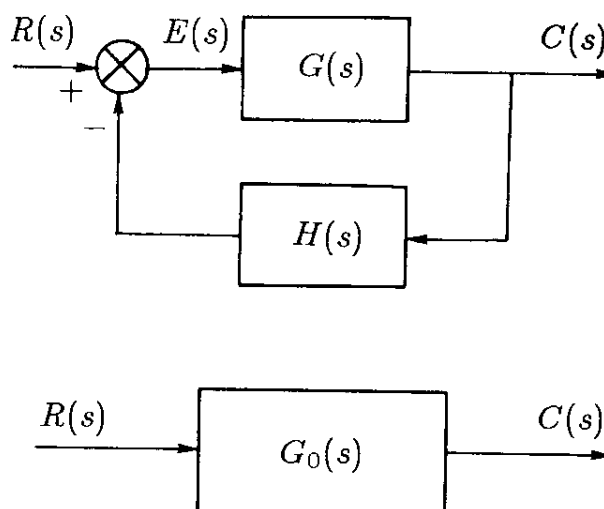


## Proprietà generali dei sistemi in retroazione

- Sistema in retroazione e sua forma minima:



- Significato dei simboli:

$r(t)$ : segnale di riferimento (o "set point");

$c(t)$ : variabile controllata;

$e(t)$ : segnale errore;

$G(s)$ : funzione di trasferimento del percorso diretto;

$H(s)$ : funzione di trasferimento del percorso in retroazione);

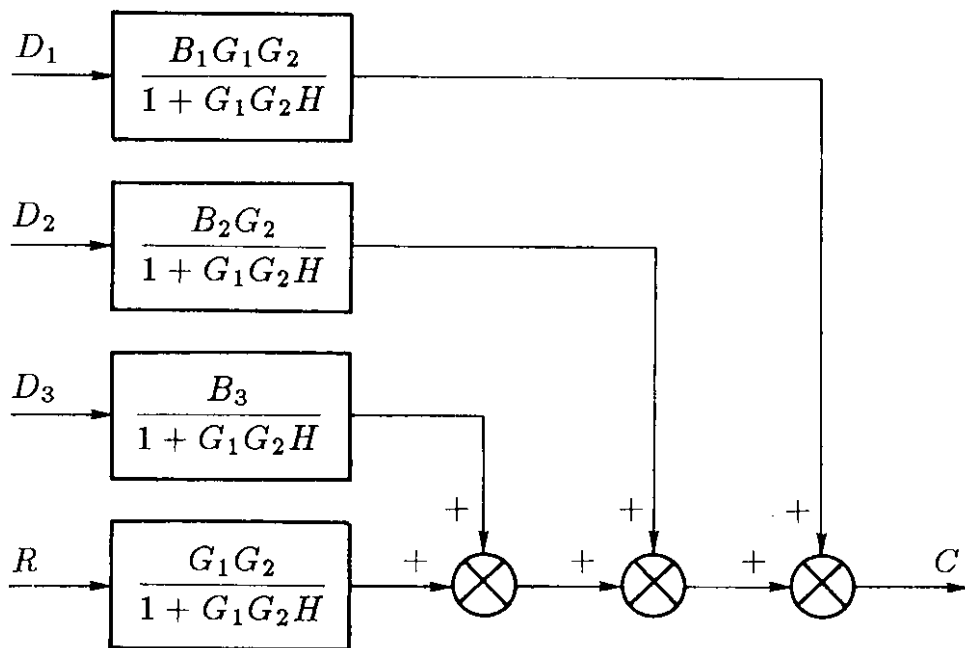
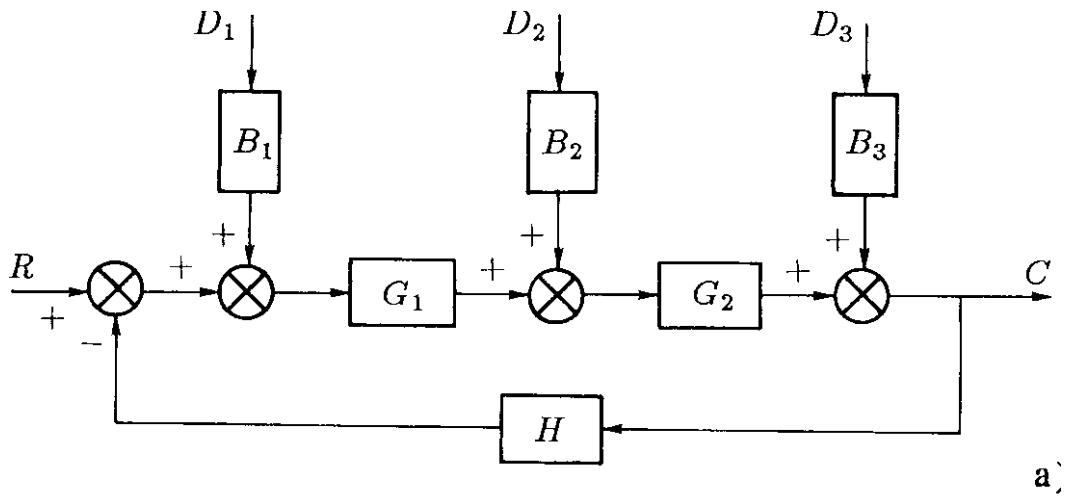
$G(s)H(s)$ : guadagno di anello.

- Funzione di trasferimento del sistema in forma minima:

$$G_0(s) = \frac{C(s)}{R(s)} = \frac{G(s)}{1 + G(s)H(s)}$$

- Questa è la situazione teorica in assenza di disturbi e di variazioni parametriche

- Spesso accade che si abbiano sistemi a più ingressi (per esempio ingressi di disturbo) agenti in vari punti dell'anello.
- In questo caso la riduzione in forma minima viene fatta nel modo seguente:



- Nota: tutte le funzioni di trasferimento hanno lo stesso denominatore.

## Sensibilità alla variazione di parametri

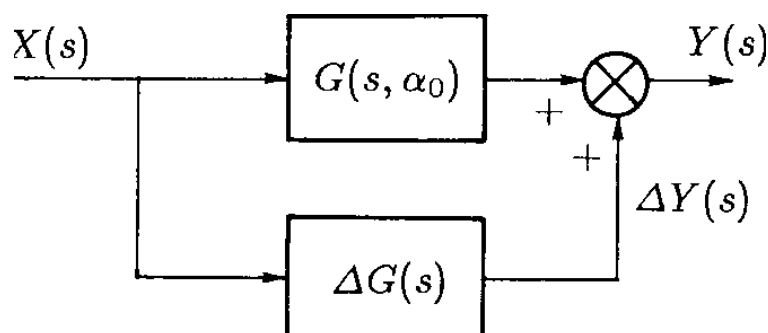
- Sia  $\alpha$  un parametro della funzione di trasferimento  $G(s)$  che subisca una piccola variazione  $\Delta\alpha$  rispetto al valore nominale  $\alpha_0$ . Sia  $G(s, \alpha_0)$  la funzione di trasferimento “nominale”. La nuova funzione di trasferimento si può scrivere, in prima approssimazione

$$G(s, \alpha_0 + \Delta\alpha) = G(s) + \Delta G(s)$$

in cui per semplicità di notazione si è posto

$$G(s) = G(s, \alpha_0), \quad \Delta G(s) = \left. \frac{\partial G}{\partial \alpha} \right|_{\alpha=\alpha_0} \Delta\alpha$$

- Se il sistema è soggetto a un segnale d'ingresso la cui trasformata sia  $X(s)$ , la variazione del parametro porta a una variazione dell'uscita la cui trasformata, in prima approssimazione, può esprimersi come  $\Delta Y(s) = \Delta G(s) X(s)$ .



- Nei sistemi in retroazione, l'effetto della variazione di un parametro è diverso a seconda che esso si verifichi nella catena di amplificazione diretta o nel percorso di retroazione.
- Nei sistemi retroazionati, una variazione della funzione di trasferimento della catena di amplificazione diretta  $G(s)$  produce generalmente una variazione della funzione di trasferimento complessiva  $G_0(s)$  molto minore.
- Una variazione della funzione di trasferimento  $H(s)$  del percorso di retroazione produce in  $G_0(s)$  una variazione dello stesso ordine di grandezza.

- In presenza della variazione  $\Delta\alpha$  di un parametro della funzione di trasferimento del percorso di segnale diretto  $G(s)$  si ha

$$\begin{aligned}\Delta G_0(s) &= \frac{\partial G_0}{\partial G} \frac{\partial G}{\partial \alpha} \Big|_{\alpha=\alpha_0} \Delta\alpha = \frac{\partial}{\partial G} \left( \frac{G}{1+GH} \right) \frac{\partial G}{\partial \alpha} \Big|_{\alpha=\alpha_0} \Delta\alpha \\ &= \frac{1}{[1+G(s)H(s)]^2} \Delta G(s) = \frac{G_0(s)}{1+G(s)H(s)} \frac{\Delta G(s)}{G(s)}\end{aligned}$$

- Per le variazioni relative vale la relazione

$$\boxed{\frac{\Delta G_0(s)}{G_0(s)} = \frac{1}{1+G(s)H(s)} \frac{\Delta G(s)}{G(s)}}$$

- Per tutte le pulsazioni per le quali vale la condizione

$$|G(j\omega)H(j\omega)| \gg 1,$$

si ha che

$$\frac{|\Delta G_0(j\omega)|}{|G_0(j\omega)|} \ll \frac{|\Delta G(j\omega)|}{|G(j\omega)|}$$

- L'errore relativo dovuto alla variazione di un parametro di  $G(s)$  e per le frequenze per le quali il guadagno di anello è sufficientemente elevato è molto minore nel sistema in retroazione che non nel sistema ad anello aperto.
- Nel caso di una variazione  $\Delta\beta$  di un parametro di  $H(s)$  si ha invece che:

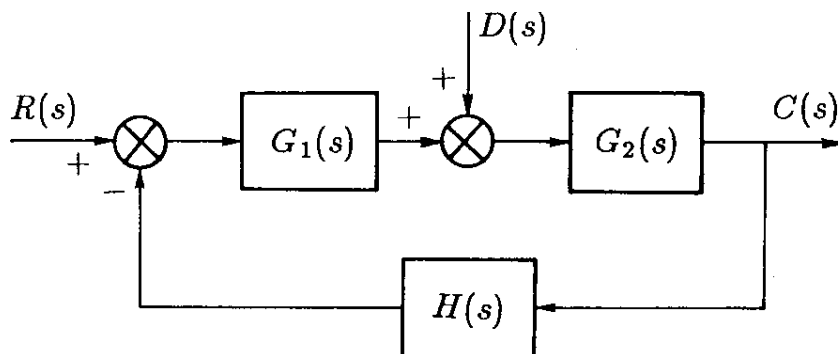
$$\boxed{\frac{\Delta G_0(s)}{G_0(s)} = \frac{-G(s)H(s)}{1+G(s)H(s)} \frac{\Delta H(s)}{H(s)}}$$

cioè gli errori relativi sono dello stesso ordine di grandezza.

$$\frac{|\Delta G_0(j\omega)|}{|G_0(j\omega)|} \simeq \frac{|\Delta H(j\omega)|}{|H(j\omega)|}$$

## Sensibilità ai disturbi

- Sia  $d(t)$  un disturbo che agisce in un punto della catena di amplificazione diretta, in un sistema di controllo in retroazione



- In assenza e in presenza di retroazione le variazioni dell'uscita dovute al disturbo sono rispettivamente

$$C'_d(s) = G_2(s) D(s) ,$$

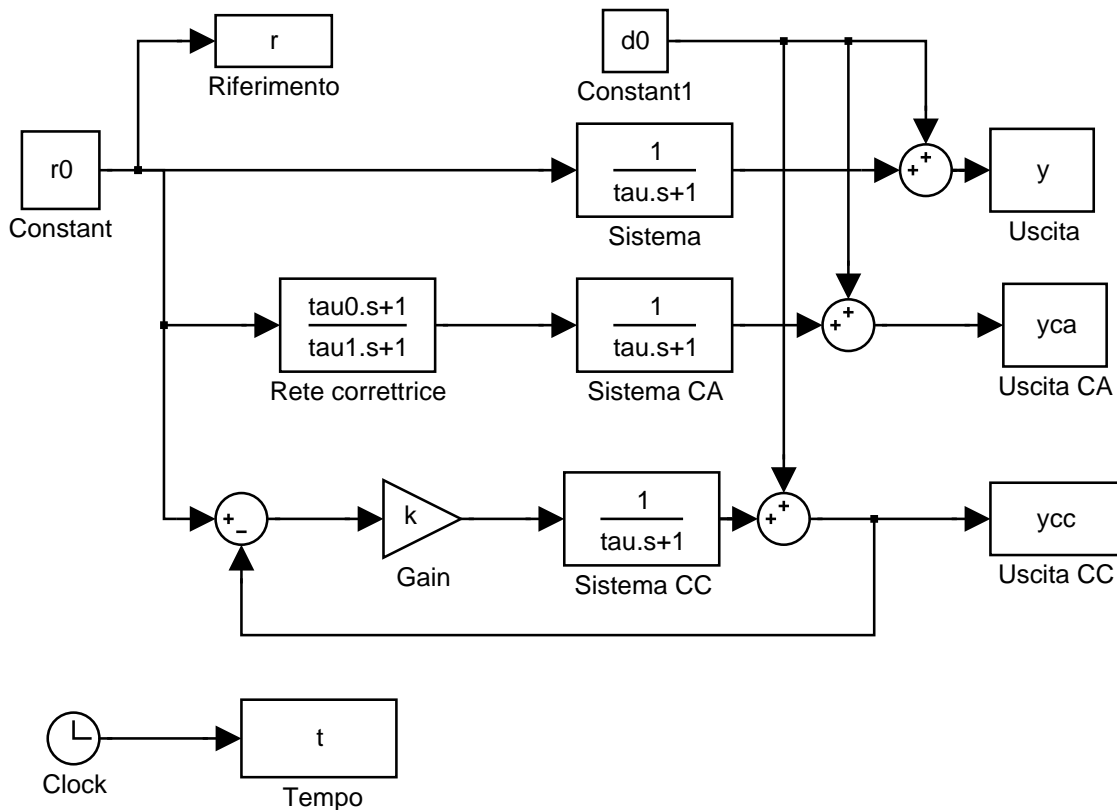
$$C''_d(s) = \frac{G_2(s)}{1 + G(s) H(s)} D(s) , \quad \text{con } G(s) = G_1(s) G_2(s) .$$

- Quindi, in presenza di retroazione il contributo del disturbo sull'uscita si è ridotto di un fattore  $|1 + G(j\omega) H(j\omega)|$  se per la banda di frequenze del disturbo vale la relazione:

$$|G(j\omega) H(j\omega)| \gg 1$$

- In generale, i sistemi retroazionati risultano quindi robusti sia a variazioni parametriche che alla presenza di disturbi attivi esterni se il guadagno di anello del sistema  $|G(j\omega) H(j\omega)|$  è elevato alle pulsazione  $\omega$  a cui agisce il disturbo.

**Esempio.** Si faccia riferimento al seguente schema Simulink:



Tale schema viene attivato dalla seguente funzione Matlab (variazione.m):

```

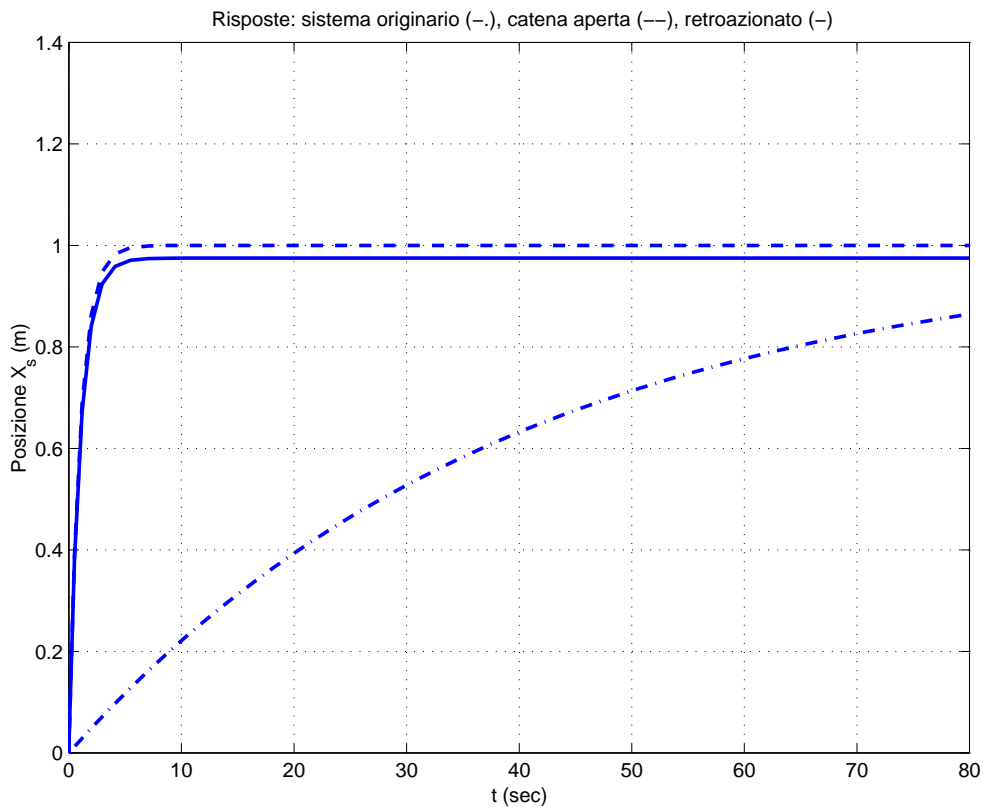
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
%  variazione.M                                                    %
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%

r0=1;          % ampiezza del gradino
d0=0.0;        % disturbo sull'uscita
tau0=40;       % valore nominale della costante di tempo del sistema
tau=tau0;      % valore REALE della costante di tempo del sistema
tau1=1;        % costante di tempo desiderata dal sistema controllato
k=tau0/tau1 -1; % valore del guadagno che garantisce la costante di tempo desiderata
tfin=2*tau0;   % durata della simulazione
sim('variazionemdl',tfin);    % simulazione del sistema

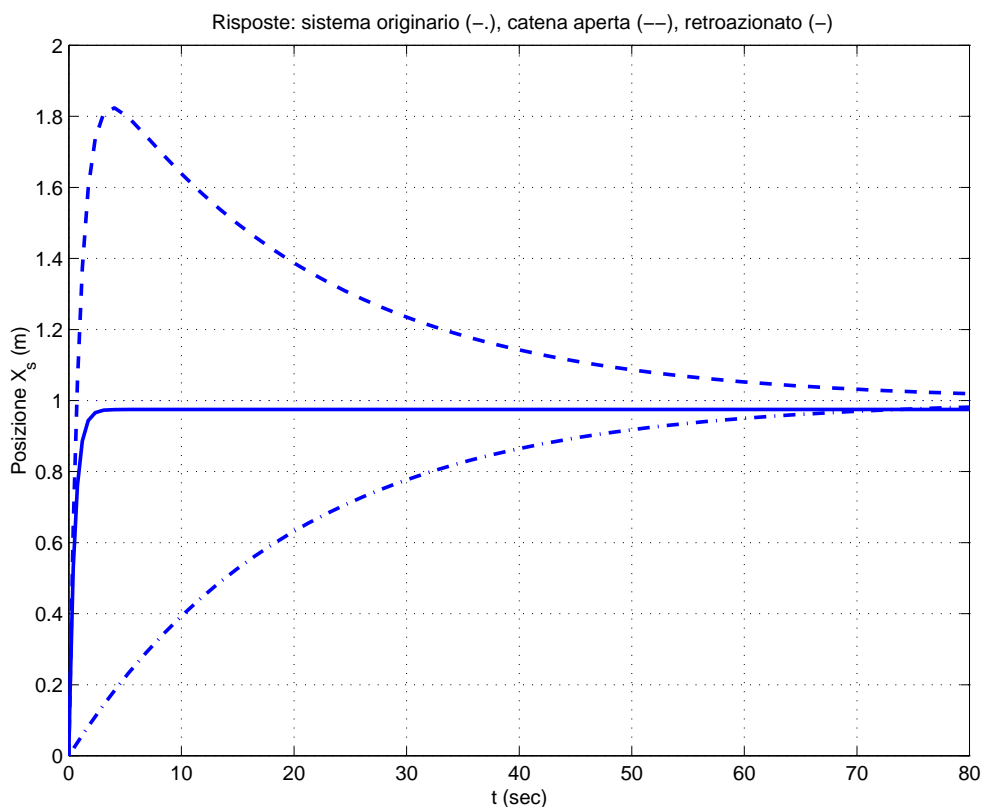
figure(1); clf;
lw=1.8;        % Spessore della linea
plot(t,r,':'); hold on
h=plot(t,y,'-'); set(h,'linewidth',lw)
h=plot(t,yca,'--'); set(h,'linewidth',lw)
h=plot(t,ycc,'-'); set(h,'linewidth',lw)
title('Risposte: sistema originario (-), catena aperta (--), retroazionato (-)');
xlabel('t (sec)');
ylabel('Posizione X_s (m)');
grid on;
zoom on

```

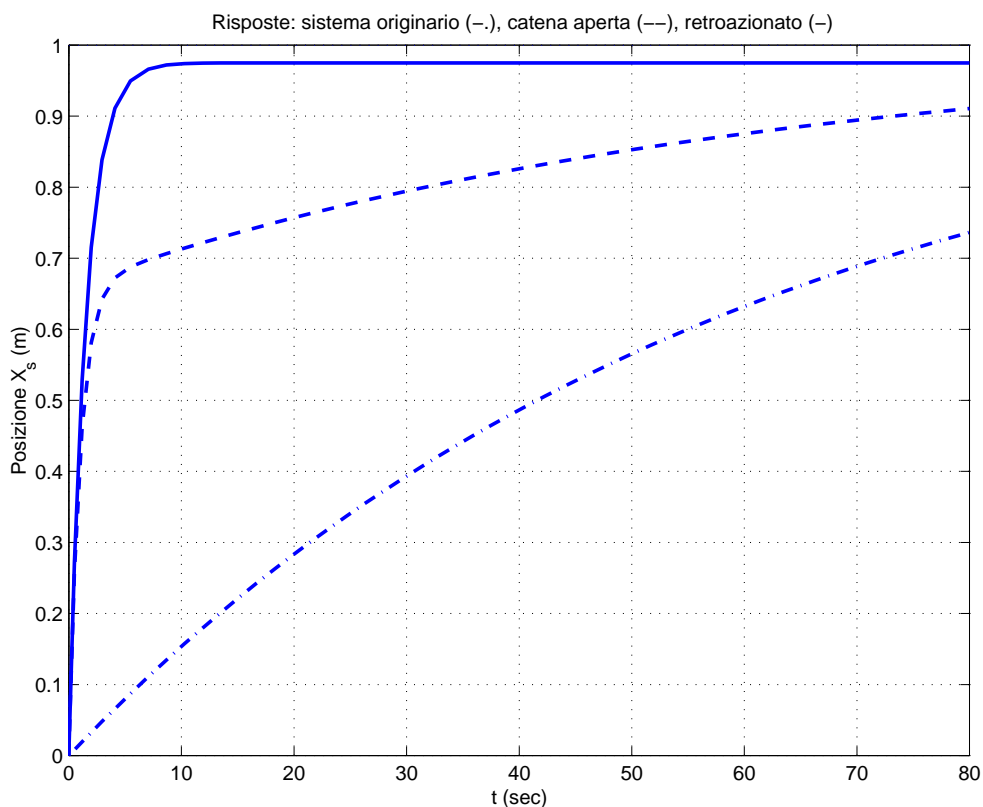
La risposta dei 3 sistemi nel caso nominale è la seguente:



Se il parametro  $\tau$  subisce una variazione negativa del 50% ( $\tau = 0.5\tau_0$ ) si ottengono le seguenti risposte al gradino:



Se il parametro  $\tau$  subisce una variazione positiva del 50% ( $\tau = 1.5\tau_0$ ) si ottengono le seguenti risposte al gradino:



Le risposte al gradino che si ottengono in condizione nominale ( $\tau = \tau_0$ ) quando è presente un disturbo sull'uscita  $d_0 = 0.5$  sono le seguenti:

