Esercizi sull'utilizzo delle Trasformate di Laplace

1. Calcolare la trasformata di Laplace $X(s)$ dei seguenti segnali temporali $x(t)$:

$$x_1(t) = 2(1 + t^2)\, e^{5\,t}, \qquad x_2(t) = 4 + 3\, e^{-3t} \sin(7\, t)$$

Soluzione:

$$X_1(s) = \frac{2}{(s-5)} + \frac{4}{(s-5)^3}, \qquad X_1(s) = \frac{4}{s} + \frac{21}{(s+3)^2 + 7^2}$$

2. Calcolare la risposta impulsiva $g_i(t)$ delle seguenti funzioni di trasferimento:

$$G_1(s) = \frac{1}{s} + \frac{1}{s+1} - \frac{2}{s+2}, \qquad \rightarrow \qquad g_1(t) = 1 + e^{-t} - 2\, e^{-2t}$$

$$G_2(s) = 2 + \frac{18}{(s+4)^2 + 6^2}, \qquad \rightarrow \qquad g_2(t) = 2\,\delta(t) + 3\, e^{-4t} \sin(6t)$$

3. Calcolare la trasformata di Laplace $X(s)$ dei seguenti segnali temporali $x(t)$:

$$x_1(t) = 2\, e^{5t} \sin(8\, t), \qquad x_2(t) = 2\, t^2\, e^{-4\,t}$$

<u>Soluzione</u>:

$$X_1(s) = \frac{16}{(s-5)^2 + 64}, \qquad X_2(s) = \frac{4}{(s+4)^3}$$

4. Calcolare la risposta impulsiva $g_1(t)$ della seguente funzioni di trasferimento $G_1(s)$:

$$G_2(s) = \frac{e^{-3\,s}}{s^2}, \qquad \rightarrow \qquad g_2(t) = \begin{cases} 0 & t < 3 \\ t - 3 & t \geq 3 \end{cases}$$

5. Scrivere, in funzione dei segnali $x(t)$ e $y(t)$, l'equazione differenziale corrispondente alla seguente funzione di trasferimento:

$$G(s) = \frac{Y(s)}{X(s)} = \frac{3\,s^2 + b}{s(s^2 + 2\,s + a)}$$

<u>Soluzione</u>:

$$\dddot{y}(t) + 2\,\ddot{y}(t) + a\,\dot{y}(t) = 3\,\ddot{x}(t) + b\,x(t)$$

6. Calcolare il valore iniziale $y_0 = \lim_{t\to 0^+}$ del segnale $y(t)$ corrispondente alla seguente trasformata di Laplace $Y(s)$:

$$Y(s) = \frac{b\,s + 3}{(s+b)(s-a)+2} \qquad \rightarrow \qquad y_0 = b$$

7. Calcolare il valore il valore finale $y_\infty = \lim_{t\to\infty}$ del segnale $y(t)$ corrispondente alla seguente trasformata di Laplace $Y(s)$:

$$Y(s) = \frac{s-a}{(b\,s+3)\,s} \qquad \rightarrow \qquad y_\infty = -\frac{a}{3}$$

8. Calcolare la trasformata $Y(s)$ del segnale di uscita corrispondente all'equazione differenziale $3\,\dot{y}(t) + 4\,y(t) = 0$ con condizione iniziale $y(0)$. <u>Soluzione</u>. Si trasforma secondo Laplace l'equazione differenziale:

$$\mathcal{L}\,[3\,\dot{y}(t) + 4\,y(t) = 0] \qquad \rightarrow \qquad 3\,[s\,Y(s) - y(0)] + 4\,Y(s) = 0$$

da cui si ricava:

$$Y(s) = \frac{3\,y(0)}{3\,s+4} = \frac{y(0)}{s + \frac{4}{3}} \qquad \rightarrow \qquad y(t) = y(0)\,e^{-\frac{4}{3}t}$$