Fondamenti di Controlli Automatici - A.A. 2006/07

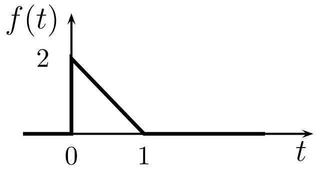
20 Marzo 2007 - Esercizi

Compito B Nr.

Nome:	
Nr. Mat.	
Firma:	

a) Determinare la trasformata di Laplace $X_i(s)$ dei seguenti segnali temporali $x_i(t)$:

$$x_1(t) = 2\,\sin(3\,t)e^{-\frac{t}{2}}, \qquad x_2(t) = [\tfrac{1}{3}\,t\,e^{2\,t} + 4\cos(3\,t)],$$



Soluzione:

$$X_1(s) = \frac{6}{(s+\frac{1}{2})^2 + 9}, \qquad X_2(s) = \frac{1}{3\,(s-2)^2} + \frac{4\,s}{s^2+9}, \qquad X_3(s) = \frac{2}{s}[1 - \frac{1}{s} + \frac{e^{-s}}{s}]$$

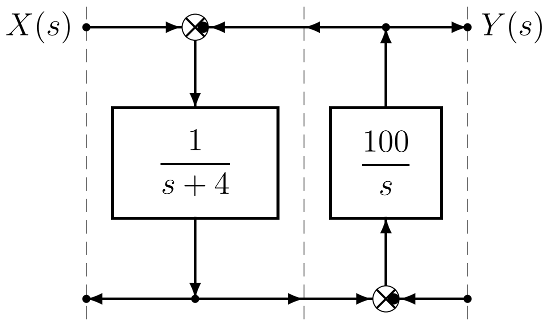
b) Calcolare la risposta impulsiva $g_i(t)$ delle seguenti funzioni di trasferimento $G_i(s)$:

$$G_1(s) = -\frac{3}{2\,s^3}, \qquad G_2(s) = \frac{s-4}{(s-2)\,(s+3)}, \qquad G_3(s) = \frac{1}{(s-2)\,(s+3)^2}$$

Soluzione:

$$g_1(t) = -\frac{3}{4}\,t^2, \qquad g_2(t) = -\frac{2}{5}\,e^{2\,t} + \frac{7}{5}\,e^{-3\,t}, \qquad g_3(t) = \frac{1}{25}\,e^{2\,t} - \frac{1}{25}\,e^{-3\,t} - \frac{1}{5}\,t\,e^{-3\,t}$$

c) Lo schema a blocchi riportato a fianco rappresenta un sistema dinamico del secondo ordine.



c.1) Utilizzando la formula di Mason, calcolare la funzione di trasferimento $G(s)$ che lega l'ingresso $X(s)$ all'uscita $Y(s)$:

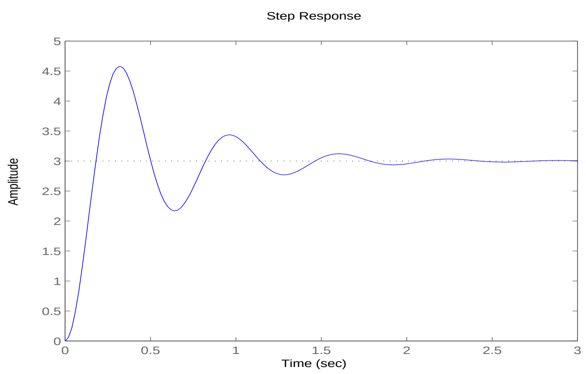
$$G(s) = \frac{Y(s)}{X(s)} = \frac{100}{s^2 + 4\,s + 100}$$

c.2) Relativamente alla funzione di trasferimento $G(s)$ calcolare: 1) la parte reale σ e 2) la parte immaginaria ω dei poli dominanti del sistema; 3) la pulsazione naturale ω_n e 4) il coefficiente di smorzamento δ dei poli dominanti del sistema; 5) il guadagno statico K_0; 6) il tempo di assestamento T_a del sistema $G(s)$ alla risposta al gradino:

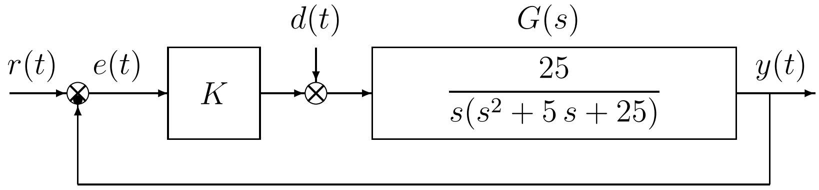
1) $\sigma = -2$ 3) $\omega_n = 10$ 5) $K_0 = 1$

2) $\omega = 9.8$ 4) $\delta = 0.2$ 6) $T_a = 1.5$

c.3) Sul disegno a quadretti riportato a fianco disegnare l'andamento qualitativo della risposta $y(t)$ della funzione di trasferimento $G(s)$ al gradino in ingesso $x(t) = 3$.
Per quanto è possibile, disegnare l'andamento temporale in modo congruente con il valore dei parametri numerici determinati al punto c.2).



d) Sia dato il seguente sistema retroazionato:



d.1) Determinare per quali valori del parametro K il sistema retroazionato è asintoticamente stabile.

Soluzione: l'equazione caratteristica del sistema retroazionato è

$$1 + \frac{25\,K}{s(s^2 + 5\,s + 25)} = 0 \qquad \rightarrow \qquad s^3 + 5\,s^2 + 25\,s + 25\,K = 0$$

La corrispondente tabella di Routh è la seguente

$$\begin{array}{c|cc} 3 & 1 & 25 \\ 2 & 5 & 25\,K \\ 1 & 25 - 5K & \\ 0 & 25\,K & \end{array}$$

Dalla riga 2 e dalla riga 0 si ricavano i seguenti vincoli:

$$K < 5, \qquad\qquad K > 0$$

La pulsazione ω^* corrispondente al valore limite $K^* = 5$ è:

$$\omega^* = \sqrt{\frac{25}{1}} = \sqrt{\frac{25\,K^*}{5}} = 5$$

d.2) Disegnare qualitativamente il diagramma di Nyquist "completo" della funzione $G(s)$. Calcolare esattamente la posizione σ_a dell'asintoto verticale, le eventuali intersezioni σ_i^* con l'asse reale e i corrispondenti valori delle pulsazioni ω_i^*. Determinare inoltre il margine di ampiezza M_α.

Soluzione: Il diagramma di Nyquist della funzione $G(s)$ per $\omega \in [0,\ \infty]$ è mostrato in Fig. 1.

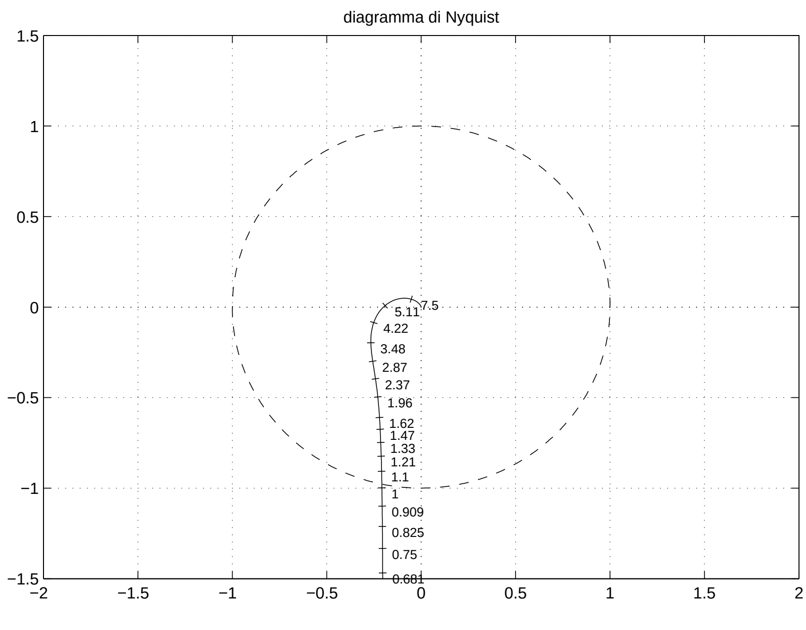


Figura 1: Diagramma di Nyquist della funzione $G(s)$ per $\omega \in [0,\ \infty]$.

Il sistema é di tipo 1 per cui esiste un asintoto verticale in $K_\tau\,\Delta_a = -0.2$.

Esiste un'unica intersezione σ^* con l'asse reale. Tale intersezione si determina facilmente dall'analisi di Routh svolta al punto d.1:

$$\sigma^* = -\frac{1}{K^*} = -0.2$$

Il corrispondente valore di ω^* è 5 mentre il margine di ampiezza è $M_a = \frac{1}{|\sigma^*|} = 5$.

d.3) Calcolare, in funzione del parametro K, l'errore a regime $e(\infty)$ del sistema retroazionato nel caso in cui $r(t) = 2$.

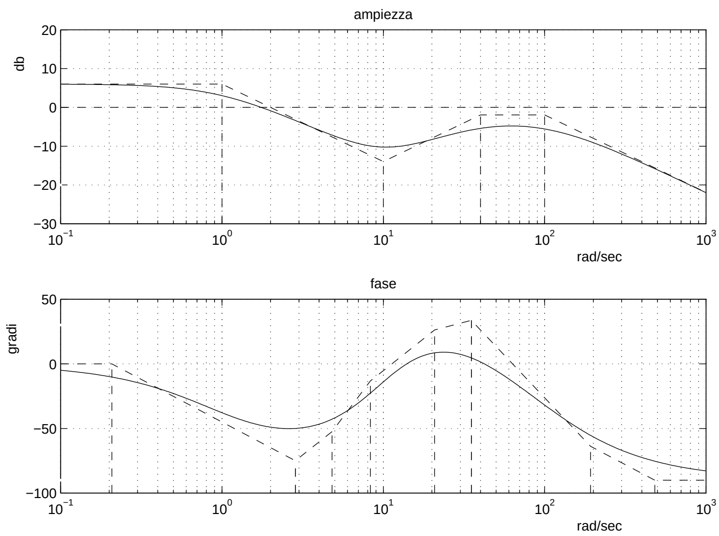
Soluzione: l'errore a regime per ingresso costante è nullo per la presenza di un polo nell'origine nella $G(s)$.

e) Si faccia riferimento ad un sistema $G(s)$ i cui diagrammi di Bode sono mostrati in figura. Nei limiti della precisione consentita dal grafico si risponda alle seguenti domande:

e.1) calcolare la risposta "a regime" $y_\infty(t)$ del sistema $G(s)$ quando in ingresso è presente il segnale: $x(t) = 3 + 2\,\cos(5\,t)$;

e.2) ricavare l'espressione analitica della funzione di trasferimento $G(s)$. Stimare in modo approssimato eventuali valori di δ.

$$G(s) = \frac{80\,(s^2 + 16\,s + 100)}{(s+1)(s+40)(s+100)}$$



La risposta a regime del sistema è:

$$y_\infty(t) = 3\,G(0) + 2\,|G(j\,5)|\,\cos[5\,t + \mathrm{Arg}G(j\,5)] = 6 + 0.88\,\cos[5\,t - 0.73]$$

f) **Non è richiesto lo svolgimento di questo esercizio agli iscritti ad Ingegneria Ambientale.**

Data la funzione di trasferimento:

$$G(s) = \frac{1 + \frac{1}{4}\,s}{s\,(s+9)\,(s^2 + 6\,s + 36)}$$

f.1) Tracciare qualitativamente il luogo delle radici per i valori del guadagno di retroazione K positivi. Soluzione: vedi figura 2.

f.2) Specificare la posizione del centro degli asintoti. Soluzione. $\sigma = -3.667$

f.3) Specificare gli angoli che asintoti formano rispetto all'asse reale positivo. Soluzione. $\phi = 60,\ 180,\ 300$

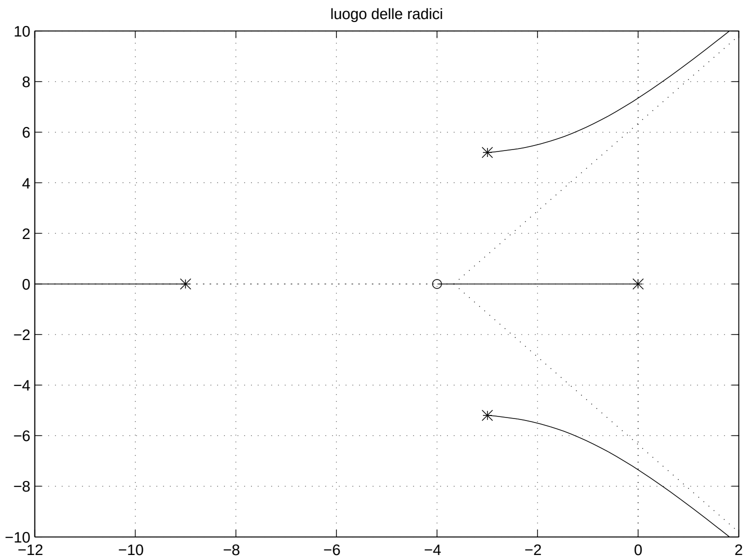


Figura 2: Luogo della radici di $G(s)$.

Fondamenti di Controlli Automatici - A.A. 2006/07
20 Marzo 2007 - Domande Teoriche
Compito B Nr.

Nome:	
Nr. Mat.	
Firma:	

Per ciascuno dei test a soluzione multipla segnare con una crocetta tutte le affermazioni che si ritengono giuste.

1. Il picco di risonanza M_R per un sistema del 2 ordine :
   - ○ $M_R = \frac{\delta}{2\sqrt{1-\delta^2}}$
   - ○ $M_R = \frac{1}{2\delta\sqrt{1-2\delta^2}}$
   - ⊗ $M_R = \frac{1}{2\delta\sqrt{1-\delta^2}}$
   - ○ $M_R = \frac{\delta}{2\sqrt{1-2\delta^2}}$
2. Determinare il tempo di assestamento T_a (al 5% del valore finale) del sistema $G(s) = \frac{2}{(s+25)(s+10)}$:
   $$T_a = 3/10$$
3. Dato il sistema lineare $G(s) = \frac{s+2}{s(s+1)(s+4)}$, il valore finale ($T \to \infty$) della risposta $h(t)$ ad un gradino di ampiezza 2 vale;
   - ⊗ $h(\infty) = \infty$
   - ○ $h(\infty) = \frac{2}{5}$
   - ○ $h(\infty) = 1$
   - ○ $h(\infty) = 0$
4. Scrivere la funzione di trasferimento $G(s)$ corrispondente alla seguente equazione differenziale:
   $$\dddot{x}(t) + 3\,\ddot{x}(t) + 4\,\dot{x}(t) + x(t) = 2\,\dot{u}(t) + 3\,u(t) \quad \to \quad G(s) = \frac{X(s)}{U(s)} = \frac{2\,s+3}{s^3+3\,s^2+4\,s+1}$$
5. Se gli elementi della prima della tabella di Routh di una equazione caratteristica di 3 grado ha tutti gli elementi positivi tranne uno che è negativo, ne segue che l'equazione caratteristica:
   - ○ ha solo una radice a parte reale positiva
   - ⊗ ha almeno una radice a parte reale positiva
   - ⊗ ha almeno una radice a parte reale negativa
   - ⊗ può avere una coppia di radici complesse coniugate a parte reale positiva
6. Scrivere le trasformate di Laplace della funzione seno:
   $$x(t) = \sin(\omega\, t) \;\to\; X(s) = \frac{\omega}{s^2+\omega^2}$$
7. Un sistema di tipo 2
   - ○ ha due zeri nell'origine
   - ⊗ ha due poli nell'origine
   - ⊗ ha un errore a regime nullo nella risposta alla rampa
   - ⊗ ha un errore a regime nullo nella risposta al gradino

8. Dato il seguente diagramma di Nyquist di una funzione $G(s)$ con 2 poli nell'origine e tutti gli altri a parte reale negativa, disegnate il diagramma polare completo.

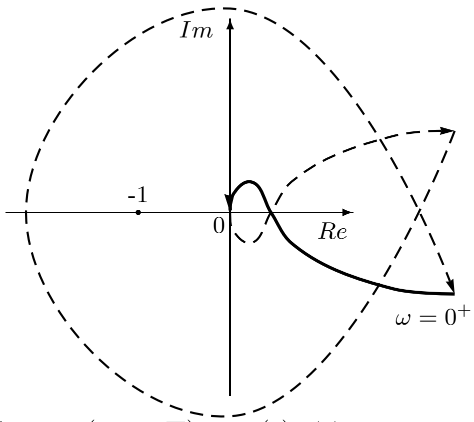
   Utilizzando il criterio di Nyquist è possibile affermare che il sistema retroazionato $K\,G(s)$ è stabile per i seguenti valori di K:

   ○ $(K < 0,\ |K| << 1)$;

   ⊗ $(K < 0,\ |K| >> 1)$;

   ○ $(K > 0,\ |K| >> 1)$;

   ○ $(K > 0,\ |K| << 1)$;



9. Scrivere la trasformata di Laplace della ripetizione periodica $x_p(t+nT) = x(t),\ \forall n,\ 0 \le t \le T$ con periodo $T = 4$ della funzione:

$$x(t) = \begin{cases} 0, & t < 0 \\ -t, & 0 \le t < 1 \\ -2+t, & 1 \le t < 2 \\ 0, & t \ge 2 \end{cases} \quad \rightarrow \quad X_p(s) = \mathcal{L}[x_p(t)] = \frac{1}{s^2\,(1-e^{-4\,s})}\left(-1+2\,e^{-s}-e^{-2s}\right)$$

10. Il luogo dei punti del piano complesso determinato da poli complessi coniugati a coefficiente di smorzamento δ costante è formato da:

    ○ una retta parallela all'asse immaginario;

    ○ due rette parallele all'asse reale.

    ⊗ due semirette uscenti dall'origine;

11. Fornire una stima del tempo di assestamento (al 5% del valore finale) del sistema $G(s) = \frac{1}{10s+1}$ chiuso in retroazione negativa con guadagno $K = 100$:

$$T_a = 0.3$$

12. Il diagramma di Nyquist della funzione $G(s) = \frac{s+1}{s(s-1)}$ ha un asintoto verticale nel punto:

    ○ $\sigma_0 = 0$;

    ○ $\sigma_0 = 2$;

    ⊗ $\sigma_0 = -2$;

Non è rischiesto lo svolgimento delle seguenti domande agli iscritti ad Ingegneria Ambientale.

13. In corrispondenza di una radice con molteplicità h il luogo delle radici:

    ○ almeno una delle tangenti ai rami è parallela all'asse reale;

    ⊗ presenta h rami uscenti;

    ⊗ presenta h rami entranti.

14. Nella graficazione del contorno delle radici al variare del parametro τ, un asintoto può essere percorso dall'infinito al finito:

    ○ solo se il grado del denominatore è maggiore del grado del numeratore;

    ⊗ solo se il grado del numeratore è maggiore del grado del denominatore;

    ○ anche se il grado relativo è nullo.