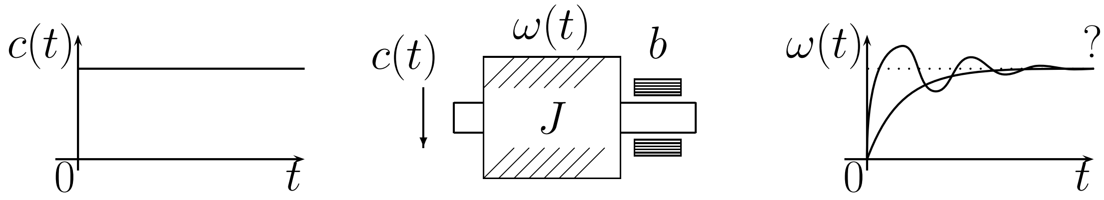
Esempi di modelli fisici

1) **Dinamica del rotore di un motore elettrico.**

Si consideri un elemento meccanico con inerzia J, coefficiente di attrito lineare b che ruota alla velocità angolare ω al quale venga applicata una coppia esterna $c(t)$.



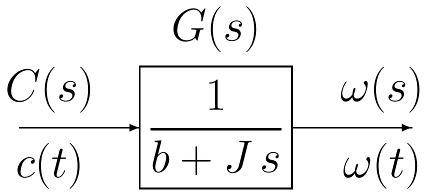
L'equazione differenziale che caratterizza il sistema è quella che si ricava dalla legge di conservazione della quantità di moto angolare:

$$\frac{d[J\omega(t)]}{dt} = c(t) - b\,\omega(t) \qquad \leftrightarrow \qquad J\dot{\omega}(t) + b\,\omega(t) = c(t)$$

Partendo da condizioni iniziali nulle e applicando Laplace si ottiene:

$$J\,s\,\omega(s) + b\,\omega(s) = C(s) \qquad \leftrightarrow \qquad \omega(s) = \frac{1}{b + J\,s}\,C(s)$$

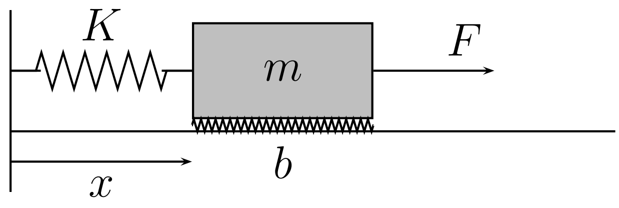
per cui il sistema fisico può essere descritto nel modo seguente:



dove $G(s)$ è la funzione di trasferimento che descrive il sistema fisico:

$$G(s) = \frac{1}{b + J\,s}$$

2) Sistema massa-molla-smorzatore.



- Variabili e parametri del sistema fisico:

$x(t)$	:	posizione	m	:	massa
$\dot{x}(t)$	:	velocità	K	:	rigidità della molla
$\ddot{x}(t)$	:	accelerazione	b	:	Coefficiente di attrito lineare
$F(t)$	:	forza applicata	$P(t)$	:	Quantità di moto

- Legge di conservazione della quantità di moto $P(t) = m\,\dot{x}(t)$:

$$\frac{d}{dt}[P(t)] = \sum_i F_i(t) \qquad \rightarrow \qquad m\,\frac{d}{dt}[\dot{x}(t)] = \sum_i F_i(t)$$

- Si ottiene quindi la seguente equazione differenziale:

$$\frac{d}{dt}[m\,\dot{x}(t)] = F - b\,\dot{x}(t) - K\,x(t)$$

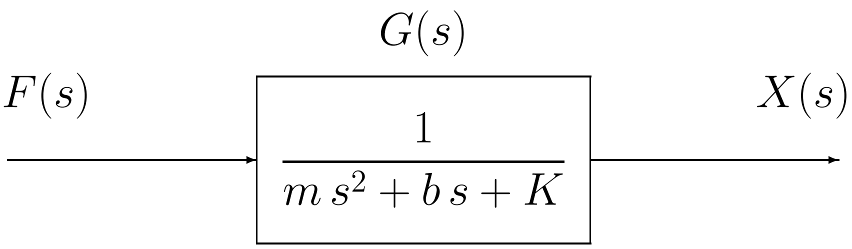
che può essere riscritta nel seguente modo:

$$m\ddot{x}(t) + b\,\dot{x}(t) + K\,x(t) = F(t)$$

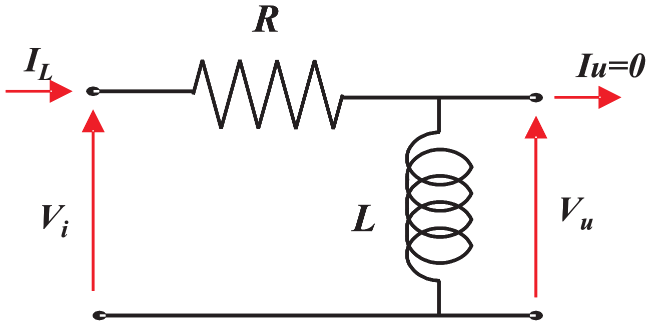
- Utilizzando le trasformate di Laplace ($x(0) = \dot{x}(0) = 0$) si ha:

$$m\,s^2X(s) + b\,s\,X(s) + K\,X(s) = F(s) \qquad \leftrightarrow \qquad X(s) = \frac{F(s)}{m\,s^2 + b\,s + K}$$

Il sistema può quindi essere rappresentato nel modo seguente:



3) Sistema elettrico RLC.



- Legge fisica: la variazione del flusso concatenato $\phi_c(t)$ è uguale alla tensione $V_L(t)$ applicata ai capi dell'induttanza.

$$\frac{d}{dt}[\phi(t)] = V_L(t) \qquad \rightarrow \qquad L\,\frac{d}{dt}[I_L(t)] = V_i(t) - R\,I_L(t)$$

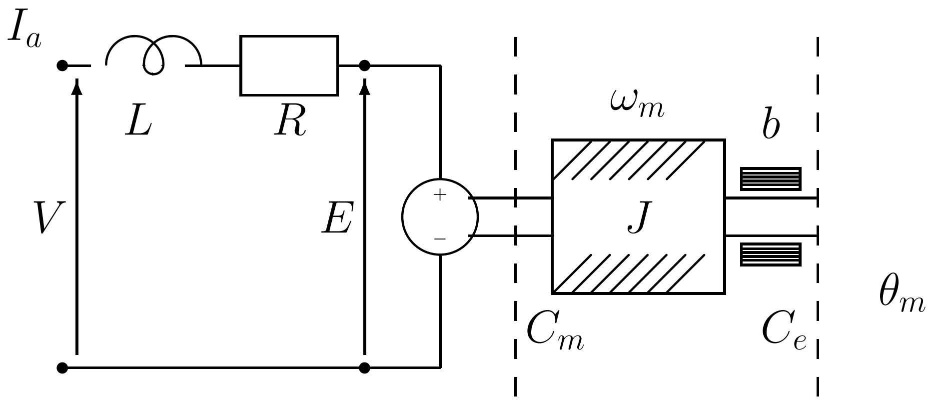
- Applicando la trasformata di Laplace, con condizioni iniziali nulle, si ha:

$$L\,s\,I_L(s) + R\,I_L(s) = V_i(s) \qquad \leftrightarrow \qquad I_L(s) = \underbrace{\frac{1}{L\,s+R}}_{G(s)} V_i(s)$$

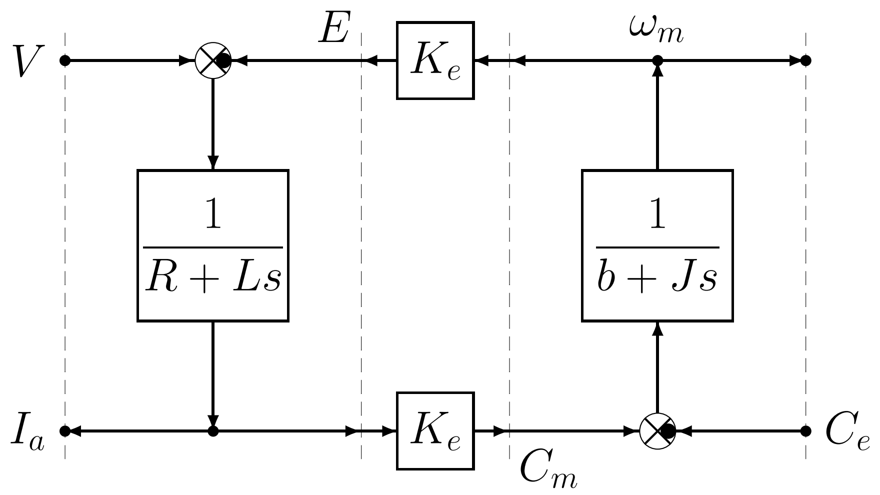
- Il sistema può quindi essere rappresentato nel modo seguente:

$$V_i(s) \longrightarrow \boxed{G(s) = \frac{1}{L\,s+R}} \longrightarrow I_L(s)$$

4) Motore elettrico in corrente continua.



- Schema a blocchi POG del motore:



Il sistema è descritto dalle seguenti 2 equazioni differenziali:

$$\begin{cases} L\dot{I}_a = -RI_a - K_e\,\omega_m + V \\ J\dot{\omega}_m = K_eI_a - b\,\omega_m - C_e \end{cases}$$

- Per il principio di conservazione dell'energia, la costante K_e è sia la costante di proporzionalità che lega la corrente di armatura I_a alla coppia motrice C_m, sia la costante di proporzionalità che lega la forza contromotrice E alla velocità angolare ω_m:

$$C_m = K_eI_a \qquad\qquad E = K_e\omega_m$$

- Riducendo "in forma minima" il sistema (vedi "Formula di Mason") si ottiene il seguente legame tra la variabile di uscita $\omega_m(t)$ e le variabili di ingresso $V(t)$ e $C_e(t)$:

$$\omega_m(s) = G_1(s)V(s) + G_2(s)C_e(s)$$

dove $G_1(s)$ lega l'ingresso di controllo $V(t)$ all'uscita $\omega_m(t)$

$$G_1(s) = \frac{K_e}{(R + L\,s)(b + J\,s) + K_e^2}$$

mentre $G_2(s)$ lega l'ingresso di disturbo $C_e(t)$ all'uscita $\omega_m(t)$:

$$G_2(s) = \frac{-(R + L\,s)}{(R + L\,s)(b + J\,s) + K_e^2}$$

- La precedente relazione può essere riscritta come

$$\left[L\,J\,s^2 + (R\,J + L\,b)s + R\,b + K_e^2\right]\omega_m(s) = K_eV(s) - (R + L\,s)C_e(s)$$

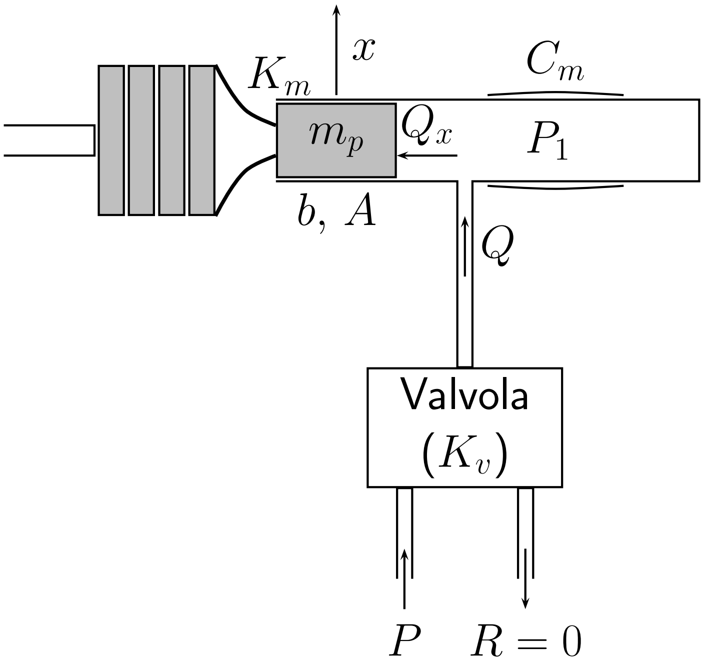
che corrisponde alla seguente equazione differenziale del secondo ordine:

$$L\,J\,\ddot{\omega}_m + (R\,J + L\,b)\dot{\omega}_m + (R\,b + K_e^2)\omega_m = K_eV - R\,C_e - L\,\dot{C}_e$$

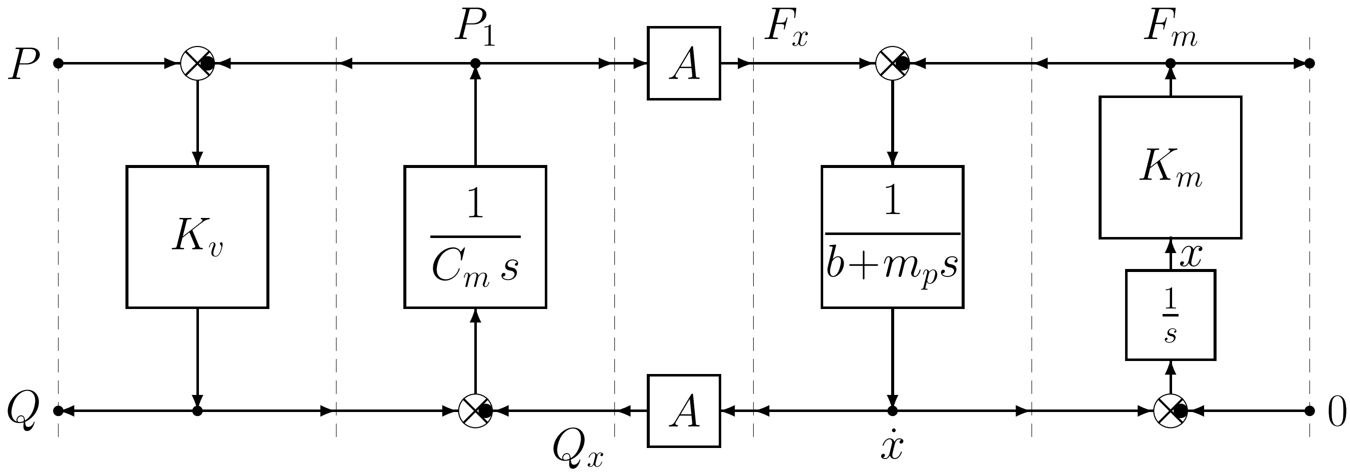
5) Frizione idraulica.

Si consideri il seguente modello idraulico semplificato di una frizione:

P	Pressione di alimentazione
Q	Portata volumetrica nella valvola
K_v	Costante di prop. della valvola
C_m	Capacità idraulica del cilindro
P_1	Pressione all'interno del cilindro
A	Sezione del pistone
x	Posizione del pistone
$\dot{x}$	Velocità del pistone
m_p	Massa del pistone
b	Attrito lineare del pistone
K_m	Rigidità della molla
F_m	Forza della molla sul pistone



- Uno schema a blocchi che descrive la dinamica del sistema è il seguente:



- Riducendo il sistema in forma minima si ottiene la seguente f.d.t. $G(s)$:

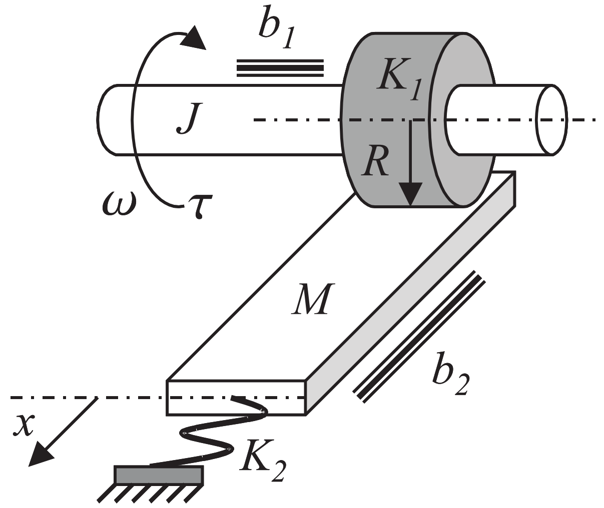
$$G(s) = \frac{F_m(s)}{P(s)} = \frac{A K_m K_v}{C_m m_p s^3 + (C_m\, b + K_v m_p) s^2 + (A^2 + C_m K_m + K_v\, b) s + K_m K_v}$$

a cui corrisponde la seguente equazione differenziale del terzo ordine:

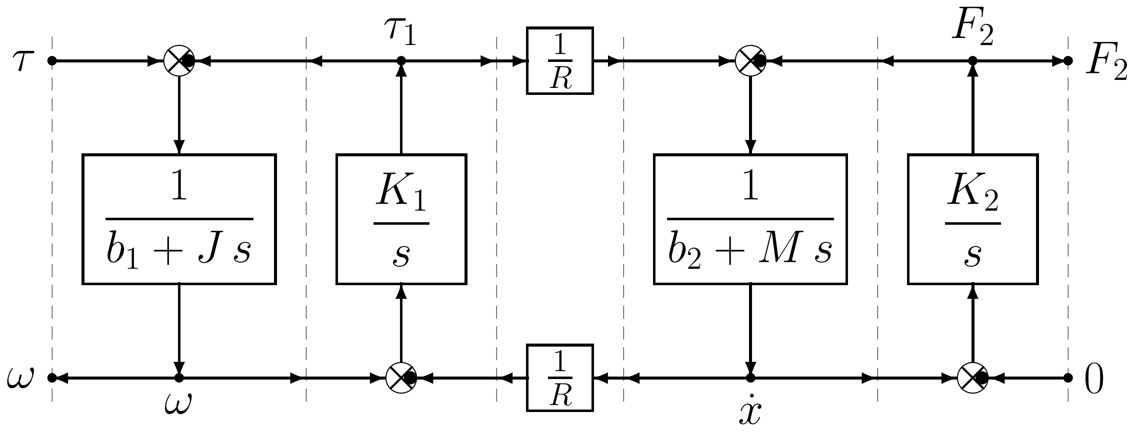
$$C_m m_p \dddot{F}_m + (C_m\, b + K_v m_p) \ddot{F}_m + (A^2 + C_m K_m + K_v\, b) \dot{F}_m + K_m K_v F_m = A K_m K_v P(t)$$

6) Sistema meccanico di trasmissione.

Si consideri il sistema meccanico mostrato in figura, costituito da un albero di inerzia J, che ruota a velocità ω, a cui è applicata la coppia esterna τ. Tramite un rullo elastico avente rigidità torsionale K_1 e raggio costante R, l'albero spinge una massa M che comprime una molla lineare con coefficiente di rigidità K_2.



Un possibile schema a blocchi che descrive la dinamica del sistema è il seguente:



La funzione di trasferimento $G(s)$ che lega l'ingresso τ all'uscita F_2 si calcola facilmente utilizzando la formula di Mason :

$$G(s) = \frac{K_1 K_2 R}{a_4\, s^4 + a_3\, s^3 + a_2 s^2 + a_1 s + a_0}$$

dove:

$$\begin{aligned} a_4 &= J\, M\, R^2 \\ a_3 &= (b_2 J + b_1 M) R^2 \\ a_2 &= J\, K_1 + b_1\, b_2\, R^2 + J\, K_2\, R^2 + K_1\, M\, R^2 \\ a_1 &= b_1\, K_1 + b_2\, K_1\, R^2 + b_1\, K_2\, R^2 \\ a_0 &= K_1\, K_2\, R^2 \end{aligned}$$