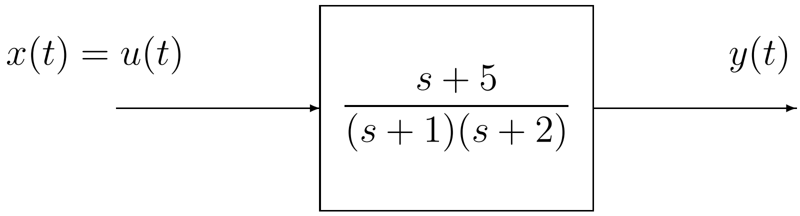
Risposta temporale: esempi

Esempio. Calcolare la risposta al gradino unitario del seguente sistema:



- Il calcolo della trasformata del segnale di uscita è immediato:

$$X(s) = \frac{1}{s} \qquad \rightarrow \qquad Y(s) = G(s)X(s) = \frac{s+5}{s(s+1)(s+2)}$$

  Per ottenere $y(t)$ occorre "antitrasformare" la funzione $Y(s)$.

- Valore iniziale della funzione $y(t)$:

$$y(0) = \lim_{s\to\infty} s\,Y(s) = 0$$

- Valore finale della funzione $y(t)$:

$$y(\infty) = \lim_{s\to 0} s\,Y(s) = \frac{5}{2}$$

- Scomposizione in fratti semplici:

$$Y(s) = \frac{s+5}{s(s+1)(s+2)} = \frac{K_1}{s} + \frac{K_2}{(s+1)} + \frac{K_3}{(s+2)}$$

  dove

$$K_1 = s\,Y(s)|_{s=0} = \left.\frac{s+5}{(s+1)(s+2)}\right|_{s=0} = \frac{5}{2}$$

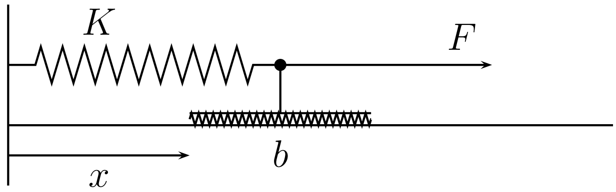
$$K_2 = (s+1)\,Y(s)|_{s=-1} = \left.\frac{s+5}{s(s+2)}\right|_{s=-1} = -4$$

$$K_3 = (s+2)\,Y(s)|_{s=-2} = \left.\frac{s+5}{s(s+1)}\right|_{s=-2} = \frac{3}{2}$$

- Si ricava quindi che la risposta forzata del sistema è:

$$y(t) = \mathcal{L}^{-1}[Y(s)] = \frac{5}{2} - 4e^{-t} + \frac{3}{2}e^{-2t}$$

Esempio. Calcolare la risposta al gradino del seguente sistema molla-smorzatore.



- Descrizione mediante un'equazione differenziale:

$$0 = F - b\,\dot{x} - K\,x \qquad \rightarrow \qquad b\,\dot{x} + K\,x = F$$

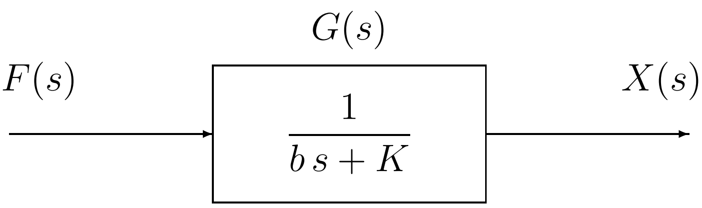
- Utilizzando le trasformate di Laplace ($x(0) = 0$) si ha:

$$b\,s\,X(s) + K X(s) = F(s)$$

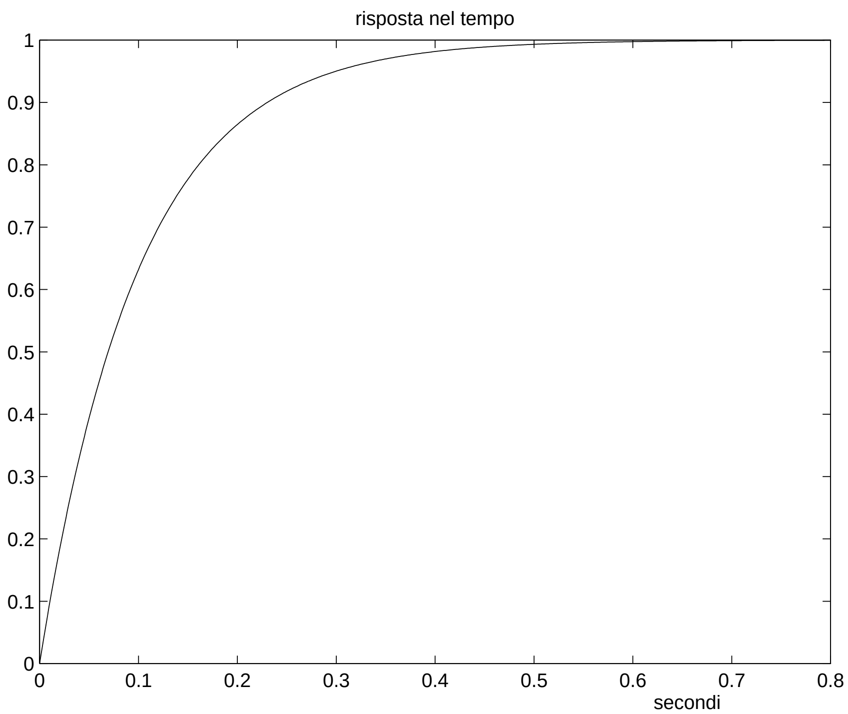
da cui si ottiene:

$$X(s) = \frac{1}{b\,s + K} F(s)$$

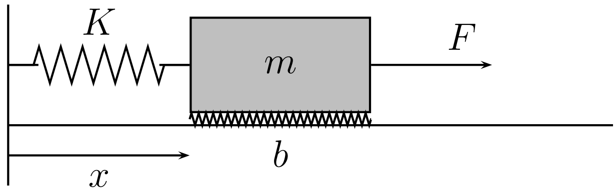
- Il sistema può quindi essere rappresentato nel modo seguente:



- In questo caso la risposta al gradino è di tipo aperiodico ($K = 1$, $b = 0.1$):



Esempio. Sistema massa-molla-smorzatore.



- Variabili e parametri:

$x(t)$	:	posizione	m	:	massa
$\dot{x}(t)$	:	velocità	K	:	rigidità della molla
$\ddot{x}(t)$	:	accelerazione	b	:	Coefficiente di attrito lineare
$F(t)$	:	forza applicata			

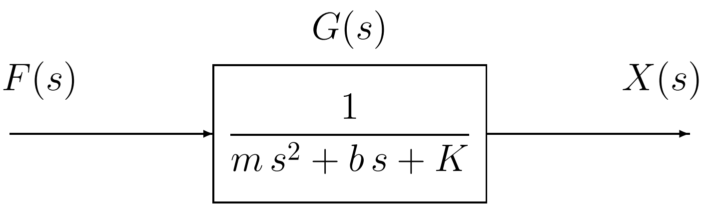
- Descrizione mediante un'equazione differenziale:

$$\frac{d}{dt}[m\dot{x}] = F - b\,\dot{x} - K\,x \qquad \rightarrow \qquad m\ddot{x} + b\,\dot{x} + K\,x = F$$

Utilizzando le trasformate di Laplace ($x(0) = \dot{x}(0) = 0$) si ha:

$$m\,s^2 X(s) + b\,s\,X(s) + K\,X(s) = F(s) \qquad \leftrightarrow \qquad X(s) = \frac{F(s)}{m\,s^2 + b\,s + K}$$

Il sistema può quindi essere rappresentato nel modo seguente:



- Posto $m = 1$, $b = 3$ e $K = 2$, calcolare la risposta del sistema ad un gradino di forza $F(t) = 10$. Si procede nel seguente modo:

$$F(s) = \frac{10}{s} \qquad \rightarrow \qquad X(s) = G(s)F(s) = \frac{10}{s(s^2 + 3\,s + 2)}$$

Operando la scomposizione in fratti semplici, si ha che:

$$X(s) = \frac{10}{s(s+1)(s+2)} = \frac{5}{s} - \frac{10}{(s+1)} + \frac{5}{(s+2)}$$

Antitrasformando si ottiene:

$$x(t) = 5 - 10\,e^{-t} + 5\,e^{-2t}$$

- Posto $m = 1$, $b = 2$ e $K = 10$, calcolare la risposta del sistema ad un gradino di forza $F(t) = 10$. Si procede nel seguente modo:

$$F(s) = \frac{10}{s} \qquad \rightarrow \qquad X(s) = G(s)F(s) = \frac{10}{s(s^2 + 2\,s + 10)}$$

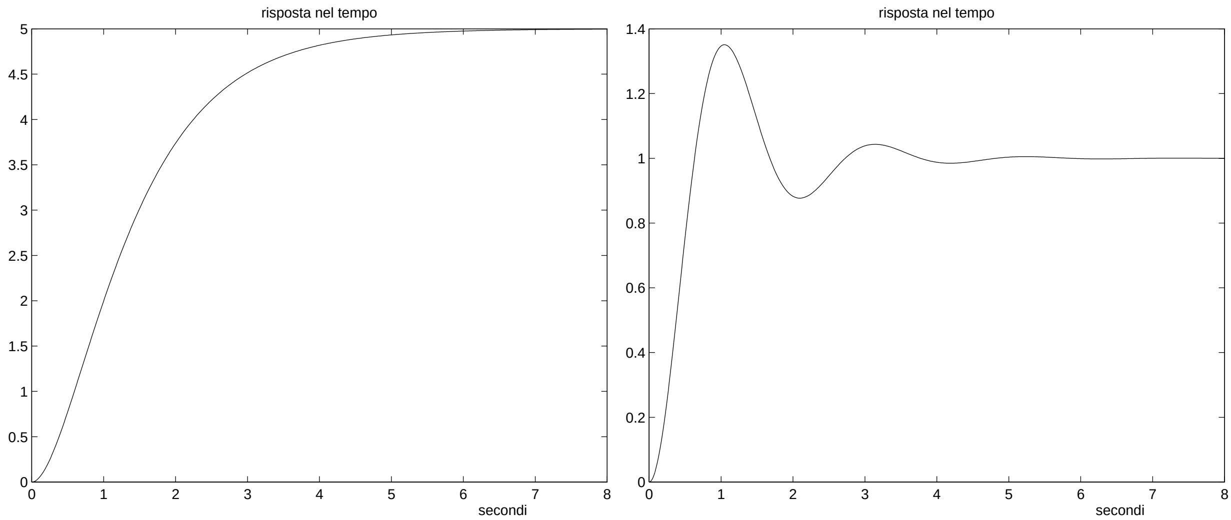
Operando la scomposizione in fratti semplici si ha che:

$$\begin{aligned} X(s) &= \frac{10}{s[(s+1)^2 + 3^2]} = \frac{1}{s} - \frac{s+2}{(s+1)^2 + 3^2} \\ &= \frac{1}{s} - \left[\frac{s+1}{(s+1)^2 + 3^2} + \frac{1}{3}\frac{3}{(s+1)^2 + 3^2}\right] \end{aligned}$$

Antitrasformando si ottiene:

$$x(t) = 1 - e^{-t}[\cos(3\,t) + \frac{1}{3}\sin(3\,t)]$$

- Nel primo caso, l'andamento temporale era di tipo aperiodico; in questo caso l'andamento temporale è di tipo oscillatorio smorzato:



- I termini esponenziali con coefficienti a parte reale molto negativa si annullano più rapidamente.

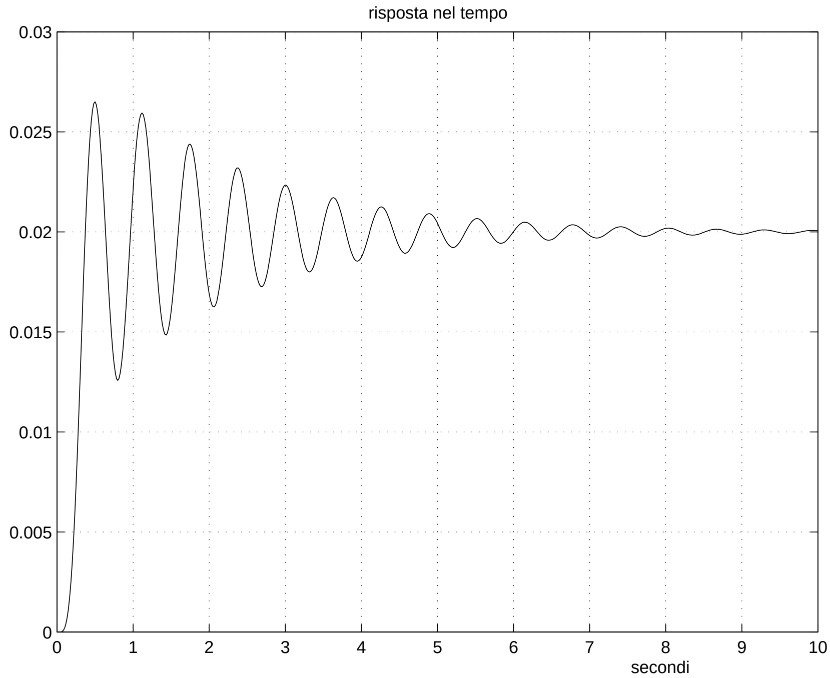
- La risposta dinamica del sistema è dominata dal polo, o dalla coppia di poli, più vicino all'asse immaginario.

Esempio. Sia dato il seguente sistema $G(s)$:

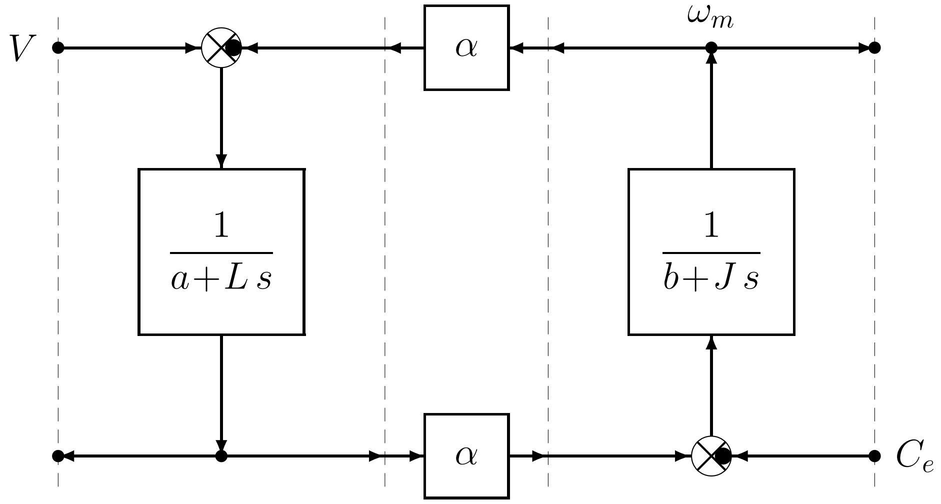
$$G(s) = \frac{800(2\,s+30)}{(0.2\,s+3)(2\,s+10)(s^2+s+100)(s^2+20s+400)}$$

Calcolare il guadagno statico G_0 del sistema, disegnare l'andamento qualitativo $y(t)$ della risposta al gradino unitario del sistema $G(s)$ stimando qualitativamente il tempo di assestamento T_a e il periodo T_ω dell'eventuale oscillazione smorzata:

$$G_0 = 0.02$$
$$T_a = 6 \text{ s}$$
$$T_\omega = 0.63 \text{ s}$$



Esempio. Lo schema a blocchi riportato sotto rappresenta la dinamica di un motore in corrente continua (V è la tensione in ingresso, C_e è la coppia resistente, ω_m è la velocità angolare del motore, α è la costante di coppia, L ed a sono l'induttanza e la resistenza del circuito di armatura, b e J sono il coefficiente di attrito e il momento di inerzia del motore).



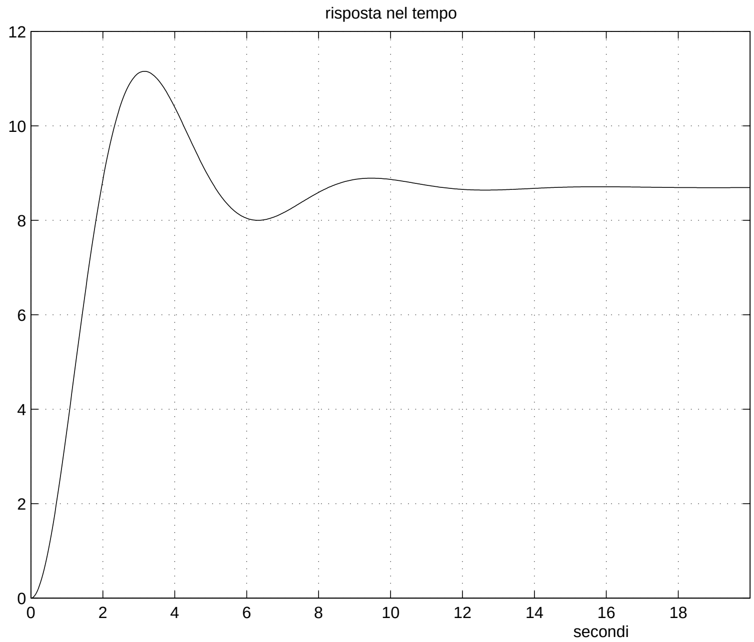
- Utilizzando la formula di Mason, calcolare le funzioni di trasferimento $G_1(s) = \frac{\omega_m(s)}{V(s)}$ e $G_2(s) = \frac{\omega_m(s)}{C_e(s)}$ che legano gli ingressi $V(s)$ e $C_e(s)$ all'uscita $\omega_m(s)$:

$$G_1(s) = \frac{\omega_m(s)}{V(s)} = \frac{\alpha}{(a + L\,s)(b + J\,s) + \alpha^2}$$

$$G_2(s) = \frac{\omega_m(s)}{C_e(s)} = -\frac{(a + L\,s)}{(a + L\,s)(b + J\,s) + \alpha^2}$$

- Posto $L = 10$, $J = 10$, $\alpha = 10$, $a = 3$, $b = 5$ ed utilizzando l'approssimazione dei sistemi a poli dominanti, calcolare l'andamento qualitativo della risposta della funzione di trasferimento $G_1(s)$ ad un gradino di tensione $V(t) = 100$ in ingresso:

$$G_1(s) = \frac{10}{100\,s^2 + 80\,s + 115} = \frac{0.1}{s^2 + 0.8\,s + 1.15}$$



- Calcolare inoltre il tempo di assestamento T_a, la massima sovraelongazione $S\%$ e il periodo T dell'oscillazione smorzata.
  La posizione dei poli della funzione $G_1(s)$ è la seguente:

$$p_{1,2} = -0.4 \pm j\,0.995 = -\sigma \pm j\,\omega$$

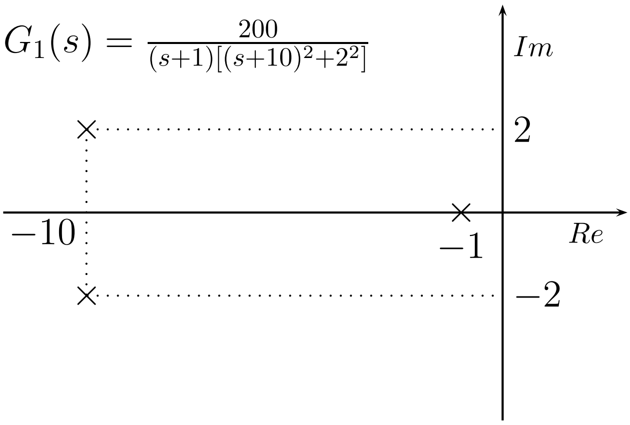
  I parametri richiesti sono:

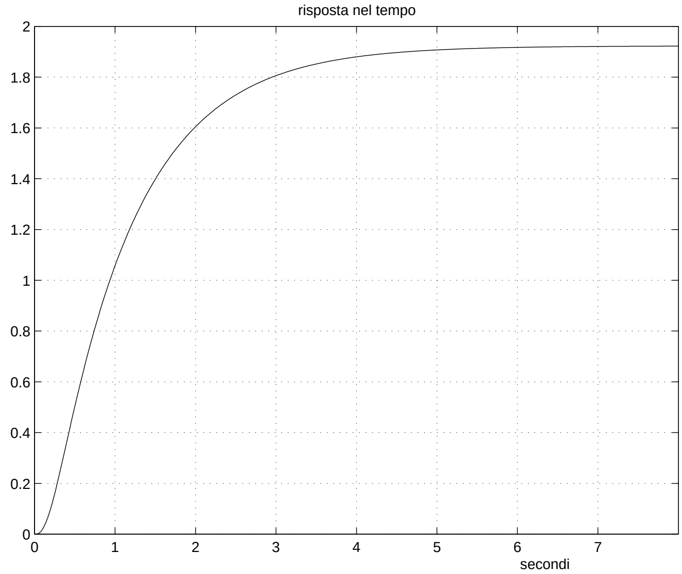
$$T_a = \frac{3}{\sigma} = 7.5 \text{ s}, \qquad T = \frac{2\pi}{\omega} = 6.315 \text{ s}$$

$$\delta = \cos[\arctan(\frac{\omega}{\sigma})] = 0.373, \qquad S\% = 100\,e^{\frac{-\delta\pi}{\sqrt{1-\delta^2}}} = 28.28\ \%,$$

Esempio. Disegnare l'andamento qualitativo $y(t)$ della risposta al gradino unitario del sistema $G_1(s)$. Calcolare il guadagno statico ($K_0 = 1.923$) e fornire una stima del tempo di assestamento ($T_a = 3$ s).

$$G_1(s) = \frac{200}{(s+1)[(s+10)^2+2^2]}$$

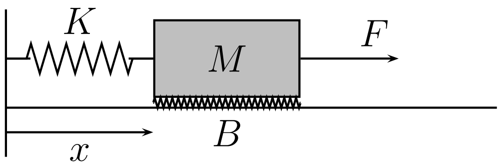


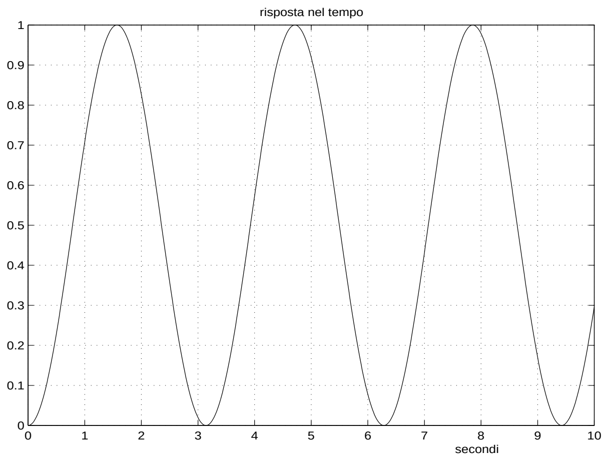


Esempio. Stimare qualitativamente il tempo di assestamento T_a del seguente sistema $G(s)$ alla risposta al gradino:

$$G(s) = \frac{(s+45)(s+476)}{(s+4773)(s+16)(s+99)(s^2+20s+200)} \qquad \rightarrow \qquad T_a = \frac{3}{10} = 0.3$$

Esempio. Il sistema massa-molla-smorzatore mostrato sotto è caratterizzato dall'equazione differenziale $M\,\ddot{x} + B\,\dot{x} + K\,x = F$.





Data la risposta $x(t)$ del sistema ad un gradino di forza $F = 10\,N$ (vedi l'andamento temporale mostrato a fianco), determinare:

1) la funzione di trasferimento $G(s)$ del sistema in forma simbolica:

$$G(s) = \frac{X(s)}{F(s)} = \frac{1}{M\,s^2 + B\,s + K}$$

2) i valori numerici dei parametri M, B e K (cioè massa, attrito lineare e rigidità della molla):

$$M = 5, \qquad B = 0, \qquad K = 20$$

La risposta al gradino mostrata in figura evidenzia chiaramente che il tempo di assestamento del sistema è $T_a = \infty$, cioè il sistema è semplicemente stabile e i suoi poli complessi coniugati si trovano sull'asse immaginario. Una situazione di questo tipo si può avere solo se le dissipazioni del sistema sono nulle:

$$T_a = \frac{3}{\delta\omega_n} = \infty \qquad \rightarrow \qquad \delta\omega_n = \frac{B}{2\,M} = 0 \qquad \rightarrow \qquad B = 0$$

da cui si ricava:

$$B = 0 \qquad \rightarrow \qquad M\,s^2 + K = 0 \qquad \rightarrow \qquad s_{1,2} = \pm j\sqrt{\frac{K}{M}} = \pm j\omega$$

Il valore a regime x_∞ del segnale in uscita $x(t)$ coincide con il valore medio $x_\infty = 0.5$ del segnale stesso ed è uguale al prodotto tra l'ampiezza dell'ingresso ($F = 10$) e il guadagno statico $G(0)$ del sistema:

$$x_\infty = F \cdot G(0) \qquad \rightarrow \qquad 0.5 = 10 \cdot \frac{1}{K} \qquad \rightarrow \qquad K = 20$$

Il valore della parte immaginaria ω si ricava facilmente dal periodo T dell'oscillazione:

$$\omega = \frac{2\,\pi}{T} = \frac{2\,\pi}{\pi} = 2 \text{ s}$$

Il valore di M si determina facilmente dalla relazione seguente:

$$\omega = \sqrt{\frac{K}{M}} = 2 \qquad \rightarrow \qquad M \simeq \frac{K}{4} = 5$$

I valori numerici cercati dei parametri M, B e Ksono quindi i seguenti:

$$M = 5, \qquad B = 0, \qquad K = 20$$