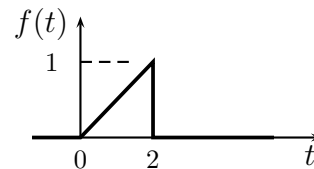


Nome:	
Nr. Mat.	
Firma:	

a) Determinare la trasformata di Laplace $X_i(s)$ dei seguenti segnali temporali $x_i(t)$:

$$x_1(t) = \left[\frac{1}{2} t e^{3t} + 2 \cos(4t)\right], \quad x_2(t) = 3 \sin(2t)e^{-2t},$$



Soluzione:

$$X_1(s) = \frac{1}{2(s-3)^2} + \frac{2s}{s^2+16}, \quad X_2(s) = \frac{6}{(s+2)^2+4}, \quad X_3(s) = \frac{1}{2s} \left[\frac{1}{s} - \frac{e^{-2s}}{s} - 2e^{-2s} \right]$$

b) Calcolare la risposta impulsiva $g_i(t)$ delle seguenti funzioni di trasferimento $G_i(s)$:

$$G_1(s) = \frac{-2}{(s+3)(s-1)^2}, \quad G_2(s) = \frac{2}{3s^3}, \quad G_3(s) = \frac{s+1}{(s+2)(s-3)}$$

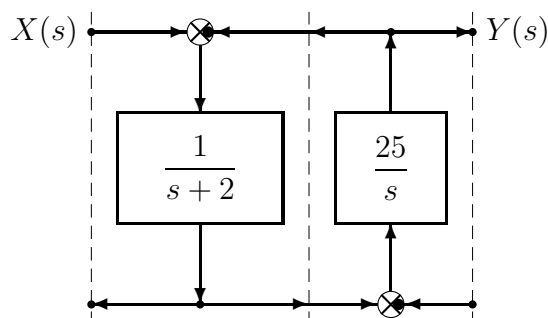
Soluzione:

$$g_1(t) = -\frac{1}{8} e^{-3t} + \frac{1}{8} e^t - \frac{1}{2} t e^t, \quad g_2(t) = \frac{1}{3} t^2, \quad g_3(t) = \frac{1}{5} e^{-2t} + \frac{4}{5} e^{3t}$$

c) Lo schema a blocchi riportato a fianco rappresenta un sistema dinamico del secondo ordine.

c.1) Utilizzando la formula di Mason, calcolare la funzione di trasferimento $G(s)$ che lega l'ingresso $X(s)$ all'uscita $Y(s)$:

$$G(s) = \frac{Y(s)}{X(s)} = \frac{25}{s^2 + 2s + 25}$$

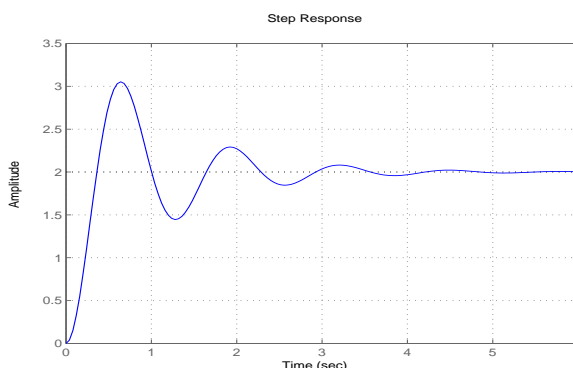


c.2) Relativamente alla funzione di trasferimento $G(s)$ calcolare: 1) la parte reale σ e 2) la parte immaginaria ω dei poli dominanti del sistema; 3) la pulsazione naturale ω_n e 4) il coefficiente di smorzamento δ dei poli dominanti del sistema; 5) il guadagno statico K_0 ; 6) il tempo di assestamento T_a del sistema $G(s)$ alla risposta al gradino:

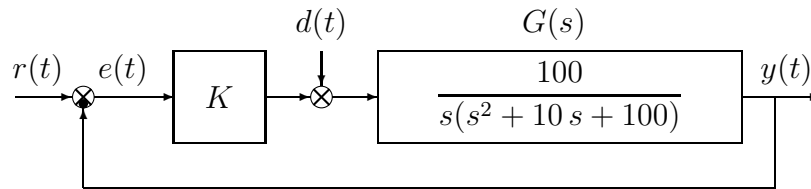
- | | | |
|-------------------|-------------------|--------------|
| 1) $\sigma = -1$ | 3) $\omega_n = 5$ | 5) $K_0 = 1$ |
| 2) $\omega = 4.9$ | 4) $\delta = 0.2$ | 6) $T_a = 3$ |

c.3) Sul disegno a quadretti riportato a fianco disegnare l'andamento qualitativo della risposta $y(t)$ della funzione di trasferimento $G(s)$ al gradino in ingresso $x(t) = 2$.

Per quanto è possibile, disegnare l'andamento temporale in modo congruente con il valore dei parametri numerici determinati al punto c.2).



d) Sia dato il seguente sistema retroazionato:



d.1) Determinare per quali valori del parametro K il sistema retroazionato è asintoticamente stabile.

Soluzione: l'equazione caratteristica del sistema retroazionato è

$$1 + \frac{100 K}{s(s^2 + 10 s + 100)} = 0 \quad \rightarrow \quad s^3 + 10 s^2 + 100 s + 100 K = 0$$

La corrispondente tabella di Routh è la seguente

$$\begin{array}{c|cc} 3 & 1 & 100 \\ 2 & 10 & 100 K \\ 1 & 100 - 10K & \\ 0 & 100 K & \end{array}$$

Dalla riga 2 e dalla riga 0 si ricavano i seguenti vincoli:

$$K < 10, \quad K > 0$$

La pulsazione ω^* corrispondente al valore limite $K^* = 10$ è:

$$\omega^* = \sqrt{\frac{100}{1}} = \sqrt{\frac{100 K^*}{10}} = 10$$

d.2) Disegnare qualitativamente il diagramma di Nyquist “completo” della funzione $G(s)$. Calcolare esattamente la posizione σ_a dell'asintoto verticale, le eventuali intersezioni σ_i^* con l'asse reale e i corrispondenti valori delle pulsazioni ω_i^* . Determinare inoltre il margine di ampiezza M_α .

Soluzione: Il diagramma di Nyquist della funzione $G(s)$ per $\omega \in [0, \infty]$ è mostrato in Fig. 1.

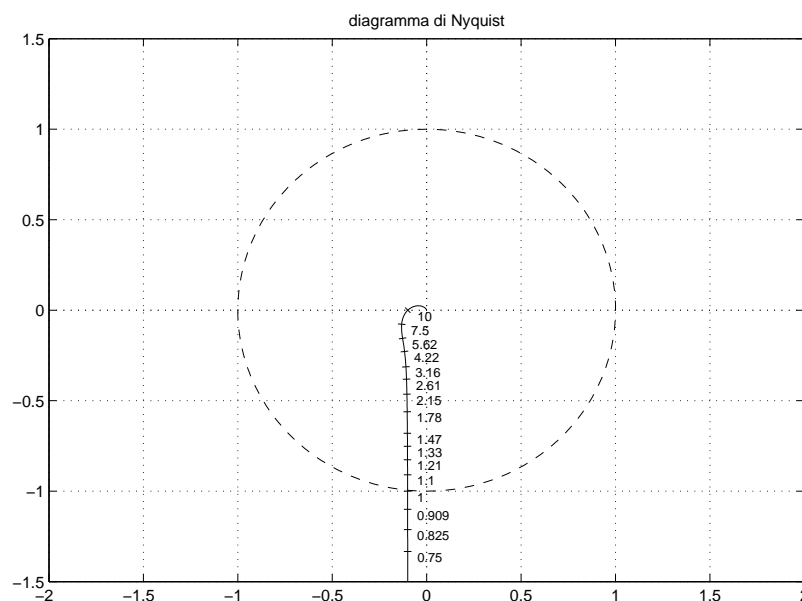


Figura 1: Diagramma di Nyquist della funzione $G(s)$ per $\omega \in [0, \infty]$.

Il sistema é di tipo 1 per cui esiste un asintoto verticale in $K_\tau \Delta_a = -0.1$.

Esiste un'unica intersezione σ^* con l'asse reale. Tale intersezione si determina facilmente dall'analisi di Routh svolta al punto d.1:

$$\sigma^* = -\frac{1}{K^*} = -0.1$$

Il corrispondente valore di ω^* è 10 mentre il margine di ampiezza è $M_a = \frac{1}{|\sigma^*|} = 10$.

d.3) Calcolare, in funzione del parametro K , l'errore a regime $e(\infty)$ del sistema retroazionato nel caso in cui $r(t) = 3$.

Soluzione: l'errore a regime per ingresso costante è nullo per la presenza di un polo nell'origine nella $G(s)$.

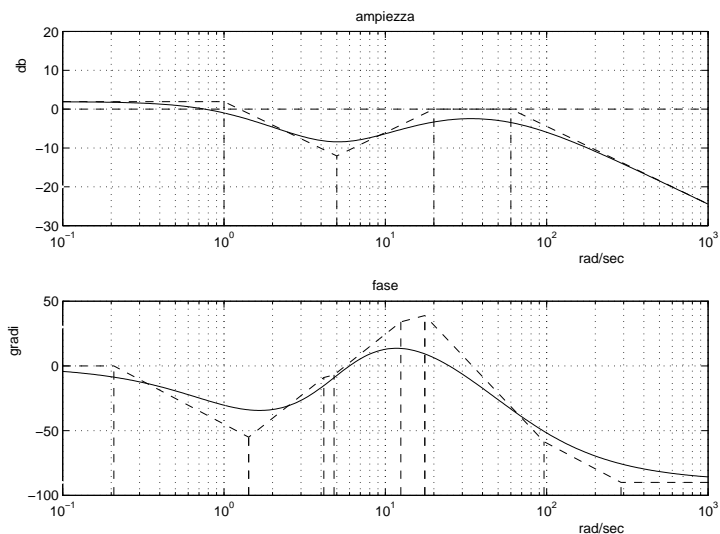
e) Si faccia riferimento ad un sistema $G(s)$ i cui diagrammi di Bode sono mostrati in figura. Nei limiti della precisione consentita dal grafico si risponda alle seguenti domande:

e.1) calcolare la risposta "a regime" $y_\infty(t)$ del sistema $G(s)$ quando in ingresso è presente il segnale:

$$x(t) = 2 + 5 \cos(3t);$$

e.2) ricavare l'espressione analitica della funzione di trasferimento $G(s)$. Stimare in modo approssimato eventuali valori di δ .

$$G(s) = \frac{60(s^2 + 8s + 25)}{(s+1)(s+20)(s+60)}$$



La risposta a regime del sistema è:

$$y_\infty(t) = 2G(0) + 5|G(j3)| \cos[3t + \text{Arg}G(j3)] = 2.5 + 2.25 \cos[3t - 0.46]$$

f) **Non è richiesto lo svolgimento di questo esercizio agli iscritti ad Ingegneria Ambientale.**

Data la funzione di trasferimento:

$$G(s) = \frac{1 + \frac{1}{4}s}{s(s+8)(s^2 + 6s + 25)}$$

f.1) Tracciare qualitativamente il luogo delle radici per i valori del guadagno di retroazione K positivi. Soluzione: vedi figura 2.

f.2) Specificare la posizione del centro degli asintoti. Soluzione. $\sigma = -3.333$

f.3) Specificare gli angoli che asintoti formano rispetto all'asse reale positivo. Soluzione. $\phi = 60, 180, 300$

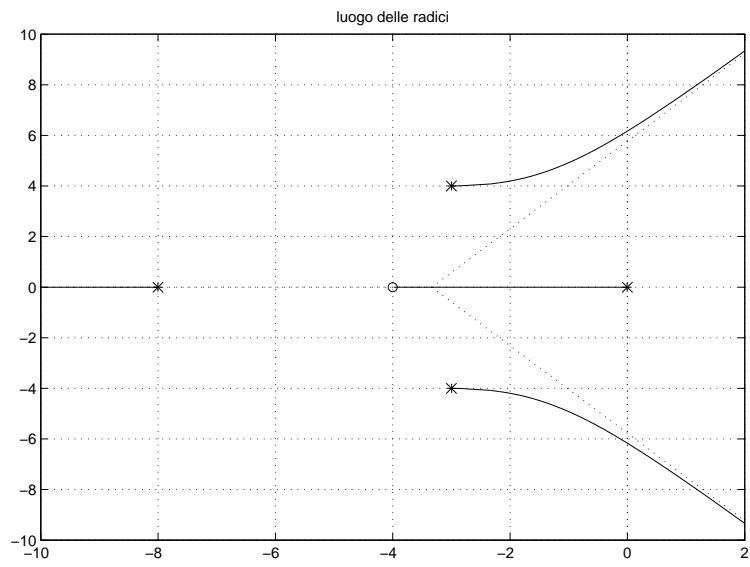


Figura 2: Luogo della radici di $G(s)$.

Fondamenti di Controlli Automatici -
A.A. 2006/07
20 Marzo 2007 - Domande Teoriche
Compito A Nr.

Nome:	
Nr. Mat.	
Firma:	

Per ciascuno dei test a soluzione multipla segnare con una crocetta tutte le affermazioni che si ritengono giuste.

1. Il picco di risonanza M_R per un sistema del 2 ordine :

- $M_R = \frac{1}{2\delta\sqrt{1-\delta^2}}$
 $M_R = \frac{1}{2\delta\sqrt{1-2\delta^2}}$
 $M_R = \frac{\delta}{2\sqrt{1-\delta^2}}$
 $M_R = \frac{\delta}{2\sqrt{1-2\delta^2}}$

2. Determinare il tempo di assestamento T_a (al 5% del valore finale) del sistema $G(s) = \frac{3}{(s+5)(s+20)}$:

$$T_a = 3/5$$

3. Dato il sistema lineare $G(s) = \frac{s+1}{s(s+2)(s+5)}$, il valore finale ($T \rightarrow \infty$) della risposta $h(t)$ ad un gradino di ampiezza 2 vale;

- $h(\infty) = 0$
 $h(\infty) = 1$
 $h(\infty) = \frac{2}{5}$
 $h(\infty) = \infty$

4. Scrivere la funzione di trasferimento $G(s)$ corrispondente alla seguente equazione differenziale:

$$\ddot{y}(t) + 2\dot{y}(t) + y(t) + 3y(t) = 2\dot{x}(t) + 4x(t) \quad \rightarrow \quad G(s) = \frac{Y(s)}{X(s)} = \frac{2s + 4}{s^3 + 2s^2 + s + 3}$$

5. Se gli elementi della prima della tabella di Routh di una equazione caratteristica di 3 grado ha tutti gli elementi positivi tranne uno che è negativo, ne segue che l'equazione caratteristica:

- ha almeno una radice a parte reale negativa
 può avere una coppia di radici complesse coniugate a parte reale positiva
 ha solo una radice a parte reale positiva
 ha almeno una radice a parte reale positiva

6. Scrivere le trasformate di Laplace della funzione coseno:

$$x(t) = \cos(\omega t) \quad \rightarrow \quad X(s) = \frac{s}{s^2 + \omega^2}$$

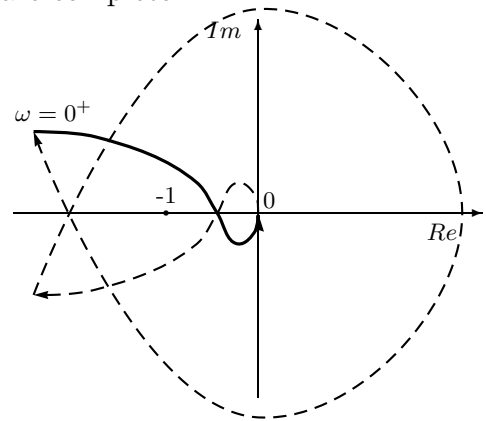
7. Un sistema di tipo 2

- ha due poli nell'origine
 ha due zeri nell'origine
 ha un errore a regime nullo nella risposta al gradino
 ha un errore a regime nullo nella risposta alla rampa

8. Dato il seguente diagramma di Nyquist di una funzione $G(s)$ con 2 poli nell'origine e tutti gli altri a parte reale negativa, disegnate il diagramma polare completo.

Utilizzando il criterio di Nyquist è possibile affermare che il sistema retroazionato $K G(s)$ è stabile per i seguenti valori di K :

- ($K < 0, |K| \gg 1$);
 ($K < 0, |K| \ll 1$);
 ($K > 0, |K| \ll 1$);
 ($K > 0, |K| \gg 1$);



9. Scrivere la trasformata di Laplace della ripetizione periodica $x_p(t + nT) = x(t), \forall n, 0 \leq t \leq T$ con periodo $T = 3$ della funzione:

$$x(t) = \begin{cases} 0, & t < 0 \\ t, & 0 \leq t < 1 \\ 2 - t, & 1 \leq t < 2 \\ 0, & t \geq 2 \end{cases} \rightarrow X_p(s) = \mathcal{L}[x_p(t)] = \frac{1}{s^2(1 - e^{-3s})} (1 - 2e^{-s} + e^{-2s})$$

10. Il luogo dei punti del piano complesso determinato da poli complessi coniugati a coefficiente di smorzamento δ costante è formato da:

- due semirette uscenti dall'origine;
 una retta parallela all'asse immaginario;
 due rette parallele all'asse reale.

11. Fornire una stima del tempo di assestamento (al 5% del valore finale) del sistema $G(s) = \frac{10}{s+1}$ chiuso in retroazione negativa con guadagno $K = 10$:

$$T_a = 0.03$$

12. Il diagramma di Nyquist della funzione $G(s) = \frac{s-1}{s(s+1)}$ ha un asintoto verticale nel punto:

- $\sigma_0 = 0$;
 $\sigma_0 = 2$;
 $\sigma_0 = -2$;

Non è rischiesto lo svolgimento delle seguenti domande agli iscritti ad Ingegneria Ambientale.

13. In corrispondenza di una radice con molteplicità h il luogo delle radici:

- presenta h rami entranti;
 presenta h rami uscenti;
 almeno una delle tangenti ai rami è parallela all'asse reale.

14. Nella graficazione del contorno delle radici al variare del parametro τ , un asintoto può essere percorso dall'infinito al finito:

- solo se il grado del numeratore è maggiore del grado del denominatore;
 solo se il grado del denominatore è maggiore del grado del numeratore;
 anche se il grado relativo è nullo.