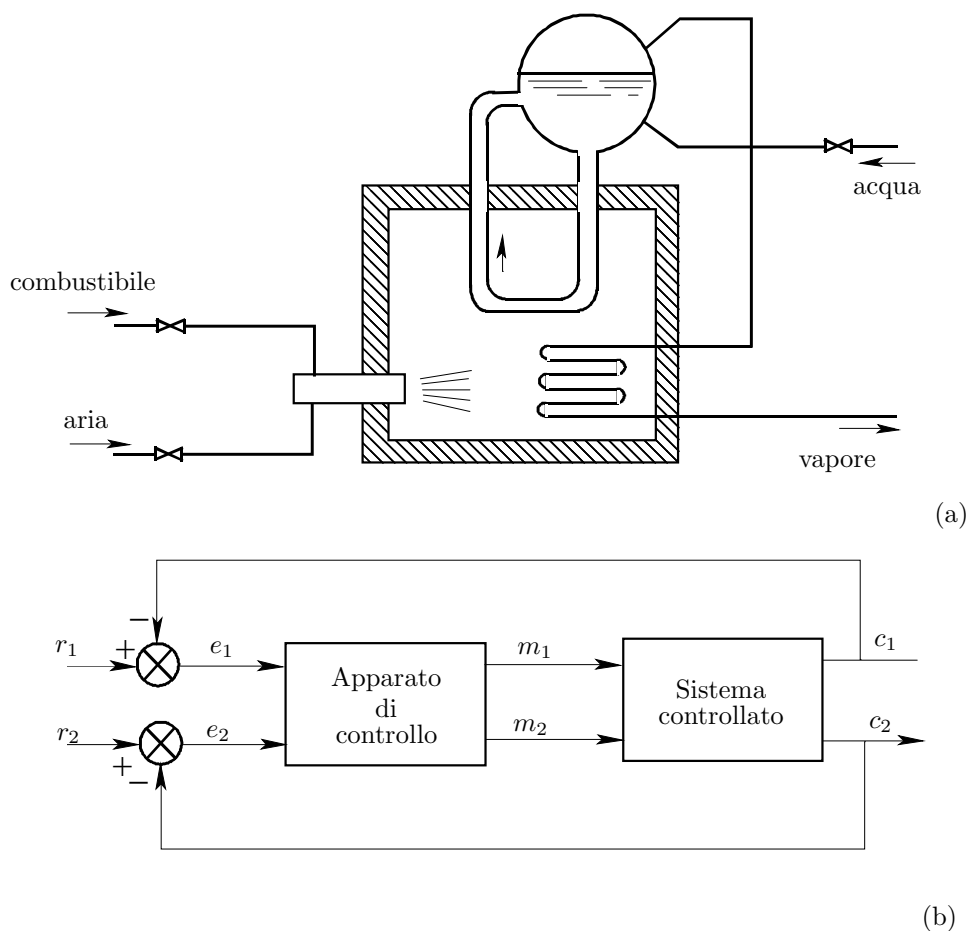


Figura 7: Regolazione di caldaia.

È infatti giustificato pretendere che, in generale, ciascuna delle variabili manipolabili sia legata ad ambedue le variabili errore, in quanto, per le interazioni presenti nel sistema, ciascuna delle variabili controllate dipende da entrambe le variabili manipolabili. Un dispositivo di controllo che rappresenti l'estensione per sistemi a più variabili dei dispositivi PID comprende pertanto ben 12 parametri liberi ed è, naturalmente, di difficile messa a punto.

## 2 Generalità sull'ottimizzazione statica e dinamica

Come si è precedentemente accennato, il controllo dei sistemi a più variabili non consiste di solito in una generalizzazione del controllo dei più semplici sistemi ad una sola variabile e ad una sola variabile controllata perchè, mentre in questi ultimi lo scopo del controllo è di far seguire alla variabile controllata un determinato programma, col controllo dei sistemi a più variabili si vuole ottenere qualcosa di più: l'ottimizzazione. In altre parole si vuole che l'elaboratore preposto al controllo faccia evolvere nel tempo il processo, entro certi vincoli imposti, nel modo più conveniente possibile, cioè ad esempio in modo che il costo di esercizio risulti minimo.

Vediamo come si può porre in termini matematici un problema di controllo ottimo. Si consideri un processo complesso, ad esempio un grande impianto chimico,

rappresentabile con il modello matematico

$$\begin{aligned}\dot{x}(t) &= f(x(t), u(t), d(t)) \\ y(t) &= g(x(t), u(t), d(t))\end{aligned}\tag{1}$$

in cui con  $x \in \mathbb{R}^n$  si indica lo stato, le cui componenti possono essere, ad esempio, temperatura, pressioni, composizioni chimiche, con  $u \in \mathbb{R}^m$  l'ingresso manipolabile o di controllo, le cui componenti possono essere portate di materie prime, combustibili, portate di prodotti di ricircolazione, con  $d \in \mathbb{R}^s$  l'ingresso non manipolabile, che comprende la composizione chimica delle materie prime, la temperatura, pressione, umidità dell'ambiente, l'efficienza dei catalizzatori, con  $y \in \mathbb{R}^q$  l'uscita, ossia il complesso delle variabili direttamente misurabili per ottenere informazioni sullo stato del processo.

Le variabili di ingresso manipolabili si suppongono individualmente regolabili mediante asservimenti di tipo convenzionale, i cui segnali di riferimento possono essere generati da un apparato di elaborazione centralizzato, come un calcolatore numerico di processo, dal quale vengono inviati i telecomandi con trasmissione in codice e conversione periferica digitale-analogico. Le variabili di ingresso non manipolabili si possono suddividere in tre categorie:

- a) variabili di ingresso non manipolabili, ma il cui andamento è conosciuto a priori con un certo tempo di anticipo  $T_p$ ;
- b) variabili di ingresso non manipolabili, ma misurabili istante per istante, direttamente o indirettamente;
- c) variabili di ingresso non manipolabili e non misurabili (dette più propriamente *disturbi*).

Come si potrà vedere nel seguito, tale suddivisione delle variabili di ingresso non manipolabili è importante per la determinazione del modo secondo il quale eseguire il controllo ottimo del sistema (cioè se è sufficiente operare un'ottimizzazione statica o è necessario ricorrere all'ottimizzazione dinamica).

Per eseguire il controllo ottimo del processo occorre porre in termini quantitativi il suo costo di esercizio, ossia disporre di una funzione

$$c(t) = f_0(x(t), u(t), d(t))$$

che ne rappresenta il costo di esercizio per unità di tempo. Esso infatti dipende in generale dalle variabili di stato, che possono rappresentare le quantità di prodotti e sottoprodotti ottenuti per unità di tempo, di materie prime immagazzinate, di potenza consumata, dalle variabili di controllo, che provocano l'introduzione nell'impianto di materiale o di potenza, cui si può associare un costo, dalle variabili di ingresso non manipolabili, che possono rappresentare un consumo o un deterioramento dell'impianto o una richiesta di mercato. Il costo di esercizio relativo ad un determinato periodo di tempo  $t_a \leq t \leq t_b$  è dato, naturalmente, dall'integrale

$$c = \int_{t_a}^{t_b} f_0(x(t), u(t), d(t)) dt\tag{2}$$

Nell'esercizio del processo occorre tener presente che gli andamenti delle variabili manipolabili e quelli, ad essi conseguenti, delle variabili di stato, non sono del tutto

arbitrari: sono spesso imposte condizioni di vincolo del tipo

$$\begin{aligned} U_{i,\min} &\leq u_i \leq U_{i,\max} & (i = 1, \dots, m) \\ X_{i,\min} &\leq x_i \leq X_{i,\max} & (i = 1, \dots, n) \end{aligned} \quad (3)$$

che nascono per naturali limitazioni di carattere fisico (saturazioni) sui valori delle variabili del processo.

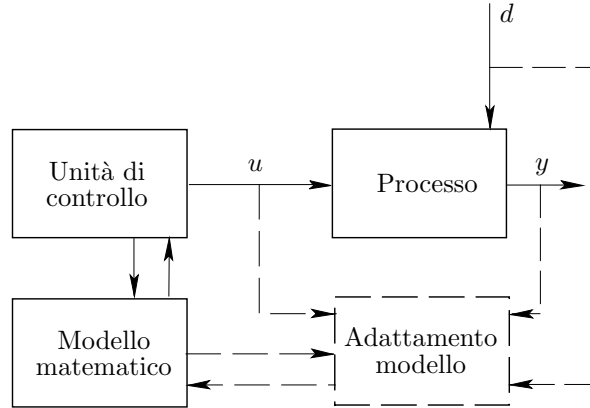


Figura 8: Schema di controllo predittivo basato su modello.

In Fig. 8 è riportato lo schema a blocchi di un controllo essenzialmente predittivo: esso presuppone la conoscenza completa del modello matematico e di tutte le variabili non manipolabili: la parte indicata a tratto corrisponde ad un complesso, distinto dal dispositivo di controllo predittivo vero e proprio, che esegue l'aggiornamento del modello matematico, in base a misure dirette ed indirette delle variabili non manipolabili. Facendo riferimento a tale schema, si distinguono due problemi principali di ottimizzazione predittiva: l'ottimizzazione statica e l'ottimizzazione dinamica.

#### + *Ottimizzazione statica*

Viene eseguita in base ad un modello matematico statico, ossia espresso da equazioni algebriche; si esegue una ottimizzazione statica quando il processo funziona quasi sempre a regime. Supponiamo per un momento che le grandezze di ingresso non manipolabili  $d$  siano costanti ( $= d_0$ ): il problema di ottimizzazione consiste nella determinazione del controllo  $u^o$  ammissibile (cioè tale che sia  $U_{\min} \leq u^o \leq U_{\max}$  e che la soluzione  $x^o$  dell'equazione  $0 = f(x^o, u^o, d_0)$ , che si suppone unica e che rappresenta lo stato di equilibrio corrispondente, soddisfi la  $X_{\min} \leq x^o \leq X_{\max}$ ) cui corrisponda un valore minimo  $c^o = f_0(x^o, u^o, d_0)$  del costo di esercizio per unità di tempo. In altri termini il costo  $c^o$  è minore (o tutt'al più uguale) di quello che corrisponderebbe a qualunque altra scelta ammissibile del controllo. Poiché le variabili non manipolabili si sono supposte costanti e note, si possono considerare parte integrante delle funzioni  $f$  ed  $f_0$  e riformulare il problema nel seguente modo.

Data l'equazione vettoriale

$$0 = f(x, u) \quad (4)$$

con  $f \in \mathbb{R}^n$ ,  $x \in \mathbb{R}^n$ ,  $u \in \mathbb{R}^m$ , con i vincoli

$$\begin{aligned} U_{\min} &\leq u \leq U_{\max} \\ X_{\min} &\leq x \leq X_{\max} \end{aligned} \quad (5)$$

determinare i valori  $u^o, x^o$  che soddisfino le (4), (5) e tali che sia

$$c^o = f_0(x^o, u^o) \leq f_0(x_1, u_1) \quad (6)$$

in cui  $x_1, u_1$  sono valori delle variabili di stato e di controllo soddisfacenti anche essi le (4), (5). La funzione  $f_0$  si dice *indice di comportamento*.

Se le variabili non manipolabili non sono costanti, ma si evolvono lentamente nel tempo, l'ottimizzazione si esegue ancora su base statica, in quanto il sistema si può ritenere funzionare in condizione di regime: il calcolatore di processo esegue periodicamente il calcolo del valore ottimo  $u^o$  del controllo, in base a un modello matematico e ad un indice di comportamento variabili con continuità nel tempo. In conclusione l'ottimizzazione statica si può eseguire quando le variabili di ingresso non manipolabili sono a variazione lenta e misurabili istante per istante, direttamente o indirettamente: l'aggiornamento del modello per tener conto di tale variazione viene eseguita con un controllo a secondo livello (parte indicata a tratto in Fig. 8), che può essere predittivo o esplorativo.

#### *Ottimizzazione dinamica*

Quando non si può adottare l'ottimizzazione statica, cioè quando il processo non funziona prevalentemente a regime, si deve ricorrere all'ottimizzazione dinamica, cioè ad una diversa posizione del problema matematico della ricerca dell'ottimo. La necessità di ricorrere all'ottimizzazione dinamica si presenta ad esempio quando le variabili non manipolabili non sono a variazione lenta, ma i loro andamenti sono prevedibili entro un certo intervallo di tempo  $t_a \leq t \leq t_b$  (ad esempio processi che funzionano cambiando periodicamente alcuni parametri: una centrale termoelettrica può avere un diagramma di carico, schematizzato con una spezzata o con una successione di gradini, che varia con legge di periodicità giornaliera). Un altro caso in cui si ricorre all'ottimizzazione dinamica si presenta quando si debba variare il punto di funzionamento di un processo che funziona prevalentemente a regime. Il processo è allora ottimizzato staticamente, ma se si vuole che, durante la transizione da uno stato di regime all'altro, il funzionamento rimanga ottimo, occorre che la transizione avvenga in modo che l'integrale (2), esteso al tempo di transizione, risulti minimo. Tutti questi problemi di ottimizzazione dinamica rientrano nella seguente formulazione generale. Data l'equazione differenziale vettoriale

$$\dot{x}(t) = f(x(t), u(t), t) \quad (7)$$

con i vincoli

$$\begin{aligned} X_{\min} &\leq x \leq X_{\max} \\ U_{\min} &\leq u \leq U_{\max} \end{aligned} \quad (8)$$

lo stato iniziale

$$x(t_a) = x_a \quad (9)$$

una condizione algebrica di vincolo sullo stato finale<sup>1</sup>

$$\beta(x(t_b)) = 0, \quad \beta \in \mathbb{R}^\ell, \quad (10)$$

---

<sup>1</sup> Tale vincolo può essere generalizzato a comprendere anche il tempo finale, cioè  $\beta(x(t_b), t_b) = 0$  (determinazione della traiettoria ottima per colpire un oggetto in movimento).

l'indice di comportamento<sup>2</sup>

$$c = \int_{t_a}^{t_b} f_0(x(t), u(t), t) dt \quad (11)$$

l'istante iniziale  $t_a$  ed eventualmente, ma non necessariamente, l'istante terminale  $t_b$ , determinare le funzioni di controllo ammissibili  $u^o(t)$ ,  $t_a \leq t \leq t_b$  (ammissibili in quanto soddisfano i vincoli dati dalle seconde delle (8) e la corrispondente traiettoria  $x^o(t)$ , iniziatesi nello stato (9), soddisfi i vincoli (8) e (10)), tali che sia

$$c^o = \int_{t_a}^{t_b} f_0(x^o(t), u^o(t), t) dt \leq \int_{t_a}^{t_b} f_0(x_1(t), u_1(t), t) dt \quad (12)$$

in cui con  $u_1(t)$  si sono indicate funzioni di controllo ancora ammissibili e con  $x_1(t)$  la corrispondente traiettoria. L'estremo finale dell'intervallo di controllo  $t_a \leq t \leq t_b$  può essere assegnato oppure incognito, nel qual caso in luogo della (12) occorre scrivere

$$c^o = \int_{t_a}^{t_b} f_0(x^o(t), u^o(t), t) dt \leq \int_{t_a}^{t'_b} f_0(x_1(t), u_1(t), t) dt$$

in cui con  $t'_b$  si è indicato un qualunque altro istante terminale ammissibile, cioè tale che la traiettoria  $x_1(t)$  vi soddisfi la (10).

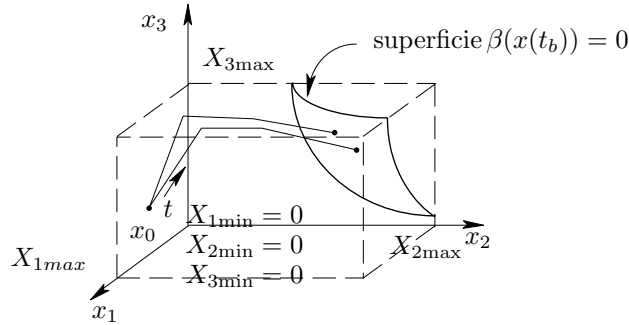


Figura 9: Interpretazione geometrica dell'ottimizzazione dinamica.

In Fig. 9 è riportata una semplice interpretazione geometrica del problema posto: fra le diverse traiettorie ammissibili nello spazio degli stati, cioè che congiungono lo stato iniziale assegnato con la varietà corrispondente al vincolo (10) e tali che siano soddisfatti i vincoli (4), si vuole scegliere quella che corrisponde al valore minimo dell'indice di comportamento. Il tipo particolare di vincolo sullo stato finale (10) richiede qualche spiegazione.

<sup>2</sup> Più in generale il costo può essere espresso da una relazione del tipo

$$c = \gamma(x(t_b), t_b) + \int_{t_a}^{t_b} f_0(x(t), u(t), t) dt$$

cioè funzione anche dello stato finale e del tempo finale, o solo dello stato finale e del tempo finale, qualora nella precedente relazione si ponga  $f_0 = 0$ . L'indice di comportamento è un *funzionale* della legge di controllo e della traiettoria, cioè un numero reale il cui valore dipende da una o più funzioni.

Lo stato finale può essere completamente assegnato, nel qual caso la (10) si particolarizza nella

$$x(t_b) - x_b = 0 \quad (13)$$

condizione del tutto analoga alla (9); inoltre, possono essere assegnate alcune delle variabili di stato all'istante finale, mentre le altre possono essere lasciate libere: infatti nell'esercizio di un processo si può desiderare che certe variabili particolarmente significative (ad esempio quantità di prodotti e sottoprodotti) raggiungano determinati valori imposti, mentre i valori finali di tutte le altre variabili di stato non interessano, e possono essere lasciati liberi per vincolare meno il problema e giungere pertanto ad un valore del costo d'esercizio presumibilmente minore. Se in particolare sono imposti i valori finali di alcune delle componenti dell'uscita  $y$ , che sono funzioni algebriche dello stato e del controllo, si hanno condizioni esattamente del tipo (10).

Considerazioni del tutto analoghe si possono effettuare in relazione al fatto che l'istante terminale  $t_b$  dell'intervallo di controllo possa eventualmente essere lasciato libero: infatti può non interessare il tempo impiegato per transitare da uno stato ad un altro, ma sia estremamente importante che il passaggio avvenga con il minimo costo globale. Un caso particolare in cui il tempo non è vincolato è il *controllo in tempo minimo*: la transizione in tempo minimo fra uno stato assegnato ed un secondo stato parzialmente o totalmente assegnato, rientra nella posizione generale dei problemi di ottimizzazione dinamica precedentemente illustrata: basta infatti assumere come indice di comportamento l'integrale

$$c = \int_{t_a}^{t_b} 1 dt = t_b - t_a \quad (14)$$

intendendo ovviamente che l'estremo finale dell'intervallo di controllo sia libero.

### 3 Programmazione matematica

Si consideri il problema di ottimizzazione statica corrispondente alle equazioni (4), (5) e (6): si ricorda che l'equazione vettoriale (5), equivalente ad  $n$  equazioni scalari, definisce lo stato di regime di un sistema dinamico con ingressi costanti ed uguali ad  $u$ ; naturalmente si ipotizza che il sistema sia asintoticamente stabile. Poiché nella posizione del problema di ottimizzazione è scomparsa ogni distinzione fra ingresso ed uscita, si possono indicare le variabili  $u$  ed  $x$  con lo stesso simbolo e, con notazione semplificata, ci si può pertanto ricondurre al seguente problema di ricerca di un minimo condizionato.

Data l'equazione vettoriale

$$0 = f(z) \quad (15)$$

rappresentante  $p$  equazioni scalari in  $q \geq p$  variabili, cioè con  $f \in \mathbb{R}^p$ ,  $z \in \mathbb{R}^q$ ,  $q \geq p$ , e i vincoli espressi dalle disuguaglianze

$$Z_{\min} \leq z \leq Z_{\max} \quad (16)$$

trovare un punto  $z^o$  soddisfacente le (15) e (16) tale che

$$c^o = f_0(z^o) \leq f_0(z_1) \quad (17)$$

in cui con  $z_1$  si è indicato un altro vettore arbitrario soddisfacente le (15) e (16). Tale riformulazione del problema è utile, in quanto più generale. Nel problema posto è  $p = n$ ,  $q = n + m$ ; se però ad esempio una variabile di stato è assegnata, scompare un'incognita dal sistema e si ha  $p = n$ ,  $q = n + m - 1$ , se è assegnata una variabile di uscita, avendosi un'equazione in più ( $y_j - g_j(x, u) = 0$ ), si ha  $p = n + 1$ ,  $q = n + m$ .

Si considera dapprima la soluzione del sistema posto in assenza dei vincoli (16): in tal caso ci si riconduce infatti a un notissimo problema dell'Analisi Matematica, quello della ricerca del minimo condizionato di una funzione. Le condizioni necessarie per il minimo si ottengono con il metodo dei moltiplicatori di Lagrange, che, per comodità di riferimento, si riepiloga brevemente.

Si costruisce la funzione *lagrangiana*

$$\Phi(z, \lambda) = f_0(z) + \sum_{i=1}^p \lambda_i f_i(z)$$

o, con notazione vettoriale

$$\Phi(z, \lambda) = f_0(z) + \lambda^T f(z) \quad (18)$$

in cui  $\lambda$  è il vettore delle  $p$  variabili ausiliarie  $\lambda_1, \dots, \lambda_p$ .

Se il punto  $z^o$  è di minimo, devono essere soddisfatte le condizioni.

$$\left. \frac{\partial \Phi}{\partial z_i} \right|_{z^o, \lambda^o} = \left. \frac{\partial f_0}{\partial z_i} \right|_{z^o} + \sum_{j=1}^p \lambda_j^o \left. \frac{\partial f_j}{\partial z_i} \right|_{z^o} = 0 \quad (i = 1, \dots, q) \quad (19)$$

in cui  $\lambda^o$  è arbitraria. La relazione (19) unitamente alla (15) rappresenta  $p + q$  equazioni nelle  $p + q$  incognite date dalle componenti dei vettori  $z$  e  $\lambda$ . Le condizioni (19) sono necessarie nell'ipotesi che la matrice jacobiana della funzione  $f$  abbia rango  $p$  nel punto  $z^o$  o, in altri termini, che i gradienti delle funzioni  $f_1, \dots, f_p$  siano linearmente indipendenti nel punto  $z^o$ . Tale ipotesi è sempre soddisfatta se, come si è supposto, il punto di equilibrio del sistema dinamico è asintoticamente stabile. Posto

$$F_{z^o} = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial z_1} & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial z_q} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_p}{\partial z_1} & \cdots & \frac{\partial f_p}{\partial z_q} \end{bmatrix}_{z^o}, \quad \text{per cui è } F_{z^o}^T = [ \text{grad } f_1|_{z^o} \quad \cdots \quad \text{grad } f_p|_{z^o} ]$$

le (19) si possono scrivere globalmente con notazione vettoriale

$$\text{grad } f_0|_{z^o} + F_{z^o}^T \lambda^o = 0, \quad \lambda^o \text{ arbitraria} \quad (20)$$

Le condizioni poste sono necessarie, ma non sufficienti per un minimo (valgono, in particolare, anche nei punti di massimo e di sella), per cui la loro applicazione pratica a problemi di ottimizzazione si può effettuare solo se si scelgono a posteriori, fra le diverse soluzioni delle equazioni, quelle corrispondenti ad un minimo assoluto. È naturale chiedersi se esistano casi in cui le condizioni sono anche sufficienti, oltre che necessarie. Un caso particolare, ma di grande interesse, in cui le condizioni sono necessarie e sufficienti si verifica quando la funzione  $f_0(z)$  è convessa e  $f(z)$  lineare.

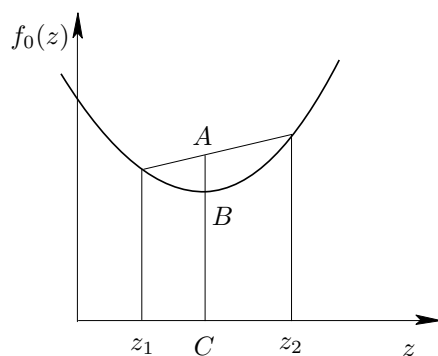


Figura 10: Funzione convessa.

**Definizione 1** Si dice che la funzione  $f_0(z)$  è convessa se vale la relazione

$$f_0(\alpha z_1 + (1 - \alpha) z_2) \leq \alpha f_0(z_1) + (1 - \alpha) f_0(z_2)$$

per ogni  $\alpha$  tale che sia  $0 \leq \alpha \leq 1$ .

Nel caso di una sola variabile indipendente, una funzione convessa ha l'andamento rappresentato in Fig. 10: se l'ascissa del punto C è  $\alpha z_1 + (1 - \alpha) z_2$ , le lunghezze dei segmenti BC e AC sono date rispettivamente dalle espressioni  $f_0(\alpha z_1 + (1 - \alpha) z_2)$  e  $\alpha f_0(z_1) + (1 - \alpha) f_0(z_2)$ , per cui vale evidentemente la condizione di definizione di funzione convessa. Le due seguenti proprietà delle funzioni convesse risulteranno utili nel seguito.

**Proprietà 1** Se  $f_0(z)$  è una funzione convessa, l'insieme

$$\mathcal{Z} = \{z : f_0(z) \leq k\}$$

è un insieme convesso, cioè contiene tutto il segmento di retta congiungente ogni coppia di punti.

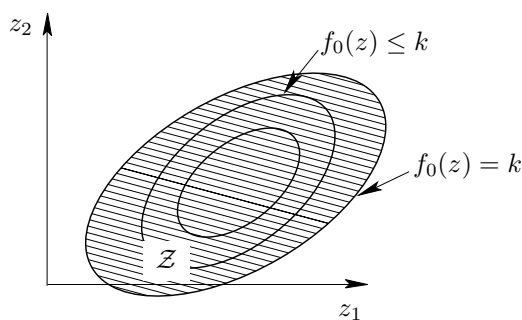


Figura 11: Curve isocosto.

In Fig. 11, con riferimento ad uno spazio bidimensionale, sono riportate le curve sulle quali una funzione convessa ha valore costante (dette spesso *curve isocosto* nei problemi di ottimizzazione, in cui la funzione convessa è il costo) e, a tratteggiarlo, l'insieme di punti in cui la funzione assume valore inferiore ad una costante assegnata.

**Proprietà 2** Una funzione convessa soddisfa la relazione

$$f_0(z) \geq f_0(\bar{z}) + (\text{grad } f_0|_{\bar{z}})^T (z - \bar{z})$$

**Dim.** Dalla relazione di definizione, posto  $z = z_1$ ,  $\bar{z} = z_2$ , si ottiene

$$\alpha f_0(z) \geq f_0(\bar{z} + \alpha(z - \bar{z})) - f_0(\bar{z}) + \alpha f_0(\bar{z})$$

da cui

$$f_0(z) \geq f_0(\bar{z}) + \frac{f_0(\bar{z} + \alpha(z - \bar{z})) - f_0(\bar{z})}{\alpha}$$

e, passando al limite per  $\alpha \rightarrow 0^+$ ,

$$f_0(z) \geq f_0(\bar{z}) + \sum_{i=1}^q \frac{\partial f_0}{\partial z_i} \Big|_{\bar{z}} (z_i - \bar{z}_i) \quad \square$$

La definizione e le proprietà delle funzioni convesse, sopra riportate, sono utili per dimostrare il seguente teorema, relativo ad un caso in cui le condizioni (19) sono necessarie e sufficienti.

**Teorema 1** Data la funzione convessa  $c = f_0(z)$ , con  $i$  vincoli lineari

$$Az + b = 0 \tag{21}$$

la condizione

$$\text{grad } f_0|_{z^o} + A^T \lambda^o = 0, \quad \lambda^o \text{ arbitraria}$$

è necessaria e sufficiente per un minimo condizionato in  $z^o$ .

**Dim.** Si ricava immediatamente

$$\begin{aligned} f_0(z_1) - f_0(z^o) &\geq (\text{grad } f_0|_{z^o})^T (z_1 - z^o) \\ &= -(A^T \lambda^o)^T (z_1 - z^o) \\ &= -(\lambda^o)^T (A(z_1 - z^o)) \end{aligned}$$

ed essendo l'ultimo termine entro parentesi nullo perchè sia  $z^o$  sia  $z_1$  soddisfano i vincoli (21), è dimostrato che è  $f_0(z) \leq f_0(z_1)$ .  $\square$

**Esempio 1** (Distribuzione ottima dei carichi fra più centrali termoelettriche interconnesse) Si suppone che una rete di distribuzione di energia elettrica, alimentata da centrali idroelettriche e termoelettriche, abbia un diagramma di carico giornaliero del tipo rappresentato in Fig. 12. Poiché le centrali idroelettriche sono più facilmente regolabili, si usano per le "punte" ( $P_a - P_r$ ), mentre si impiegano le centrali termiche per fornire una potenza di base ( $P_r$ ) variabile nel tempo secondo un programma predisposto. Il problema è di distribuire il carico  $P_r$  fra le diverse centrali termiche in modo che il costo di esercizio del sistema risulti il minimo possibile. Poiché la potenza richiesta  $P_r$  varia lentamente nel tempo, si può eseguire un'ottimizzazione statica.

Si suppone che il costo di esercizio per unità di tempo relativo ad una centrale termica in funzione della potenza prodotta abbia l'andamento rappresentato in

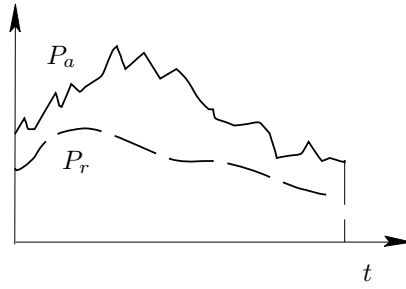


Figura 12: Diagramma di carico giornaliero.

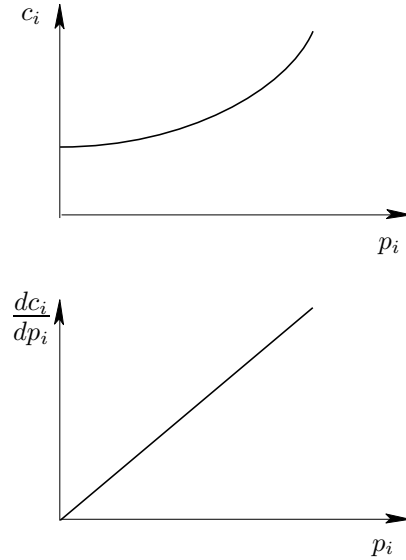


Figura 13: Costo di esercizio per unità di tempo.

Fig. 13,a, la derivata (costo incrementale) l'andamento rappresentato in Fig. 13,b. Si noti che la funzione di Fig. 13,a è convessa. Le centrali termiche siano in numero di  $n$ . Il problema posto consiste nella ricerca del minimo della funzione

$$c = \sum_{i=1}^n c_i(p_i)$$

in presenza del vincolo dato dalla condizione di congruenza delle potenze

$$P_r - \sum_{i=1}^n p_i + P_d(p_1, \dots, p_n) = 0$$

in cui con  $P_d(p_1, \dots, p_n)$  si è indicata la potenza dissipata nelle linee, funzione di tutte le potenze prodotte. Le variabili, che nella posizione generale del problema di ottimizzazione statica erano state indicate con il simbolo  $z$ , sono nel presente problema le potenze prodotte  $p_1, \dots, p_n$ .

Procedendo con l'impiego dei moltiplicatori di Lagrange, si costruisce la funzione

$$\Phi = \sum_{i=1}^n c_i(p_i) + \lambda \left( P_r + P_d - \sum_{i=1}^n p_i \right)$$

e la si deriva rispetto a tutte le incognite; ponendo le derivate parziali uguali a zero, si ottengono le condizioni di ottimo:

$$\frac{\partial \Phi}{\partial p_i} = \frac{dc_i}{dp_i} + \lambda \left( \frac{\partial P_d}{\partial p_i} - 1 \right) = 0 \quad (i = 1, \dots, n)$$

ossia

$$\lambda = \frac{dc_i}{dp_i} L_i$$

in cui si è posto

$$L_i = \frac{1}{1 - \frac{\partial P_d}{\partial p_i}}$$

Il coefficiente  $L_i$  dipende esclusivamente dalla funzione che rappresenta la potenza dissipata nelle linee. Quando si possono trascurare le perdite nelle linee, tutti i coefficienti  $L_i$  sono uguali all'unità e la relazione ricavata esprime il fatto che tutte le centrali devono funzionare a eguale costo incrementale. La soluzione del problema di ottimizzazione della ripartizione del carico fra più centrali termiche interconnesse in assenza di perdite consiste nel far sì che:

- a) la somma delle potenze prodotte sia eguale alla potenza richiesta;
- b) tutte le centrali funzionino con egual costo incrementale.

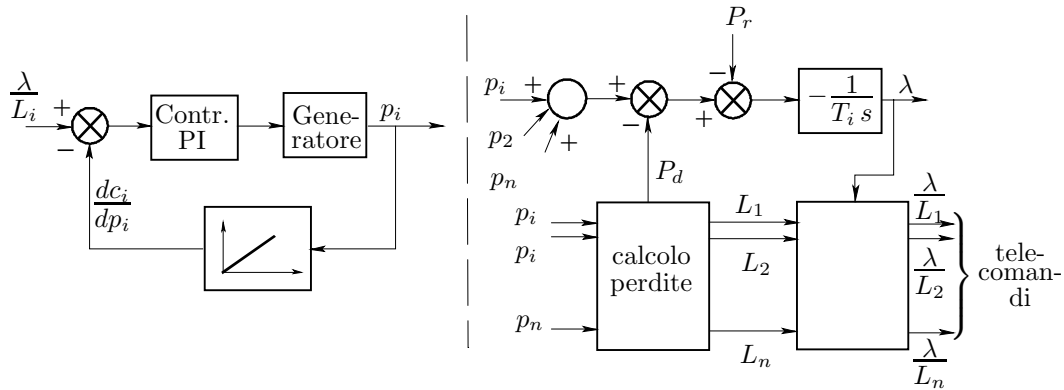


Figura 14: Schema di controllo per le centrali interconnesse.

In Fig. 14 è rappresentato lo schema di una possibile realizzazione di un controllo autoottimizzante per la distribuzione ottima dei carichi: a ciascuna centrale perviene per telecomando il valor di  $\lambda/L_i$ : un opportuno dispositivo di controllo locale fa sì che la potenza prodotta renda soddisfatta la condizione sul costo incrementale (nella figura tale dispositivo è stato schematizzato con un controllo PI, che a regime presenta errore nullo). In un centro per il dispacciamento dei carichi (rappresentato a destra nella figura) pervengono le telemisure relative alle potenze prodotte e si verifica se viene soddisfatta la condizione di congruenza delle potenze: se essa non è soddisfatta, un controllo integrale a secondo livello provvede alla variazione, nel senso opportuno, del valore  $\lambda$ .

Si noti che, in assenza di perdite, le condizioni di ottimo sono necessarie e sufficienti, essendo la condizione di vincolo lineare e la funzione costo convessa (in quanto somma di funzioni convesse).  $\square$

Finora si è considerato unicamente il problema di ricerca del minimo di una funzione  $c = f_0(z)$  soggetto a vincoli del tipo (15), trascurando i vincoli espressi da disuguaglianze del tipo (16). Vediamo ora come si possa operare la ricerca del minimo con condizioni di vincolo espresse da sole disuguaglianze. Successivamente si tratterà il caso in cui le condizioni dei tipi (15) e (16) sono contemporaneamente presenti. Per maggiore generalità, in luogo dei vincoli (16) si considerano le condizioni espresse dalla relazione vettoriale

$$h(z) \leq 0 \quad (22)$$

rappresentante  $s$  relazioni di disuguaglianza scalari, dette *vincoli di disuguaglianza*.

Le condizioni (16) sono un caso particolare delle precedenti: esse si possono scrivere infatti

$$-(z_i - Z_{i,\min})(Z_{i,\max} - z_i) \leq 0 \quad (i = 1, \dots, q) \quad (23)$$

Si noti che le funzioni a primo membro delle precedenti relazioni sono convesse.

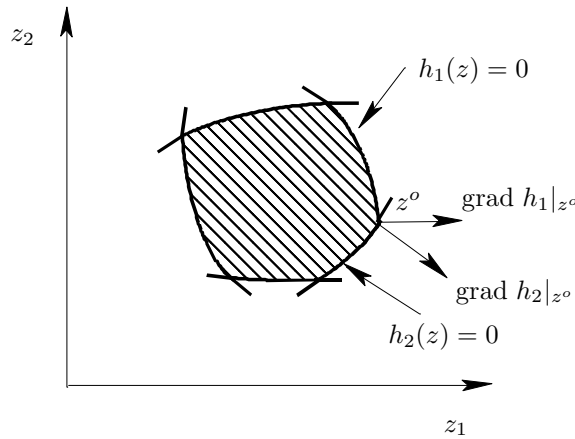


Figura 15: Vincoli di disuguaglianza.

Si introduce l'ipotesi che in ogni punto  $z^o$  in cui le (22) sono soddisfatte i gradienti di quelle delle  $h_j(z)$  che sono uguali a zero siano linearmente indipendenti. Il significato geometrico di tale ipotesi è illustrato in Fig. 15: in uno spazio bidimensionale sono assegnate 5 condizioni di vincolo del tipo (22), che definiscono un dominio sui punti del cui contorno una o due delle funzioni  $h_j(z)$  si annullano: nei punti in cui se ne annullano due, i loro gradienti devono essere linearmente indipendenti. Per la ricerca del minimo della funzione  $c = f_0(z)$  in presenza delle condizioni di vincolo (22) si esegue un procedimento analogo a quello seguito per la condizione di vincolo (15), introducendo ancora dei moltiplicatori di Lagrange (metodo di Kuhn-Tucker).

Si costruisce la funzione

$$\Phi(z, \mu) = f_0(z) + \sum_{j=1}^s \mu_j h_j(z)$$

o, con notazione vettoriale

$$\Phi(z, \mu) = f_0(z) + \mu^T h(z)$$

in cui  $\mu$  è il vettore delle  $s$  variabili ausiliarie  $\mu_1, \dots, \mu_s$ .

Se il punto  $z^o$  è di minimo, devono essere soddisfatte le condizioni

$$\left. \frac{\partial \Phi}{\partial z_i} \right|_{z^o, \mu^o} = \left. \frac{\partial f_0}{\partial z_i} \right|_{z^o} + \sum_{j=1}^s \mu_j^o \left. \frac{\partial h_j}{\partial z_i} \right|_{z^o} = 0 \quad (i = 1, \dots, q) \quad (24)$$

in cui  $\mu^o$  è un vettore non più completamente arbitrario, ma le cui componenti soddisfino le condizioni

$$\begin{cases} \mu_j^o \geq 0 \\ \mu_j^o h_j(z^o) = 0 \end{cases} \quad (j = 1, \dots, s) \quad (25)$$

Posto

$$H_{z^o} = \begin{bmatrix} \frac{\partial h_1}{\partial z_1} & \cdots & \frac{\partial h_1}{\partial z_q} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial h_s}{\partial z_1} & \cdots & \frac{\partial h_s}{\partial z_q} \end{bmatrix}_{z^o}, \quad \text{per cui è } H_{z^o}^T = [ \text{grad } h_1|_{z^o} \quad \cdots \quad \text{grad } h_s|_{z^o} ]$$

le (24) si possono scrivere globalmente con notazione vettoriale

$$\text{grad } f_0|_{z^o} + H_{z^o}^T \mu^o = 0, \quad (26)$$

in cui il vettore  $\mu^o$  non è arbitrario come  $\lambda^o$  nel caso dei vincolo di uguaglianza, ma deve soddisfare le (25).

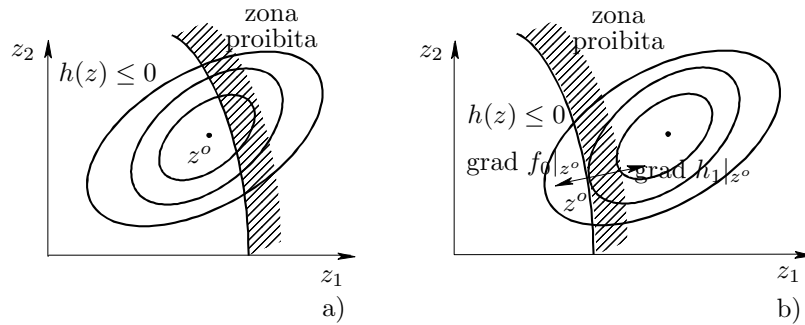


Figura 16: Significato delle condizioni di Kuhn e Tucker.

Per chiarire il significato geometrico delle condizioni necessarie enunciate si considera il caso di una funzione  $c = f_0(z_1, z_2)$ , definita in uno spazio bidimensionale, soggetta ad un unico vincolo  $h(z_1, z_2) \leq 0$ . La condizione (26) si scrive

$$\text{grad } f_0|_{z^o} + \mu \text{ grad } h|_{z^o} = 0$$

La Fig. 16,a corrisponde ad un caso in cui le condizioni sono soddisfatte con  $\mu = 0$ ,  $h(z^o) < 0$  (le condizioni per il minimo sono le stesse che si sarebbero avute in assenza di vincolo), la Fig. 16,b corrisponde a un caso in cui le condizioni sono invece soddisfatte con  $\mu > 0$ ,  $h(z^o) = 0$  (le condizioni per il minimo sono le stesse che si sarebbero avute in presenza del vincolo  $h(z) = 0$ ). Si sono così trattati dapprima il caso di ricerca del minimo di una funzione in presenza di vincoli espressi da eguaglianze, poi il caso della ricerca del minimo in presenza di vincoli espressi da disuguaglianze; il caso più generale, in cui sono presenti ambedue i tipi di vincoli, risulta una facile estensione e le condizioni ad esso relative vengono qui di seguito brevemente elencate, anche a scopo di riepilogo.

*Condizioni necessarie per un minimo.*

Se  $z^o$  è un punto di minimo della funzione  $c = f_0(z)$ ,  $z \in \mathbb{R}^q$ , in presenza delle condizioni di vincolo

$$f(z) = 0 \quad (27)$$

$$h(z) \leq 0 \quad (28)$$

con  $f \in \mathbb{R}^p$ ,  $h \in \mathbb{R}^s$ , nell'ipotesi che le matrici jacobiane in  $z^o$  delle funzioni  $f$  ed  $h$  abbiano rango massimo, valgono le relazioni

$$\text{grad } f_0|_{z^o} + F_{z^o}^T \lambda^o + H_{z^o}^T \mu^o = 0 \quad (29)$$

in cui  $F_z$  ed  $H_z$  indicano le matrici jacobiane delle funzioni  $f$  ed  $h$ . Nella (29) il vettore  $\lambda^o \in \mathbb{R}^p$  è arbitrario, mentre  $\mu^o \in \mathbb{R}^s$  deve soddisfare le condizioni  $\mu^o \geq 0$ ,  $(\mu^o)^T h(z^o) = 0$ .

È naturale chiedersi se le condizioni necessarie appena riepilogate risultino anche sufficienti sotto ulteriori ipotesi: si può dimostrare che ciò avviene se la funzione  $f_0$  è convessa, le  $f_i$  ( $i = 1, \dots, p$ ) lineari, le  $h_j$  ( $j = 1, \dots, s$ ) convesse. Vale infatti il seguente teorema.

**Teorema 2** *Data la funzione convessa  $c = f_0(z)$ , con i vincoli*

$$Az + b = 0 \quad (30)$$

$$h(z) \leq 0 \quad (31)$$

in cui le funzioni  $h_j(z)$  ( $j = 1, \dots, s$ ) si suppongono convesse, le condizioni

$$\text{grad } f_0|_{z^o} + A^T \lambda^o + H_{z^o}^T \mu^o = 0$$

$\lambda^o \in \mathbb{R}^p$  arbitraria,  $\mu^o \geq 0$ ,  $(\mu^o)^T h(z^o) = 0$ , sono necessarie e sufficienti per un minimo condizionato in  $z^o$ .

**Dim.** Si ricava immediatamente

$$\begin{aligned} f_0(z_1) - f_0(z^o) &\geq (\text{grad } f_0|_{z^o})^T (z_1 - z^o) \\ &= (-A^T \lambda^o)^T (z_1 - z^o) - (H_{z^o}^T \mu^o)^T (z_1 - z^o) \\ &= -(\lambda^o)^T A (z_1 - z^o) - (\mu^o)^T H_{z^o} (z_1 - z^o) \end{aligned}$$

Il termine  $-(\lambda^o)^T A (z_1 - z^o)$  è nullo perchè sia  $z_1$  sia  $z^o$  soddisfano i vincoli (30). Si ha pertanto

$$f_0(z_1) - f_0(z^o) \geq - \sum_{j=1}^s \mu_j^o (\text{grad } h_j|_{z^o})^T (z_1 - z^o)$$

e, ricordando che le funzioni  $h_j(z)$  sono convesse e i parametri  $\mu_j$  sono non negativi, si ottiene infine

$$f_0(z_1) - f_0(z^o) \geq - \sum_{j=1}^s \mu_j^o (h_j(z_1) - h_j(z^o)) = - \sum_{j=1}^s \mu_j^o h_j(z_1) \geq 0 \quad \square$$

Le condizioni precedentemente espone per la ricerca del minimo vincolato di una funzione corrispondono al metodo classico dei moltiplicatori di Lagrange, opportunamente completato per tener conto anche dei vincoli espressi da disequaglianze, di grande importanza nella soluzione dei problemi connessi con il controllo ottimo dei processi.

### 3.1 Metodo del gradiente

Qualora si impieghi un calcolatore numerico la ricerca dell'ottimo si esegue spesso con un procedimento iterativo, che porta alla soluzione del problema per approssimazioni successive, detto "metodo del gradiente". Il concetto sul quale si basa il metodo del gradiente è molto semplice: per esporlo si fa riferimento ad un caso particolare: si supponga di voler ricercare un punto di minimo della funzione  $c = f_0(z_1, z_2)$ , rappresentata con curve isocosto in Fig. 17.

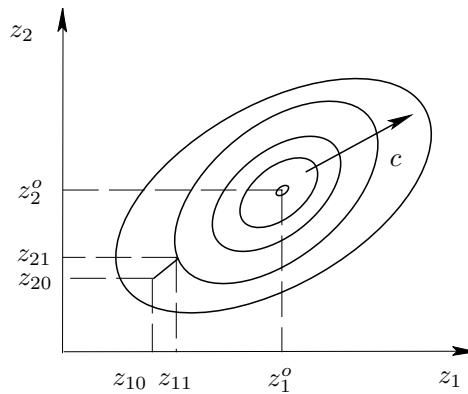


Figura 17: Illustrazione del metodo del gradiente.

A tal fine si impiega il seguente procedimento iterativo:

- 1) Si assegnano alle variabili  $z_1, z_2$  i valori iniziali arbitrari  $z_{10}, z_{20}$ .
- 2) Si calcolano le componenti del gradiente di  $f_0$  nel punto considerato:

$$\left. \frac{\partial f_0}{\partial z_1} \right|_{\substack{x_{10} \\ x_{20}}}, \quad \left. \frac{\partial f_0}{\partial z_2} \right|_{\substack{x_{10} \\ x_{20}}}$$

- 3) Si incrementano i valori iniziali secondo le relazioni:

$$z_{11} = z_{10} - k \left. \frac{\partial f_0}{\partial z_1} \right|_{\substack{x_{10} \\ x_{20}}}, \quad z_{21} = z_{20} - k \left. \frac{\partial f_0}{\partial z_2} \right|_{\substack{x_{10} \\ x_{20}}}$$

in cui con  $k$  si indica una costante positiva opportunamente scelta.

Con notazione vettoriale si può anche scrivere

$$z_1 = z_0 - k \operatorname{grad} f_0|_{z_0}$$

L'incremento così espresso equivale evidentemente ad uno spostamento nella direzione opposta a quella del gradiente, che, se sufficientemente piccolo, corrisponde certamente ad una diminuzione del costo (infatti è  $\Delta c \simeq \operatorname{grad} f_0|_{z_0} \Delta z$  per  $\Delta z$  piccolo). Le operazioni sopra descritte si ripetono a partire dal punto  $z_1 = (z_{10}, z_{20})$ . Per  $k$  sufficientemente piccolo, si trova così una successione di punti  $z_0, z_1, \dots$  convergente alla soluzione del problema  $z^o$ .

La scelta del punto iniziale  $z_0$  è critica quando la funzione  $f_0(z)$  presenti numerosi minimi relativi (si noti però che ciò non accade se essa è convessa). La scelta

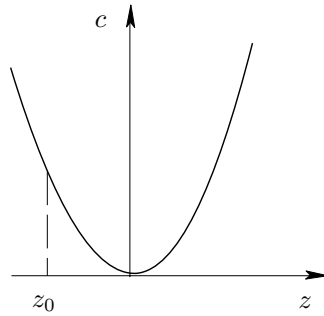


Figura 18: Funzione quadratica.

del coefficiente  $k$  è pure piuttosto critica: infatti se si sceglie un valore troppo piccolo il procedimento converge sicuramente, ma lentamente, mentre se si sceglie un valore troppo grande il procedimento può divergere. Rimane peraltro un campo piuttosto vasto di valori di  $k$  in cui il procedimento funziona in modo accettabile. Per vedere, con un semplice esempio, come influisca la scelta del valore di  $k$  sulla convergenza del metodo, si consideri la funzione quadratica

$$c = a z^2$$

che presenta evidentemente un punto di minimo nell'origine e si supponga di applicare il metodo del gradiente a partire da un punto arbitrario  $z_0$  (Fig. 18). Essendo

$$\left. \frac{dc}{dz} \right|_{z_0} = 2 a z_0^2$$

la successione calcolata con il metodo del gradiente è

$$z_0, z_1 = z_0 - 2ka z_0 = z_0(1 - 2ka), \dots, z_n = z_0(1 - 2ka)^n, \dots$$

Se è  $0 < ka < 1/2$ , la successione ha l'andamento rappresentato in Fig. 19,a: essa tende al punto di minimo in modo asintotico; se è  $ka = 1/2$ , si perviene al punto di minimo con un solo passo, come è indicato in Fig. 19,b; se è  $1/2 < ka < 1$  si ha ancora la convergenza, ma in modo oscillatorio, come in Fig. 19,c ed infine, se è  $ka > 1$  il procedimento non converge, come si può vedere in Fig. 19,d.

Per rendere più semplice l'esposizione, si è presentato il metodo del gradiente facendo riferimento al caso di una funzione di due sole variabili, caso in cui la giustificazione geometrica del metodo è particolarmente chiara. Naturalmente il metodo si può estendere senza alcuna difficoltà al caso di funzioni di un numero di variabili maggiore. Il metodo si può inoltre facilmente modificare per tener conto di eventuali vincoli: si suppone ad esempio che siano presenti condizioni di vincolo del tipo

$$f_i(z) = 0 \quad (i = 1, \dots, p) \tag{32}$$

e si suppone che nel punto iniziale  $z_0$  esse siano soddisfatte. Si vuole scegliere l'incremento  $\Delta z = z_1 - z_0$  in modo che le (32) siano soddisfatte anche nel punto  $z_1$ . Se l'incremento  $\Delta z$  ha il modulo sufficientemente piccolo, deve essere

$$F|_{z_0} \Delta z = 0 \tag{33}$$

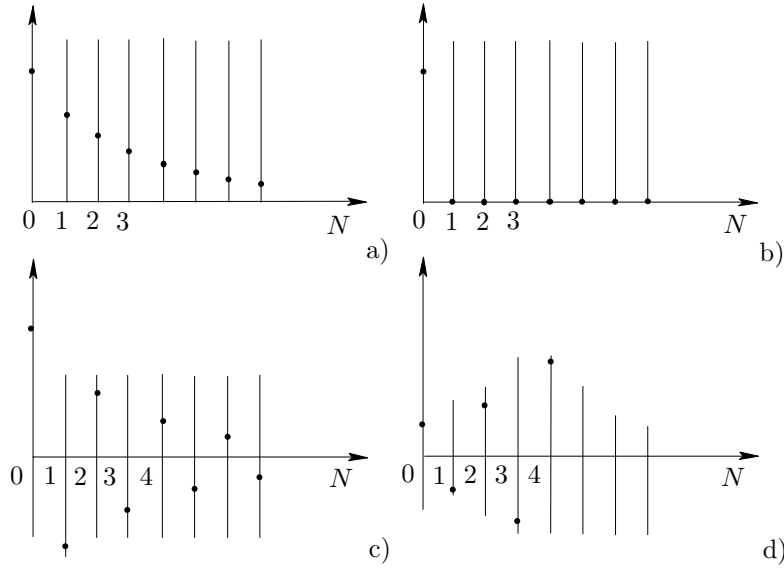


Figura 19: Convergenza e divergenza del metodo del gradiente.

in cui con  $F|_{z_0}$  si indica la matrice jacobiana delle funzioni  $f_i$  calcolata nel punto  $z_0$ : assumendo che tale matrice abbia caratteristica massima, il sistema lineare (33) permette di ricavare  $p$  delle componenti di  $\Delta z$  in funzione delle altre  $q - p$ : supponendo, il che non lede la generalità, di poter ricavare le prime  $p$  in funzione delle rimanenti, si pone:

$$\Delta z' = (\Delta z_1, \dots, \Delta z_p), \quad \Delta z'' = (\Delta z_{p+1}, \dots, \Delta z_q); \quad F_{z_0} = (F'_{z_0}, F''_{z_0})$$

per cui il sistema (33) si può scrivere

$$F'_{z_0} \Delta z' + F''_{z_0} \Delta z''$$

e, risolvendo:

$$\Delta z' = B_{z_0} \Delta z'', \quad \text{in cui è } B_{z_0} = (F'_{z_0})^{-1} F''_{z_0}$$

Si ottiene pertanto

$$\begin{aligned} \Delta c &= \text{grad} f_0|_{z_0} \Delta z = \text{grad} f_0|'_{z_0} \Delta z' + \text{grad} f_0|''_{z_0} \Delta z'' \\ &= (B_{z_0}^T \text{grad} f_0|'_{z_0} + \text{grad} f_0|''_{z_0}) \end{aligned}$$

In tal modo si è espresso l'incremento di costo in funzione dei soli incrementi  $\Delta z''$ , che sono liberi, mentre gli incrementi  $\Delta z'$  sono ad essi legati attraverso le condizioni di vincolo. Basta assumere

$$\Delta z'' = -k (B_{z_0}^T \text{grad} f_0|'_{z_0} + \text{grad} f_0|''_{z_0})$$

e procedere iterativamente.

Come è indicato in Fig. 20, relativa al caso della ricerca del minimo di una funzione di due sole variabili in presenza di una sola condizione di vincolo, il procedimento indicato porta ad una restrizione dell'evoluzione sul luogo dei punti che soddisfano le (32). In pratica, poiché ad ogni iterazione la curva viene approssimata con la tangente, dopo un certo numero di iterazioni si può presentare uno scostamento da tale

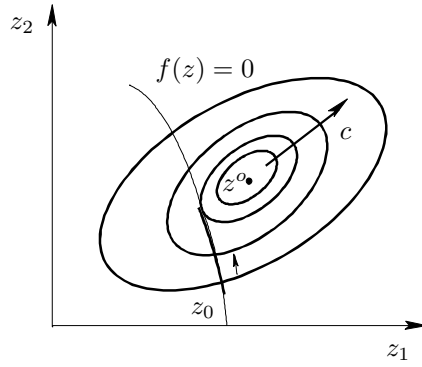


Figura 20: Metodo del gradiente con vincolo di uguaglianza.

luogo. È pretanto opportuno che, quando si riscontra un certo errore nel soddisfacimento delle (32), venga operata una correzione. Se, ad esempio, ciò si verifica al  $k$ -esimo passo, mantenendo invariato il vettore  $z''$  si può determinare il vettore  $z'$  applicando il metodo del gradiente alla funzione

$$\sum_{i=1}^n f_i(z', z''_k)$$

funzione della sola  $z'$  nei cui punti di minimo (in cui la funzione assume il valore 0) le (32) sono evidentemente soddisfatte.

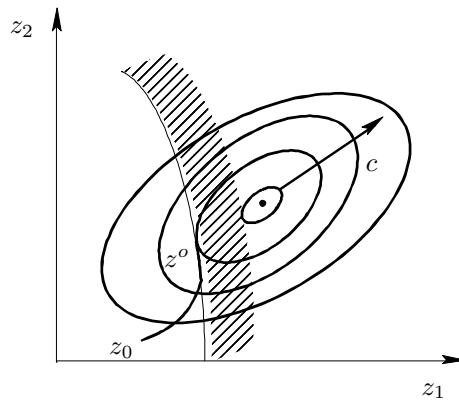


Figura 21: Metodo del gradiente con vincolo di disuguaglianza.

Quando si hanno dei vincoli del tipo

$$h_j(z) \leq 0 \quad (j = 1, \dots, s) \quad (34)$$

si può procedere in diversi modi. Uno di questi consiste nel ripetere due volte il calcolo dell'incremento per ogni passo: una prima volta si ignorano i vincoli espressi da ineguaglianze: se il punto così determinato viola alcuni dei vincoli, si ripete il calcolo tenendo conto di quei vincoli con il segno di uguaglianza, usando perciò un procedimento identico a quello seguito per tener conto dei vincoli (32). La Fig. 21 si riferisce ad un esempio in uno spazio bidimensionale.

## 4 Il principio del massimo di Pontryagin

Il problema dell'ottimizzazione dinamica, nella formulazione introdotta al Paragrafo 2, è un tipico problema di calcolo delle variazioni, consistente nella ricerca della traiettoria (o delle traiettorie) corrispondente ad un minimo di un dato funzionale. Un apporto relativamente recente (1959) al calcolo delle variazioni (che si è sviluppato, come campo di ricerca matematica, principalmente nel secolo scorso) è stato dato da Pontryagin, che ha enunciato un sistema di condizioni necessarie per l'ottimo sotto una forma particolarmente adatta per la soluzione di problemi connessi al controllo dei processi. Nel presente paragrafo le condizioni di Pontryagin vengono enunciate in modo schematico ed applicate per la soluzione di due problemi di ottimizzazione dinamica particolarmente interessanti: il controllo in tempo minimo di un sistema lineare ed il controllo di un sistema lineare con un indice di comportamento dato dall'integrale di una funzione quadratica.

### 1. Posizione del problema

I dati occorrenti per la definizione di un tipico problema di ottimizzazione dinamica sono i seguenti.

a) Il sistema differenziale

$$\dot{x}(t) = f(x(t), u(t), t) \quad (35)$$

in cui  $x \in \mathbb{R}^n$  rappresenta lo *stato*,  $u \in \mathbb{R}^m$  il *controllo* ed  $f \in \mathbb{R}^n$  le *funzioni del sistema*, continue a tratti rispetto al tempo, continue e dotate di derivate parziali prime continue rispetto a tutti gli altri argomenti.

b) Le condizioni di vincolo sul controllo

$$U_{\min} \leq u \leq U_{\max} \quad (36)$$

c) L'istante iniziale e lo stato iniziale

$$t_a, \quad x_a = x(t_a) \quad (37)$$

d) I vincoli sullo stato finale

$$\beta(x(t_b), t_b) = 0 \quad (38)$$

in cui le componenti della funzione vettoriale  $\beta \in \mathbb{R}^\ell$  si suppongono continue, dotate di derivate parziali prime continue e con matrice jacobiana di rango  $\ell$  in ogni punto  $(x(t_b), t_b)$  soddisfacente la (38).

e) Eventualmente (ma non necessariamente) l'istante finale

$$t_b \quad (39)$$

Si dice che la *legge di controllo*

$$u(t) \quad t_a \leq t \leq t_b \quad (40)$$

le cui componenti sono funzioni del tempo continue a tratti e soddisfacenti in ogni istante i vincoli (36), corrisponde ad una *traiettoria ammissibile* se, risolvendo il sistema (35) a partire dalla condizione iniziale (37) con il controllo espresso dalla (40), si ottiene una traiettoria nello spazio degli stati

$$x(t) \quad t_a \leq t \leq t_b \quad (41)$$

tale che lo stato finale  $x(t_b)$  soddisfi i vincoli (38).

Assegnate inoltre le funzioni

$$\gamma(x, t), \quad f_0(x, u, t) \quad (42)$$

con  $\gamma$  continua ed  $f_0$  appartenente alla stessa classe delle funzioni a secondo membro della (35), la particolare traiettoria ammissibile

$$x^o(t), \quad t_a \leq t \leq t_b \quad (43)$$

corrispondente alla legge di controllo

$$u^o(t), \quad t_a \leq t \leq t_b \quad (44)$$

si dice *ottima* se corrisponde ad un minimo dell'indice di comportamento

$$c = \gamma(x(t_b), t_b) + \int_{t_a}^{t_b} f_0(x(t), u(t), t) dt \quad (45)$$

ossia se è

$$\gamma(x^o(t_b), t_b) + \int_{t_a}^{t_b} f_0(x^o(t), u^o(t), t) dt \leq \gamma(x_1(t_b), t_b) + \int_{t_a}^{t_b} f_0(x_1(t), u_1(t), t) dt$$

per ogni coppia di funzioni  $x_1(t)$ ,  $u_1(t)$  corrispondenti ad una traiettoria ammissibile e alla relativa legge di controllo.

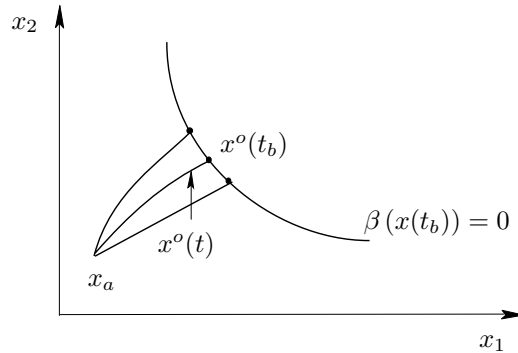


Figura 22: Traiettorie ammissibili.

Nel caso che l'istante finale  $t_b$  non sia assegnato, la soluzione del problema comprende anche la sua determinazione, oltre a quella delle leggi di controllo. Se i vincoli sullo stato finale corrispondono semplicemente all'imposizione dei valori di alcune coordinate, ad esempio le prime  $\ell$ ,

$$x_i(t_b) = x_{b,i} \quad (i = 1, \dots, \ell \leq n)$$

le (38) assumono la forma particolare

$$x_i(t_b) - x_{b,i} = 0 \quad (i = 1, \dots, \ell) \quad (46)$$

Se è  $\ell = n$  lo stato finale è completamente assegnato. In Fig. 22 è rappresentato un fascio di traiettorie ammissibili in uno spazio degli stati bidimensionale, in presenza

di una condizione di vincolo del tipo (38). Si suppone che la traiettoria indicata  $x^o(t)$  sia ottima.

## 2. Spazio degli stati ampliato

Introducendo la variabile ausiliaria  $x_0$  e aggiungendo al sistema (35) l'equazione differenziale

$$\dot{x}_0(t) = f_0(x(t), u(t), t) \quad (47)$$

con la condizione iniziale

$$x_0(t_a) = 0 \quad (48)$$

il problema posto si può riformulare in uno spazio degli stati ampliato  $\mathbb{R}^{n+1}$ , in cui lo stato si indica col simbolo  $\hat{x} := (x_0, x)$ . Le equazioni (35), (47) si possono rappresentare globalmente con la notazione

$$\dot{\hat{x}}(t) = \hat{f}(\hat{x}(t), u(t), t) \quad (49)$$

con  $\hat{f}$  a valori in  $\mathbb{R}^{n+1}$ . Nello spazio degli stati ampliato una traiettoria ammissibile verrà indicata con la notazione  $\hat{x}(t)$ , una traiettoria ottima con la notazione  $\hat{x}^o(t)$ . Anche nello spazio degli stati ampliato sono assegnate tutte le coordinate dello stato iniziale, in quanto, per le (48) e (37) si ha

$$\hat{x}^o(t_a) = (0, x_a) \quad (50)$$

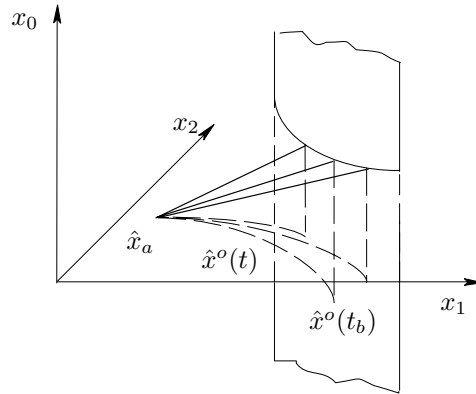


Figura 23: Traiettorie ammissibili nello spazio ampliato.

La prima coordinata dello stato finale è libera, mentre le altre sono vincolate ad appartenere all'insieme definito dalla (38); in altre parole nello spazio degli stati ampliato lo stato finale  $\hat{x}(t_b)$  è vincolato ad appartenere alla superficie cilindrica che si ottiene proiettando l'insieme definito dalle (38) nella direzione dell'asse  $x_0$ .

Quando il costo non dipende esplicitamente dallo stato finale, cioè se  $\gamma = 0$ , il valore della prima coordinata rappresenta l'indice di comportamento  $c = x_0(t_b)$ . Il sistema di traiettorie di Fig. 22 è rappresentato in Fig. 23 nello spazio degli stati ampliato: si noti che, seguendo tale rappresentazione, è possibile distinguere quale delle traiettorie segnate corrisponda al valore minimo dell'indice di comportamento.

Si indica con

$$\hat{F}^o := \begin{bmatrix} \frac{\partial f_0}{\partial x_0} & \cdots & \frac{\partial f_0}{\partial x_n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_n}{\partial x_0} & \cdots & \frac{\partial f_n}{\partial x_n} \end{bmatrix}_{\substack{\hat{x}^o \\ u^o}} \quad (51)$$

la matrice jacobiana delle funzioni a secondo membro delle (49), rispetto alle variabili di stato, calcolata nei vari punti della traiettoria  $\hat{x}^o(t)$ , corrispondente al controllo  $u^o(t)$ ,  $t_a \leq t \leq t_b$ . Gli elementi di tale matrice sono pertanto funzioni note del tempo, una volta che si conoscano  $\hat{x}^o(t)$  ed  $u^o(t)$ . Si noti che la prima colonna della matrice (51) è identicamente nulla, poiché la funzione  $\hat{f}$  non dipende da  $x_0$ .

### 3. Principio del massimo di Pontryagin

Condizione necessaria perchè la traiettoria  $\hat{x}^o(t)$ , corrispondente al controllo  $u^o(t)$ ,  $t_a \leq t \leq t_b$ , sia ottima è che esistano  $n + 1$  funzioni del tempo, mai contemporaneamente tutte nulle

$$\hat{\lambda}^o(t) = (\lambda_0^o(t), \dots, \lambda_n^o(t)) = (\lambda_0^o, \lambda^o) \quad (52)$$

dette *funzioni aggiunte*, soddisfacenti il sistema lineare omogeneo a coefficienti variabili nel tempo, detto *sistema aggiunto*,<sup>3</sup>

$$\dot{\hat{\lambda}}(t) = -(\hat{F}^o)^T \hat{\lambda}(t) \quad (53)$$

e le condizioni

$$\lambda_0^o = \text{cost} \leq 0 \quad (54)$$

$$\lambda^o(t_b) = -\text{grad } \gamma|_{x^o(t_b)} + \sum_{k=1}^{\ell} \mu_k \text{grad } \beta_k|_{x^o(t_b)} \quad (55)$$

(in cui le  $\mu_k$  ( $k = 1, \dots, \ell$ ) sono parametri arbitrari e  $\mu \in \mathbb{R}^\ell$  è il vettore avente come componenti tali parametri), tali che la *funzione hamiltoniana*

$$H(x, \hat{\lambda}, u, t) := \sum_{i=0}^n \lambda_i f_i(x, u, t) = \hat{\lambda}^T \hat{f}(x, u, t) \quad (56)$$

goda della proprietà

$$H(x^o, \hat{\lambda}^o, u^o, t) \geq H(x^o, \hat{\lambda}^o, u_1, t) \quad (57)$$

per ogni  $t$ ,  $t_a \leq t \leq t_b$  e per ogni  $u_1$  soddisfacente il vincolo (36).

La (57) esprime il *principio del massimo*: l'hamiltoniana, calcolata lungo la traiettoria ottima e per opportune funzioni aggiunte, soddisfacenti i vincoli posti, deve assumere il valore massimo, istante per istante, in corrispondenza del controllo ottimo.

---

<sup>3</sup> Per esteso tale sistema si scrive:

$$\dot{\lambda}_i(t) = - \sum_{k=0}^n \frac{\partial f_k}{\partial x_i} \Big|_{\substack{\hat{x}^o \\ u^o}} \lambda_k(t) \quad (i = 0, \dots, n)$$

Si vede che, non dipendendo le  $f_k$  dalla variabile  $x_0$ , si ha  $\dot{\lambda}_0 = 0$ , cioè  $\lambda_0 = \text{cost}$ , ed è quindi accettabile la condizione di vincolo (54)

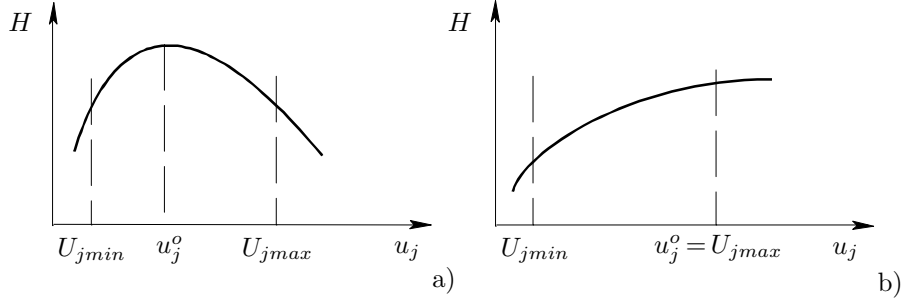


Figura 24: Significato della condizione del massimo.

Il significato della condizione del massimo è illustrato in Fig. 24, dove è riportata la funzione che rappresenta, in un certo istante, la dipendenza dell'hamiltoniana da una delle variabili di controllo: il valore ottimo della variabile di controllo deve sempre corrispondere al massimo (Fig. 24,a) tenendo conto del vincolo (Fig. 24,b).

La funzione a primo membro della (57), una volta determinate le funzioni aggiunte, viene a dipendere solo dal tempo, e verrà indicata nel seguito con il simbolo  $M(t)$ . Se l'istante finale  $t_b$  non è assegnato, si ha l'ulteriore condizione, da aggiungere alle (54), (55),

$$\frac{\partial}{\partial t} \left( -\gamma(x^o(t_b), t) + \sum_{k=1}^{\ell} \mu_k \beta_k(x^o(t_b), t) \right)_{t=t_b} + M(t_b) = 0 \quad (58)$$

che, qualora le funzioni  $\gamma$  e  $\beta$  non dipendano esplicitamente dal tempo, si riduce a

$$M(t_b) = 0 \quad (59)$$

Nel caso in cui siano date  $\ell$  coordinate dello stato finale, ad esempio le prime  $\ell$ , e quindi le condizioni di vincolo (38) assumano la forma (46), le (55) si scrivono

$$\begin{aligned} \lambda_i^o(t_b) &= \mu_i \quad (i = 1, \dots, \ell) \\ \lambda_i^o(t_b) &= - \left. \frac{\partial \gamma}{\partial x_i} \right|_{x^o(t_b)} \quad (i = \ell + 1, \dots, n) \end{aligned}$$

ossia i valori finali delle funzioni aggiunte corrispondenti alle coordinate assegnate sono arbitrari, quelli corrispondenti alle coordinate libere sono nulli se il costo non dipende esplicitamente dallo stato finale. In particolare, se lo stato finale è completamente assegnato, non si ha alcuna condizione di vincolo sui valori finali delle variabili aggiunte  $\lambda_i^o(t_b)$  ( $i = 1, \dots, n$ ).

#### 4. Proprietà della funzione $M(t)$

La funzione  $M(t)$  sopra definita gode delle seguenti proprietà.

- a)  $M(t)$  è continua in  $t_a \leq t \leq t_b$ .
- b) Vale la relazione

$$\frac{dM}{dt} = \left. \frac{\partial H}{\partial t} \right|_{\substack{\hat{x}^o \\ u^o \\ \hat{\lambda}^o}} = \sum_{i=0}^n \lambda_i^o \left. \frac{\partial f_i}{\partial t} \right|_{\substack{\hat{x}^o \\ u^o}} \quad (60)$$

Se il sistema è autonomo, cioè la funzione  $f$  non dipende esplicitamente dal tempo, dalla (60) discende

$$M(t) = \text{cost} \quad \text{in } t_a \leq t \leq t_b \quad (61)$$

Se il sistema è autonomo e l'istante finale non è assegnato, dalle (59) e (61) si ottiene

$$M(t) = 0 \quad \text{in } t_a \leq t \leq t_b \quad (62)$$

#### 4.1 Controllo in tempo minimo

Come primo esempio di applicazione del principio del massimo, si considera il controllo in tempo minimo dei sistemi lineari. Si prende in esame dapprima un caso particolare: il controllo in tempo minimo di un sistema del secondo ordine. È dato un sistema descritto dall'equazione differenziale:

$$\ddot{x}(t) + a \dot{x}(t) + b x(t) = u(t) \quad (63)$$

con le condizioni iniziali  $x(0) = x_{1,0}$ ,  $\dot{x}(0) = x_{2,0}$ . Passando alla rappresentazione nello spazio degli stati, la (63) si può scrivere

$$\begin{aligned} \dot{x}_1(t) &= x_2(t) \\ \dot{x}_2(t) &= -b x_1(t) - a x_2(t) + u(t) \end{aligned} \quad (64)$$

con le condizioni iniziali

$$x_1(0) = x_{1,0}, \quad x_2(0) = x_{2,0} \quad (65)$$

Si suppone che il sistema abbia una risposta oscillatoria: le radici dell'equazione caratteristica (o gli autovalori della matrice del sistema) sono  $\sigma \pm j\omega$ , con

$$\sigma = -\frac{a}{2}, \quad \omega = \frac{1}{2} \sqrt{4b - a^2}$$

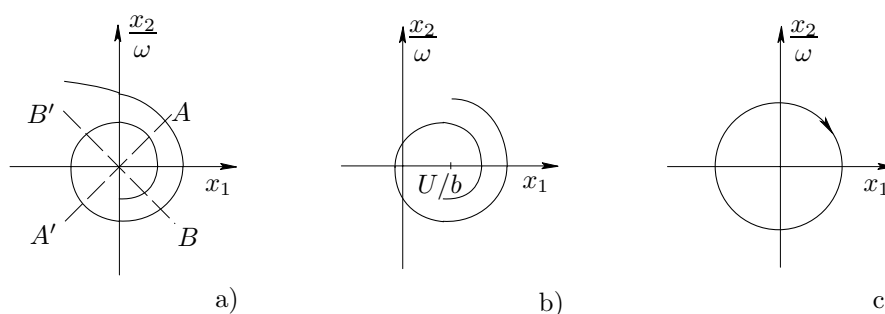


Figura 25: Traiettorie del sistema del secondo ordine.

L'andamento delle traiettorie nel piano degli stati relative al moto proprio è rappresentato in Fig. 25,a: si tratta di spirali logaritmiche tendenti all'origine. Vale la relazione  $AO/A'O = BO/B'O$  e gli archi  $AA'$ ,  $BB'$  vengono percorsi nel tempo  $T/2 = \pi/\omega$ . Se, anziché  $u = 0$ , si ponga  $u = \text{cost} = U$ , alla spirale logaritmica si deve sommare l'integrale particolare dell'equazione non omogenea  $x_2 = 0$ ,  $x_1 = U/b$ , e le traiettorie assumono l'andamento rappresentato in Fig. 25,b. Nel caso particolare

che sia  $a=0$  (sistema non smorzato), le traiettorie diventano archi di circonferenza (Fig. 25,c).

Nell'ipotesi che la variabile di controllo  $u$  sia soggetta alla condizione di vincolo

$$-U \leq u \leq U \quad \text{cioè} \quad |u| \leq U \quad (66)$$

si vuole determinare l'andamento del controllo corrispondente alla traiettoria che riporta il sistema nell'origine nel minor tempo possibile.

È pertanto completamente assegnato lo stato finale

$$x_1(t_b) = 0, \quad x_2(t_b) = 0 \quad (67)$$

mentre l'istante finale  $t_b$  non è assegnato. Il funzionale che si vuole minimo è

$$c = \int_0^{t_b} 1 \, dt$$

per cui l'equazione ausiliaria relativa allo spazio degli stati è

$$\dot{x}_0 = 1 \quad (68)$$

con condizione iniziale  $x_0(0) = 0$ . Si ha evidentemente  $c = x_0(t_b) = t_b$ .

Il sistema aggiunto è

$$\begin{aligned} \dot{\lambda}_0(t) &= 0 \\ \dot{\lambda}_1(t) &= b \lambda_2(t) \\ \dot{\lambda}_2(t) &= -\lambda_1(t) + a \lambda_2(t) \end{aligned} \quad (69)$$

Essendo completamente assegnato lo stato finale, le condizioni d'estremità  $\lambda_1(t_b)$ ,  $\lambda_2(t_b)$  sono completamente libere. Poiché, come si vedrà in seguito, interessa in particolare l'andamento della variabile aggiunta  $\lambda_2$ , si ricava dal sistema (69) l'unica equazione

$$\ddot{\lambda}_2(t) - a \dot{\lambda}_2(t) + b \lambda_2(t) = 0 \quad (70)$$

il cui integrale generale è

$$\lambda_2(t) = K e^{-\sigma t} \sin(\omega t + \varphi) \quad (71)$$

in cui  $K$  e  $\varphi$  sono costanti arbitrarie.

Si costruisce quindi la funzione hamiltoniana

$$H = \lambda_0 + \lambda_1 x_2 + \lambda_2 (-a x_2 - b x_1 + u) \quad (72)$$

La condizione del massimo, applicata all'hamiltoniana (72) fornisce

$$u(t) = U \operatorname{sign} \lambda_2(t) \quad (73)$$

in cui la funzione  $\operatorname{sign}$  ha l'andamento specificato in Fig. 26,a. Poiché la variabile aggiunta non può essere identicamente nulla in un certo intervallo di tempo, altrimenti si annullerebbero contemporaneamente tutte le variabili aggiunte in virtù della (62), si deduce che la legge di controllo ottima non può avere che l'andamento indicato in

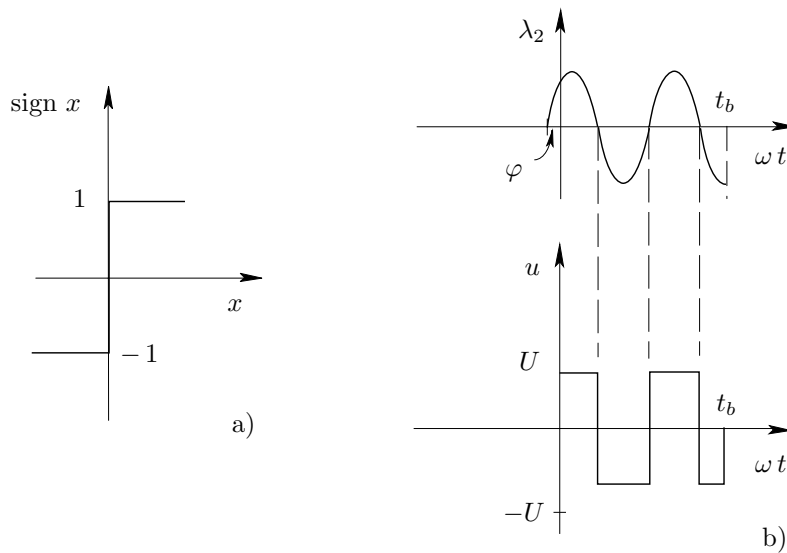


Figura 26: Legge di controllo tipo “bang-bang”.

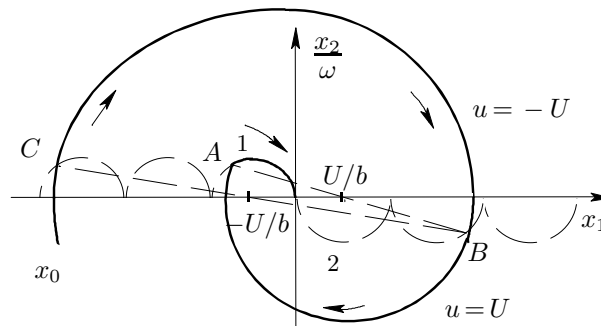


Figura 27: Controllo in tempo minimo del sistema non smorzato.

Fig. 26,b, cioè è una funzione periodica di periodo  $T = 2\pi/\omega$  a due soli valori (corrispondenti ai due estremi del campo variabilità del controllo). Una legge di controllo di questo tipo si dice “bang-bang”. Il valore dell’istante terminale  $t_b$  e della fase iniziale  $\varphi$  di Fig. 26 devono essere determinati imponendo le condizioni di vincolo sulla traiettoria (65) e (67).

L’andamento delle traiettorie è rappresentato in Fig. 27, che si riferisce al caso particolare in cui sia  $a=0$  (sistema con smorzamento nullo o oscillatore armonico). L’arco terminale della traiettoria deve appartenere ad una delle semicirconferenze 1, 2; L’ultima commutazione del controllo in un punto di una delle semicirconferenze (punto A), la penultima e le eventuali precedenti sono determinate di conseguenza, dovendo verificarsi periodicamente con periodo  $T/2$  (punti B, C). In Fig. 27 è rappresentata una possibile traiettoria: a partire da un qualunque punto di essa, seguendola si giunge nell’origine in minimo tempo. Le semicirconferenze a tratto rappresentano la *curva di commutazione*: per realizzare la legge di controllo ottimo basta porre  $u = -U$  quando lo stato è rappresentato da un punto al di sopra della curva,  $u = U$  quando lo stato è rappresentato da un punto sotto la curva. La costruzione si può estendere facilmente al caso in cui lo smorzamento non sia nullo (Fig. 28).

Per la realizzazione pratica del controllo in tempo minimo si può pertanto impie-

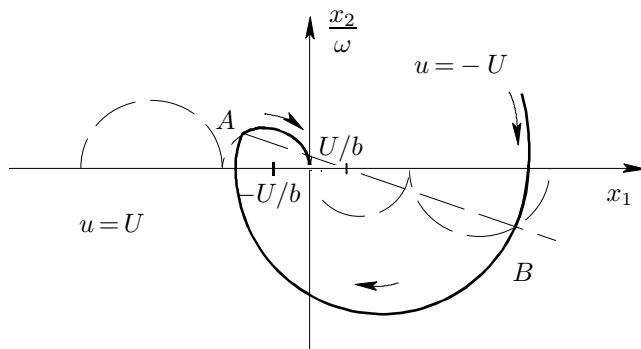


Figura 28: Controllo in tempo minimo del sistema smorzato.

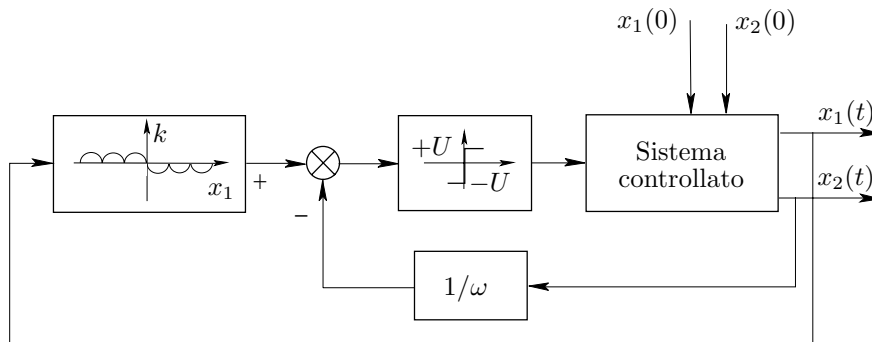


Figura 29: Impiego della curva di commutazione.

gare il dispositivo di Fig. 29, in cui la curva di commutazione viene riprodotta con un generatore di funzione. Il controllo è in retroazione, ma non si può considerare un controllo esplorativo, in quanto il sistema deve essere completamente determinato e noto a priori.

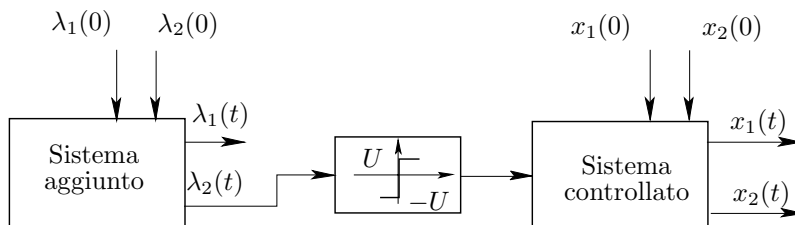


Figura 30: Controllo in tempo minimo ad azione diretta.

In alternativa si può impiegare il dispositivo di Fig. 30, in cui si risolve il sistema aggiunto mediante un calcolatore, a partire da una condizione iniziale che viene variata per tentativi, in modo da ottenere che la traiettoria del sistema controllato passi per l'origine. La determinazione dei parametri  $\lambda_1(0)$ ,  $\lambda_2(0)$  in realtà non è difficoltosa poiché, essendo il sistema aggiunto lineare omogeneo e dipendendo il controllo solo dal segno di  $\lambda_2$ , qualora si moltiplichino ambedue le variabili aggiunte per una stessa costante positiva la soluzione non cambia: si ha quindi in effetti un solo grado di libertà. In ambedue i casi, una volta raggiunto (o sufficientemente approssimato) lo stato finale voluto, occorre disinserire l'apparato. Le notazioni matriciali precedente-

mente introdotte consentono di risolvere, con espressioni sufficientemente compatte, anche il caso generale del controllo in tempo minimo di un sistema di ordine  $n$ .

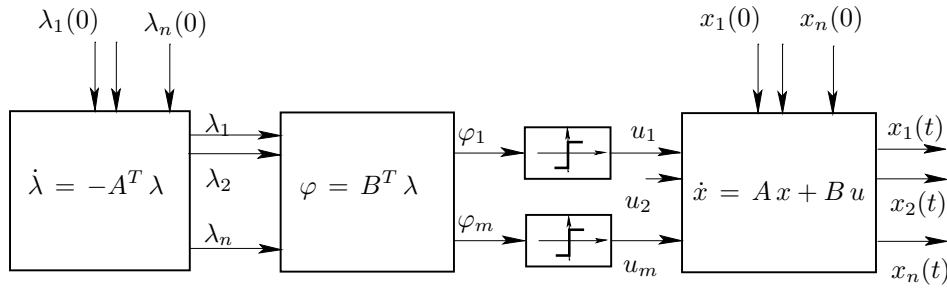


Figura 31: Controllo in tempo minimo di un sistema lineare generico.

Dato il sistema lineare

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t) \quad (74)$$

gli stati estremi

$$x(0), \quad x(t_b) \quad (75)$$

il vincolo

$$U_{\min} \leq u \leq U_{\max} \quad (76)$$

l'indice di comportamento

$$\int_0^{t_b} 1 dt \quad (77)$$

determinare la legge di controllo ottima.

Il sistema aggiunto è

$$\begin{aligned} \dot{\lambda}_0(t) &= 0 \\ \dot{\lambda}(t) &= -A^T \lambda(t) \end{aligned} \quad (78)$$

e l'hamiltoniana

$$H = \lambda_0 + \lambda^T (Ax + Bu) = \lambda_0 + \lambda^T Ax + u^T (B^T \lambda) \quad (79)$$

Indicando con  $\varphi(t)$  il vettore  $B^T \lambda(t)$ , a  $m$  componenti, la condizione del massimo richiede che sia

$$u_j = \begin{cases} U_{j,\max} & \text{se } \varphi_j \geq 0 \\ U_{j,\min} & \text{se } \varphi_j < 0 \end{cases} \quad (j=1, \dots, m) \quad (80)$$

per cui la traiettoria ottima si può determinare con il dispositivo di Fig. 31, variando per tentativi le componenti di  $\lambda(0)$  fino ad ottenere una traiettoria passante per entrambi gli estremi imposti. Si può dimostrare che se il sistema è *normale* (cioè è completamente controllabile rispetto a ciascuna delle  $u_j$ ) nessuna delle  $\varphi_j$  si annulla identicamente. Se non tutte le coordinate dello stato finale fossero assegnate, si potrebbe impiegare ancora il dispositivo di Fig. 31 imponendo però che all'istante terminale siano soddisfatte le condizioni  $\lambda_i(t_b) = 0$ , in cui i valori dell'indice  $i$  sono quelli corrispondenti alle coordinate non assegnate.

## 4.2 Controllo lineare-quadratico (LQ) con vincoli

Anche in questo caso si considera dapprima il controllo di un particolare sistema del secondo ordine, per poi estendere i risultati al caso generale.

Dato il sistema lineare

$$\begin{aligned}\dot{x}_1(t) &= x_2(t) \\ \dot{x}_2(t) &= u(t)\end{aligned}\tag{81}$$

gli stati estremi

$$x_i(0), \quad x_i(t_b) \quad (i=1, 2)\tag{82}$$

i vincoli

$$-U \leq u \leq U\tag{83}$$

l'indice di comportamento

$$c = \frac{1}{2} \int_0^{t_b} (q x_1^2(t) + r u^2(t)) dt\tag{84}$$

in cui  $q$  ed  $r$  sono costanti positive, determinare la legge di controllo ottima, essendo l'istante  $t_b$  assegnato.

Il sistema aggiunto è

$$\begin{aligned}\dot{\lambda}_0(t) &= 0 \\ \dot{\lambda}_1(t) &= -\lambda_0 q x_1(t) \\ \dot{\lambda}_2(t) &= -\lambda_1(t)\end{aligned}\tag{85}$$

e l'hamiltoniana

$$H = \lambda_0 \frac{1}{2} (q x^2 + r u^2) + \lambda_1 x_2 + \lambda_2 u\tag{86}$$

Ignorando per un attimo i vincoli (83), posto

$$\frac{\partial H}{\partial u} = \lambda_0 r u + \lambda_2 = 0$$

si ricava che il valore massimo dell'hamiltoniana si ha per

$$u(t) = \frac{1}{r} \lambda_2(t)\tag{87}$$

(si è posto  $\lambda_0 = -1$ , il che è sempre possibile, per l'omogeneità del sistema aggiunto, se è  $\lambda_0 \neq 0$ , condizione che è verificata se il punto finale assegnato è raggiungibile, con un controllo in tempo minimo, in un tempo inferiore a  $t_b$ ).

Il calcolo della traiettoria ottima si può eseguire con il dispositivo di Fig. 32, variando per tentativi le condizioni iniziali del sistema aggiunto: infatti, poiché l'hamiltoniana è una funzione concava in  $u$ , il massimo vincolato si può ottenere dal massimo libero limitandolo secondo le (83).

Passando alla trattazione del caso generale, si considera il sistema

$$\dot{x}(t) = A x(t) + B u(t)\tag{88}$$

di cui sono dati gli stati estremi

$$x(0), \quad x(t_b)\tag{89}$$

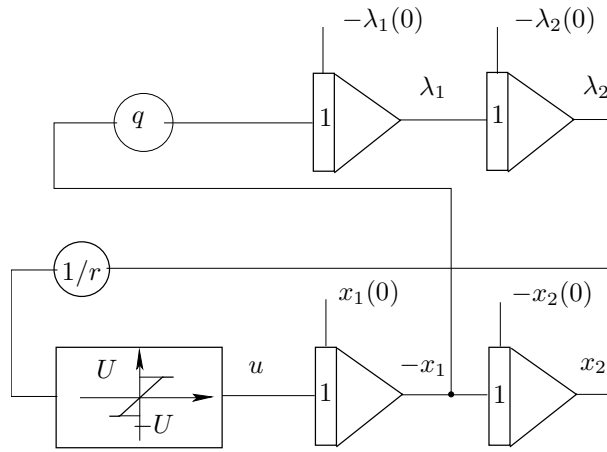


Figura 32: Dispositivo analogico per il controllo lineare-quadratico.

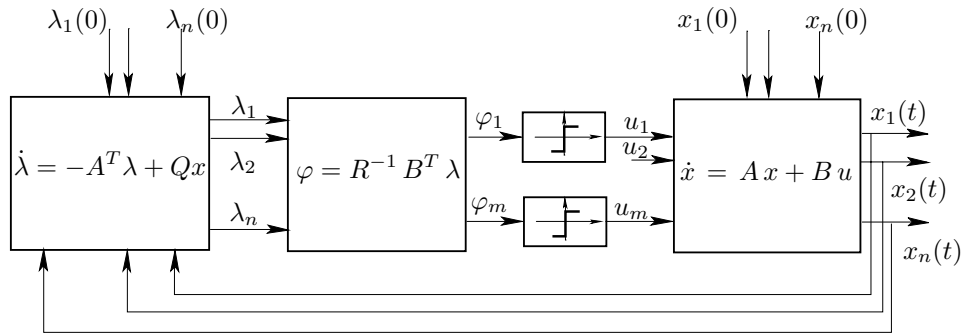


Figura 33: Dispositivo per il controllo lineare-quadratico.

e i vincoli

$$U_{\min} \leq u \leq U_{\max} \quad (90)$$

L'indice di comportamento da rendere minimo è

$$c = \frac{1}{2} \int_0^{t_b} (x^T(t) Q x(t) + u^T(t) R u(t)) dt \quad (91)$$

in cui la matrice  $Q$  è simmetrica semidefinita positiva (per cui la corrispondente forma quadratica nelle variabili di stato è sempre non negativa), la matrice  $R$  è diagonale con elementi positivi. L'istante terminale  $t_b$  si suppone assegnato. Il sistema aggiunto è

$$\begin{aligned} \dot{\lambda}_0(t) &= 0 \\ \dot{\lambda}(t) &= -\lambda_0 Q x(t) - A^T \lambda(t) \end{aligned} \quad (92)$$

e l'hamiltoniana

$$H = \frac{1}{2} \lambda_0 (x^T Q x + u^T R u) + \lambda (A x + B u) \quad (93)$$

Preciudendo per il momento dai vincoli (90), la condizione del massimo fornisce

$$\text{grad } H \Big|_u = \lambda_0 R u + B^T \lambda = 0 \quad (94)$$

da cui, posto  $\lambda_0 = -1$ , si ricava la legge di controllo ottima:

$$u(t) = R^{-1} B^T \lambda(t) \quad (95)$$

In presenza dei vincoli (90) si può saturare indipendentemente ogni controllo, come è indicato nello schema di Fig. 33, potendosi ottimizzare l'hamiltoniana indipendentemente rispetto ad ogni singola  $u_j$ , poichè la matrice  $Q$  è diagonale. Il controllo ottimo si può determinare, con il dispositivo di Fig. 33, scegliendo per tentativi i valori iniziali  $\lambda_1(0), \dots, \lambda_n(0)$  in modo da soddisfare la condizione di estremità data dalla seconda delle (89): si può dimostrare infatti che nel caso in esame esso esiste ed è unico.

### 4.3 Ottimizzazione esplorativa

L'ottimizzazione esplorativa è di tipo statico, cioè si impiega nel caso di processi funzionanti in condizioni di regime stazionario, quando il sistema sia soggetto a disturbi ad azione lenta e non misurabili. I sistemi cui si applica sono relativamente semplici, con poche variabili di controllo.

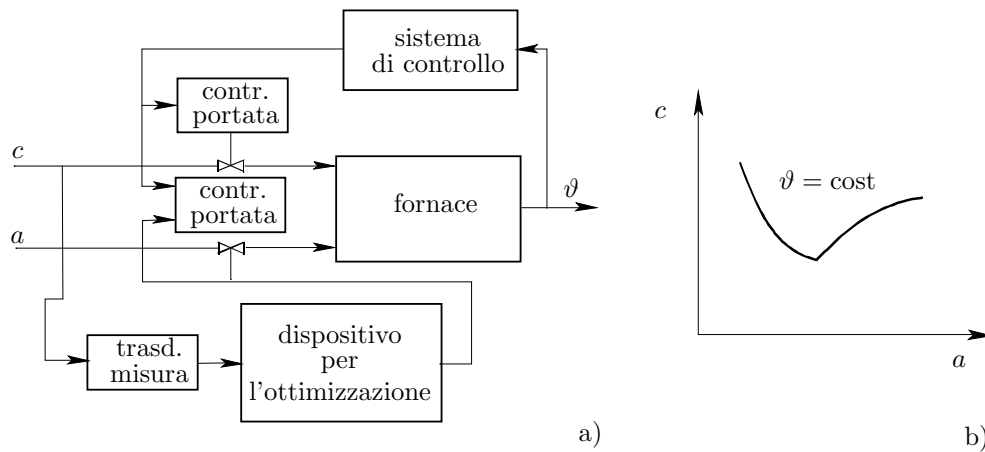


Figura 34: Controllo del rapporto aria/combustibile in un bruciatore.

Un tipico esempio relativo ad un caso in cui si impiega l'ottimizzazione esplorativa è il controllo del rapporto aria/combustibile in un bruciatore: si supponga di dover mantenere costante la temperatura di una fornace: un controllo di temperatura può agire contemporaneamente sulle portate di aria e di combustibile al bruciatore (Fig. 34,a). A parità di temperatura a regime, la quantità di combustibile consumato dipende fortemente dalla quantità di aria comburente, come è indicato in Fig. 34,b); se infatti la portata di aria è insufficiente, il combustibile non brucia completamente, se è eccessiva si ha una maggiore asportazione di calore nei fumi; esiste quindi una portata di aria ottima, ma difficilmente determinabile a priori perchè dipendente dalla qualità del combustibile, dalla temperatura e dall'umidità dell'aria.

Per tale ragione si può usare un controllo di tipo esplorativo, che determina automaticamente la portata di aria corrispondente al minimo consumo di combustibile e che può essere collegato al sistema come è indicato in Fig. 34,a.

Per realizzare un controllo esplorativo disponendo di un calcolatore numerico si può seguire un metodo analogo a quello del gradiente.

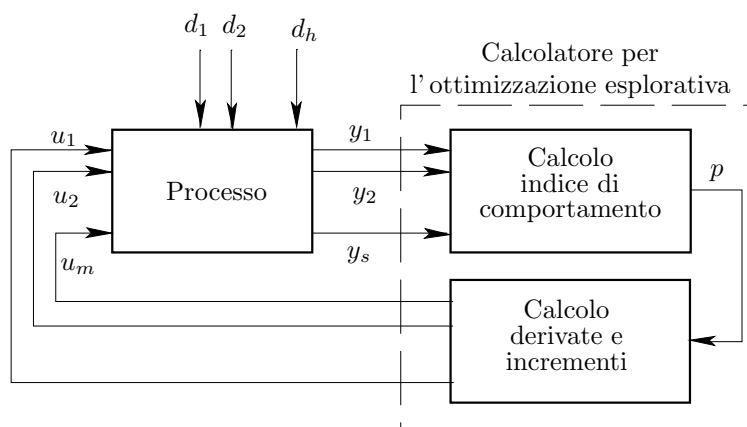


Figura 35: Ottimizzazione con il metodo del gradiente.

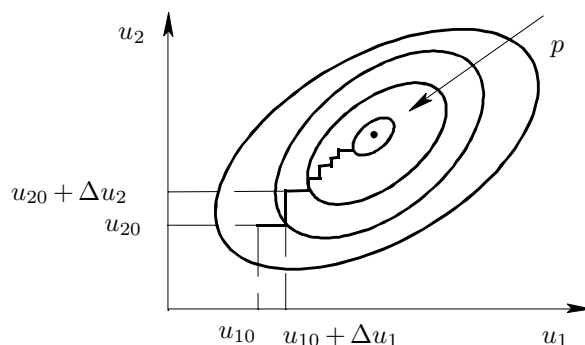


Figura 36: Curve di livello e metodo del gradiente.

Si suppone che si possa definire una funzione  $c = p(y_1, \dots, y_s)$ , dipendente da variabili del processo direttamente misurabili, di cui si vuole raggiungere un punto di massimo, scegliendo opportunamente i valori delle variabili di controllo  $u_1, \dots, u_m$ .

L'ottimizzazione si può eseguire con il sistema rappresentato schematicamente in Fig. 35; per semplicità si suppone che le variabili di controllo siano solo due,  $u_1$  e  $u_2$ , e che la funzione  $p$  corrisponda alle curve di livello di Fig. 36.

All'istante iniziale il processo funziona a regime nel punto corrispondente ai controlli  $u_{10}$  e  $u_{20}$ : il calcolatore memorizza  $p(u_{10}, u_{20})$ , dà una variazione  $\Delta u_1$  a  $u_1$  e, dopo che si è estinto il conseguente transitorio, calcola, approssimandola col rapporto incrementale, la derivata

$$\left. \frac{\partial p}{\partial u_1} \right|_{\substack{u_{10} \\ u_{20}}} \simeq \frac{p(u_{10} + \Delta u_1, u_{20}) - p(u_{10}, u_{20})}{\Delta u_1}$$

poi memorizza  $p(u_{10} + \Delta u_1, u_{20})$  e dà una variazione  $\Delta u_2$  anche ad  $u_2$ . Terminato il transitorio, può essere eseguito il calcolo di

$$\left. \frac{\partial p}{\partial u_2} \right|_{\substack{u_{10} \\ u_{20}}} \simeq \frac{p(u_{10} + \Delta u_1, u_{20} + \Delta u_2) - p(u_{10} + \Delta u_1, u_{20})}{\Delta u_2}$$

Una volta calcolate le derivate, si possono applicare variazioni ai controlli ad esse proporzionali, aggiornando ogni volta il valore della relativa derivata. Si segue così il percorso a zig-zag indicato in Fig. 36.

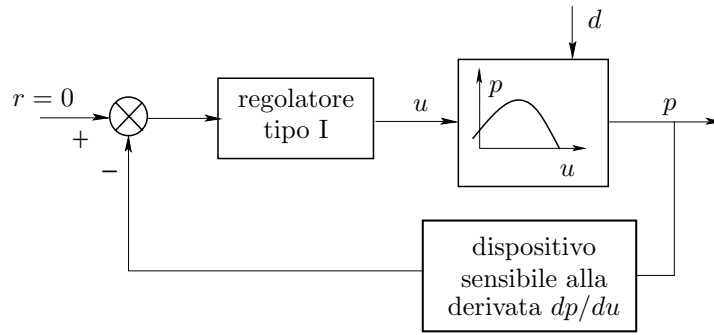


Figura 37: Ottimizzazione statica esplorativa.

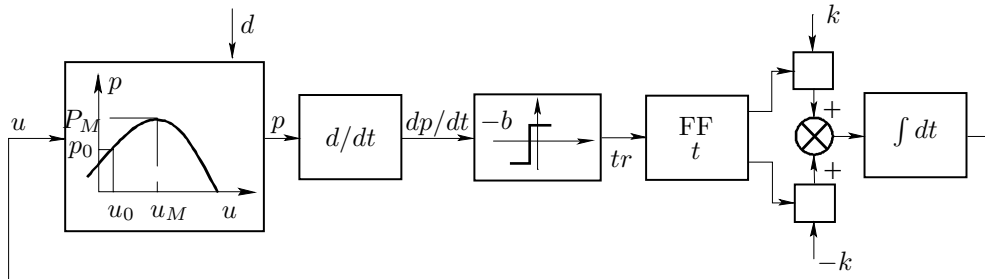


Figura 38: Ottimizzazione esplorativa per autooscillazione.

Un inconveniente del sistema è che, qualora si impieghi un calcolatore numerico, il calcolo dei rapporti incrementali è molto sensibile agli errori di quantizzazione.

Prendiamo ora in esame alcuni metodi di ottimizzazione esplorativa che si basano sull'impiego di metodi analogici. Consideriamo per semplicità il caso in cui si abbia una sola variabile di controllo, cui il profitto  $p$  è legato secondo una relazione non lineare del tipo rappresentato in Fig. 37: se si disponesse di un trasduttore sensibile alla derivata  $dp/du$ , l'ottimizzazione si potrebbe eseguire con un semplice controllo in retroazione, ad esempio di tipo integrale, come è indicato in Fig. 37. Per misurare la derivata  $dp/du$  (si noti che non è una derivata rispetto al tempo) occorre perturbare continuamente l'ingresso  $u$ , impiegando dispositivi di controllo particolari, che possono essere autooscillanti o basati sulla sovrapposizione all'ingresso di una oscillazione generata a parte.

a) *Ottimizzazione esplorativa per autooscillazione*

Un dispositivo che realizza l'ottimizzazione esplorativa per autooscillazione è rappresentato schematicamente in Fig. 38: una coppia di interruttori elettronici comandati da un flip-flop  $t$  collega all'ingresso di un integratore una tensione costante e uguale a  $+k$  o  $-k$  a seconda dello stato del flip-flop.

Il segnale all'uscita dell'integratore ha l'andamento di Fig. 39,d: a partire dal valore iniziale indicato in Fig. 38 con  $p_0$ , la funzione  $p$  varia nel tempo come è indicato in Fig. 39,a e la sua derivata rispetto al tempo come è indicato in Fig. 39,c: appena questa giunge al valore  $-b$ , si ha lo scatto del comparatore con isteresi e il flip-flop commuta, essendo applicato al suo ingresso un fronte negativo. Di conseguenza la  $u$  viene a decrescere nel tempo, sempre con legge lineare e la  $p$  ritorna a crescere; la derivata cambia di segno e riprende a decrescere, finché, raggiunto nuovamente il valore

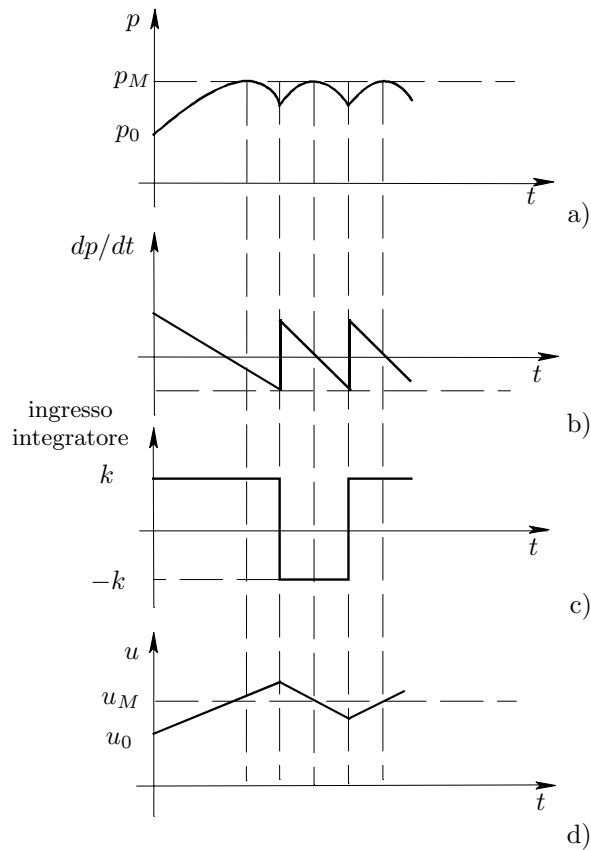


Figura 39: Segnali relativi al sistema di Fig. 38.

$-b$ , si ha un nuovo scatto flip-flop. In definitiva si ottiene una continua oscillazione nell'intorno del punto corrispondente al massimo della funzione  $p$ .

La costante di tempo dell'integrazione è legata al tempo di risposta del processo: deve essere sufficientemente elevata, perché il sistema si possa considerare descritto con buona precisione da un modello algebrico.

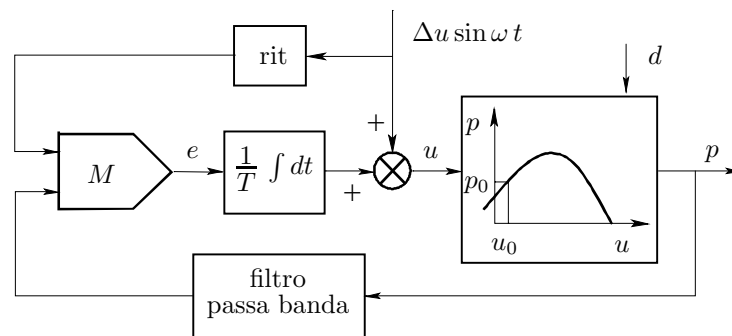


Figura 40: Ottimizzazione esplorativa con perturbazione sovrapposta.

*b) Ottimizzazione esplorativa con perturbazione sovrapposta*

Un dispositivo che realizza l'ottimizzazione esplorativa con l'impiego di una perturbazione sovrapposta all'ingresso è rappresentato in Fig. 40: si supponga per il

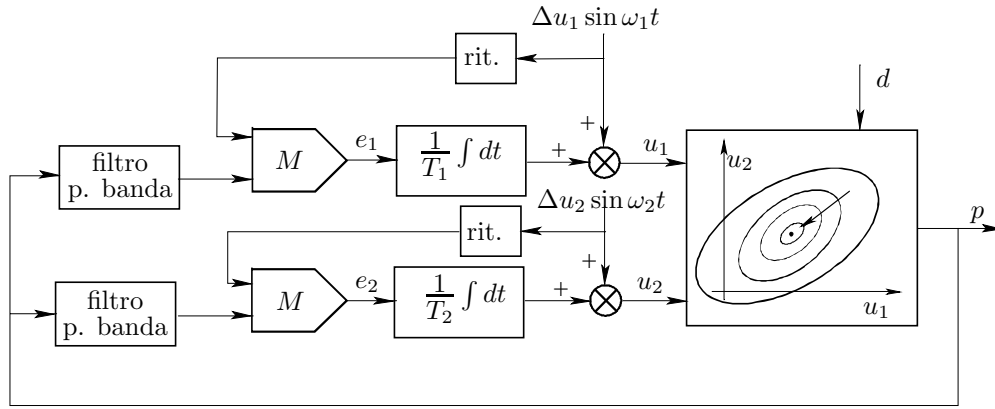


Figura 41: Estensione al caso di due variabili di controllo.

momento assente il ritardo indicato a tratto e si supponga di aprire il collegamento fra il moltiplicatore e l'integratore: l'uscita dell'integratore rimarrà costante ( $= u_0$ ): ad essa si sovrappone la perturbazione  $\Delta u \sin \omega t$ . Sviluppando in serie la funzione  $p(u)$  si ottiene:

$$p = p_0 + \left. \frac{dp}{du} \right|_{u_0} \Delta u \sin \omega t + \frac{1}{2} \left. \frac{d^2 p}{du^2} \right|_{u_0} (\Delta u)^2 \sin^2 \omega t + \dots$$

e quindi

$$\begin{aligned} e &= p_0 \Delta u \sin \omega t + \left. \frac{dp}{du} \right|_{u_0} (\Delta u)^2 \sin^2 \omega t + \dots \\ &= p_0 \Delta u \sin \omega t + \left. \frac{dp}{du} \right|_{u_0} (\Delta u)^2 \left( \frac{1}{2} + \frac{\cos 2\omega t}{2} \right) + \dots \end{aligned}$$

All'ingresso dell'integratore perviene quindi un segnale somma di termini alternativi, che vengono filtrati, e di un termine continuo proporzionale alla derivata  $dp/du$ , che viene integrato, cosicché la variabile di controllo si sposta lentamente verso il valore corrispondente al punto di funzionamento ottimo. Il filtro passa banda è centrato sulla pulsazione  $\omega$  e serve per eliminare segnali che non interessano (non è però essenziale); l'elemento di ritardo serve per compensare eventuali sfasamenti introdotti dal sistema (che, pur essendo schematizzato con un modello algebrico, è in realtà un sistema dinamico).

Lo stesso metodo si può usare anche nel caso di più variabili di controllo, usando perturbazioni di frequenze diverse, scelte in modo che non si abbia interferenza. In Fig. 41 è rappresentato uno schema a blocchi relativo al caso di due variabili di controllo.