Fondamenti di Controlli Automatici - A.A. 2007/08

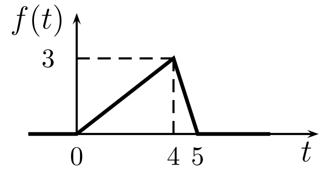
18 Dicembre 2007 - Esercizi

Compito B Nr.

Nome:	
Nr. Mat.	
Firma:	

a) Determinare la trasformata di Laplace $X_i(s)$ dei seguenti segnali temporali $x_i(t)$:

$$x_1(t) = 3\,e^{(-t+3)}\cos(4\,t-12), \qquad x_2(t) = \tfrac{t^2}{5}\,e^{-t} + 2\,\sin(4\,\pi\,t),$$



Soluzione:

$$X_1(s) = \frac{3\,(s+1)\,e^{-3s}}{(s+1)^2+16}, \qquad X_2(s) = \frac{2}{5\,(s+1)^3}+\frac{8\,\pi}{s^2+16\,\pi^2}, \qquad X_3(s) = \frac{3}{4\,s^2}\left[1-5\,e^{-4s}+4\,e^{-5\,s}\right]$$

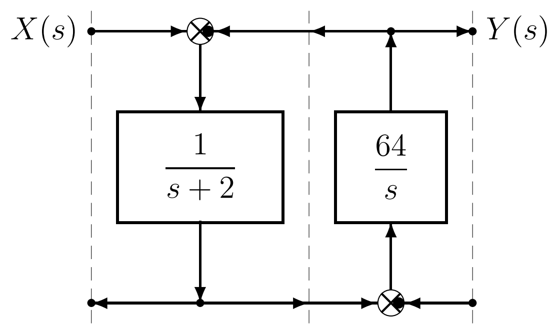
b) Calcolare la risposta impulsiva $g_i(t)$ delle seguenti funzioni di trasferimento $G_i(s)$:

$$G_1(s) = -\frac{2\,e^{-5\,s}}{(s+3)^4}, \qquad G_2(s) = \frac{s+1}{(s-2)\,(s-3)\,(s+4)}, \qquad G_3(s) = \frac{2}{(s-3)\,(s+4)^2}$$

Soluzione:

$$g_1(t) = -\frac{1}{3}\,(t-5)^3\,e^{-3\,(t-5)}, \qquad g_2(t) = -\frac{1}{2}\,e^{2\,t}+\frac{4}{7}\,e^{3\,t}-\frac{1}{14}\,e^{-4\,t}, \qquad g_3(t) = \frac{2}{49}\,e^{3\,t}-\frac{2}{49}\,e^{-4\,t}-\frac{2}{7}\,t\,e^{-4\,t}$$

c) Lo schema a blocchi riportato a fianco rappresenta un sistema dinamico del secondo ordine.



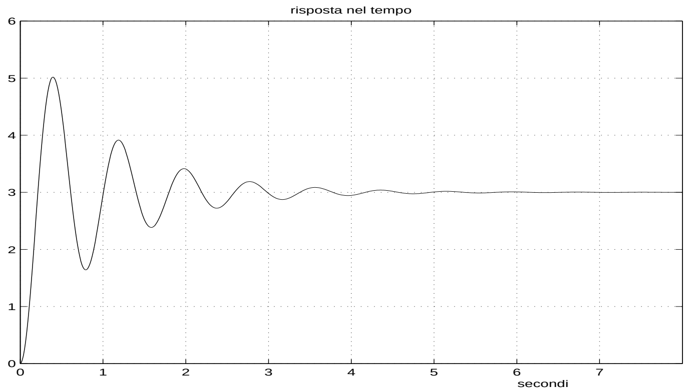
c.1) Utilizzando la formula di Mason, calcolare la funzione di trasferimento $G(s)$ che lega l'ingresso $X(s)$ all'uscita $Y(s)$:

$$G(s) = \frac{Y(s)}{X(s)} = \frac{64}{s^2+2\,s+64}$$

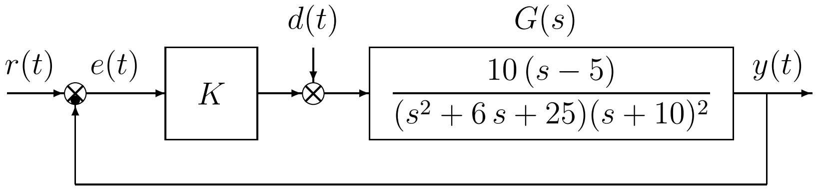
c.2) Relativamente alla funzione di trasferimento $G(s)$ calcolare: 1) la parte reale σ e 2) la parte immaginaria ω dei poli dominanti del sistema; 3) la pulsazione naturale ω_n e 4) il coefficiente di smorzamento δ dei poli dominanti del sistema; 5) il guadagno statico K_0; 6) il tempo di assestamento T_a del sistema $G(s)$ alla risposta al gradino; 7) la massima sovraelongazione percentuale $S\%$; 8) l'istante di massima sovraelongazione T_m; 9) il periodo delle oscillazioni T (distanza temporale fra due massimi o due minimi consecutivi):

1) $\sigma = -1$	3) $\omega_n = 8$	5) $K_0 = 1$
2) $\omega = 7.92$	4) $\delta = 0.125$	6) $T_a = 3$
7) $S\% = 67.31$	8) $T_m = 0.3957$	9) $T = 0.7914$

c.3) Sul disegno a quadretti riportato a fianco disegnare l'andamento qualitativo della risposta $y(t)$ della funzione di trasferimento $G(s)$ al gradino in ingesso $x(t) = 3$.
Per quanto è possibile, disegnare l'andamento temporale in modo congruente con il valore dei parametri numerici determinati al punto c.2).



d) Sia dato il seguente sistema retroazionato:



d.1) Determinare per quali valori del parametro K il sistema retroazionato è asintoticamente stabile.

Soluzione: l'equazione caratteristica del sistema retroazionato è

$$1+\frac{10K\,(s-5)}{(s^2+6\,s+25)(s+10)^2}=0 \qquad \rightarrow \qquad s^4+26\,s^3+245\,s^2+(1100+10K)\,s+2500-50K=0$$

La corrispondente tabella di Routh è la seguente

4	1	245	$2500-50K$
3	26	$(1100+10K)$	
2	$5270-10K$	$65000-1300K$	
1	$-100K^2+75500K+4107000$		
0	$65000-1300K$		

Dalla riga 2 si ricava $K < 527$ mentre dalla riga 0 si ricava $K < 50$.

Dalla riga 1 si ottiene:

$$K^2-755K-41070<0 \rightarrow K_{1,2}=\frac{755\pm\sqrt{570025+164280}}{2} \rightarrow K_1=-50.96, \quad K_2=805.96$$

da cui: $-50.96 < K < 805.96$.

Considerando i valori ammissibili di K ricavati dalle righe 0, 1 e 2, si ottiene che il sistema risulta asintoticamente stabile per:

$$-50.96 = K_1^* < K < K_2^* = 50$$

La pulsazione ω_1^* di attrversamento corrisponde al valore limite $K_1^* = -50.96$ che annulla la riga 1:

$$\omega_1^*=\sqrt{\frac{1100+10K_1^*}{26}} \rightarrow \omega_1^*=4.77$$

Al valore K_2^* corrisponde pulsazione nulla, come si può ricavare dall'analisi del diagramma di Nyquist. Esiste una seconda pulsazione di attraversamento corrispondente al secondo valore $K_2 = 805.96$ che annulla la riga 1:

$$\omega_2^*=\sqrt{\frac{1100+10K_2}{26}} \rightarrow \omega_2^*=18.77$$

d.2) Determinare per quale valore positivo del parametro K si ha un errore a regime $|e_\infty(t)| < 1$ quando sul sistema agiscono contemporaneamente il disturbo costante $d(t) = 2$ e il riferimento costante $r(t) = 1$.

Soluzione: Il valore a regime dell'errore è:

$$e_\infty = \frac{r + G(0)d}{1 + K\,G(0)} < 1$$

Il sistema $G(s)$è di tipo 0, ed il suo guadagno statico vale $G(0) = -\frac{1}{50}$. Sostituendo i valori numerici si ottengono le condizioni sul valore di K che garantiscono l'errore a regime richiesto, ovvero $K = 2$.

d.3) Disegnare qualitativamente il diagramma di Nyquist "completo" della funzione di trasferimento $G(s)$. Calcolare esattamente la posizione σ_a degli eventuali asintoti, le eventuali intersezioni σ_i^* con l'asse reale e i corrispondenti valori delle pulsazioni ω_i^*. Determinare inoltre il margine di ampiezza M_α.

Soluzione: Il diagramma di Nyquist della funzione $G(s)$ per $\omega \in [0,\ \infty]$ è mostrato in Fig. 3.

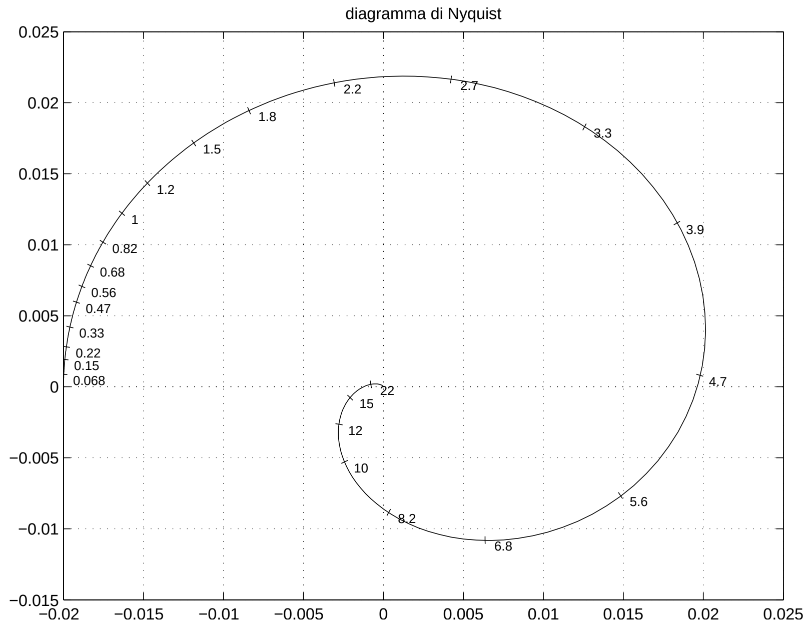


Figura 3: Diagramma di Nyquist della funzione $G(s)$ per $\omega \in [0,\ \infty]$.

Il sistema é di tipo 0, percui non esiste nessun asintoto verticale.

Esistono tre intersezioni con l'asse reale. Tali intersezioni e i corrispondenti valori di pulsazione ω si determinano facilmente dall'analisi di Routh svolta al punto d.1:

$$\sigma_1^* = -\frac{1}{K_1^*} = -0.02, \quad \omega = 0$$

$$\sigma_2^* = -\frac{1}{K_2^*} = 0.0196, \quad \omega = 4.77$$

$$\sigma_3^* = -\frac{1}{K_2} = -0.0012, \quad \omega = 18.77$$

Il margine di ampiezza è $M_a = \frac{1}{|\sigma_1^*|} = 50$.

d.4) In base al criterio di Nyquist, dire se il sistema $G(s)$ posto in retroazione negativa unitaria è stabile o instabile e spiegarne la motivazione.

Soluzione: Per $K_1^* < K < K_2^*$ il diagramma di Nyquist non circonda il punto -1. L'assenza di poli a parte reale positiva rende il sistema in retroazione stabile.

Per $K > K_2^*$ e $K < K_1^*$ il diagramma di Nyquist circonda il punto -1. L'assenza di poli a parte reale positiva rende il sistema in retroazione instabile.

Quindi è possibile affermare che il sistema chiuso in retroazione unitaria è stabile.

e) Con riferimento alla funzione di trasferimento $G(s)$ dell'esercizio precedente, si risponda alle seguenti domande:

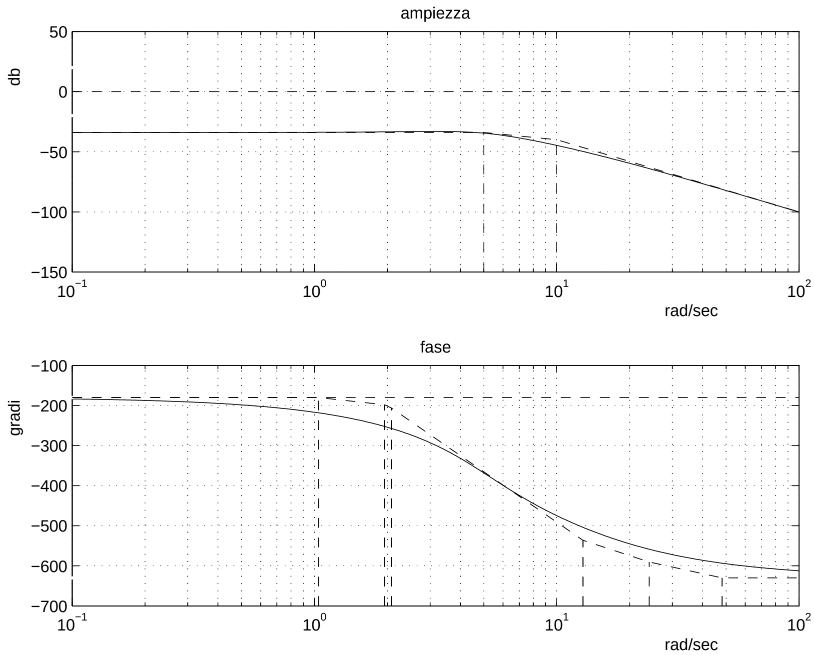
e.1) Tracciare qualitativamente i diagrammi di Bode delle ampiezze e della fasi della funzione di trasferimento $G(s)$;

e.2) Posto $K = -50$, fornire una stima della larghezza di banda del sistema retroazionato;

Soluzione: La banda passante del sistema può essere determinata dal punto di incrocio del diagramma di Bode delle ampiezze con l'asse 0 db. Una stima della banda passante del sistema è quindi $\omega_T = 5\, rad/s$.

e.3) Fornire una stima della risposta "a regime" $y_\infty(t)$ del sistema retroazionato quando il disturbo $d(t) = 0$ e in ingresso è presente il segnale $r(t) = 2 + 3\cos(5\,t)$.

Soluzione: L'uscita del sistema retroazionato risulta essere: $y(t) = 1 + 17.67\cos(5\,t - 4.4)$.



f) **Non è richiesto lo svolgimento di questo esercizio agli iscritti ad Ingegneria Ambientale.**

Si faccia riferimento al sistema descritto nell'esercizio d):

f.1) Tracciare qualitativamente il luogo delle radici del sistema retroazionato per valori positivi del parametro K. Determinare qualitativamente gli eventuali punti di diramazione. Soluzione: vedi figure 4 .

Non vi sono punti di diramazione sull'asse reale.

f.2) Determinare il centro degli asintoti, gli angoli che gli asintoti formano rispetto all'asse reale positivo, le intersezioni del luogo delle radici con l'asse immaginario e i corrispondenti valori del parametro K.

Soluzione:

$$\sigma = -10$$
$$\phi = 60,\ 180,\ 300$$
$$s^* = \pm 18.77\, i$$
$$K^* = 805.96$$

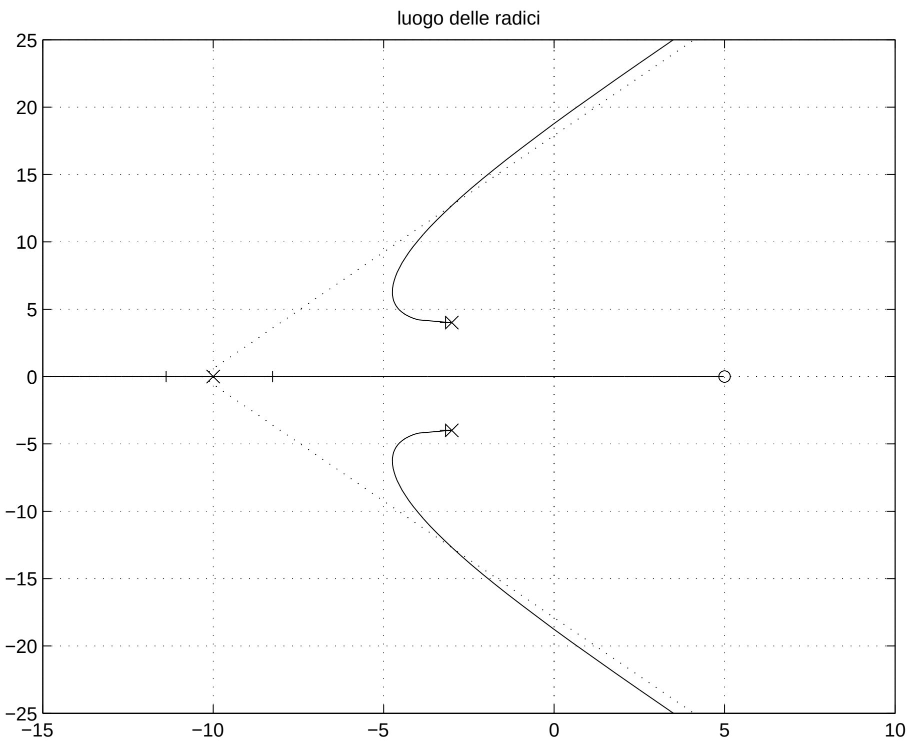


Figura 4: Luogo della radici di $G(s)$ per $K > 0$.

Fondamenti di Controlli Automatici - A.A. 2007/08

18 Dicembre 2007 - Domande Teoriche

Compito B Nr.

Nome:	
Nr. Mat.	
Firma:	

Per ciascuno dei test a soluzione multipla segnare con una crocetta tutte le affermazioni che si ritengono giuste.

1. Un sistema di “tipo 3” è caratterizzato da:

   ○ grado relativo $n - m = 3$;

   ○ 3 poli complessi coniugati;

   ⊗ 3 poli nulli.

2. Per $\omega \in [-\infty, \infty]$, il diagramma di Nyquist “completo” di un sistema $G(s)$ di tipo 0:

   ○ deve essere chiuso all’infinito con una semicirconferenza percorsa in senso orario;

   ○ deve essere chiuso all’infinito con una semicirconferenza percorsa in senso antiorario;

   ⊗ non necessita di essere chiuso all’infinito.

3. Un sistema lineare $G(s)$ avente poli multipli posizionati sull’asse immaginario può essere:

   ⊗ instabile;

   ○ stabile ingresso limitato - uscita limitata;

   ⊗ semplicemente stabile.

4. Se gli elementi della prima colonna della tabella di Routh di una equazione caratteristica di 4 grado ha tutti gli elementi positivi tranne uno che è negativo, ne segue che l’equazione caratteristica:

   ○ ha solo una radice a parte reale positiva

   ⊗ ha almeno una radice a parte reale positiva

   ⊗ ha almeno una radice a parte reale negativa

   ⊗ può avere una coppia di radici complesse coniugate a parte reale positiva

5. Scrivere la funzione di trasferimento $G(s)$ corrispondente alla seguente equazione differenziale:

$$2\,\ddot{x}(t) + 8\,\dot{x}(t) + 4\,x(t) = 3\,\dot{u}(t) + 6\,\dot{u}(t) + 9\,u(t) \qquad \rightarrow \qquad G(s) = \frac{X(s)}{U(s)} = \frac{3\,s^2 + 6\,s + 9}{2\,s^2 + 8\,s + 4}$$

6. Il luogo dei punti del piano complesso determinato da poli complessi coniugati di sistemi del secondo ordine con coefficiente di smorzamento costante è formato da:

   ○ una retta parallela all’asse immaginario;

   ○ due rette parallele all’asse reale;

   ○ una semicirconferenza nel semipiano reale negativo centrata nell’origine;

   ⊗ due semirette uscenti dall’origine.

7. La funzione complessa $X(s) = \frac{s}{(s+4)^2}$ è la trasformata di Laplace:

   ⊗ di un segnale $x(t)$ che tende a zero per $t \to \infty$;

   ⊗ di un segnale $x(t)$ che tende a 1 per $t \to 0$;

   ○ del segnale $x(t) = t^2 e^{-(t-4)}$;

   ○ del segnale $x(t) = te^{-4t}$.

8. Un sistema dinamico lineare è stabile se la sua funzione di trasferimento ha tutti i poli:

   ○ a parte reale positiva ed eventuali poli a parte reale nulla hanno molteplicità unitaria;
   ○ a parte reale strettamente positiva.
   ⊗ a parte reale negativa ed eventuali poli a parte reale nulla hanno molteplicità unitaria;
   ⊗ a parte reale strettamente negativa.

9. Sia $\mathcal{L}[f(t)] = F(s)$ la trasformata di Laplace della funzione $f(t)$. Vale la relazione:

   ○ $\mathcal{L}\left[\frac{df}{dt}\right] = \frac{1}{s}F(s) - f(0-)$;
   ○ $\mathcal{L}\left[\frac{df}{dt}\right] = \frac{1}{s}F(s)$;
   ⊗ $\mathcal{L}\left[\frac{df}{dt}\right] = s\,F(s) - f(0-)$;
   ○ $\mathcal{L}\left[\frac{df}{dt}\right] = sF(s)$.

10. Il diagramma di Nyquist della funzione $G(s) = \frac{s+1}{s(s^2+4\,s+16)}$ per $\omega \in [0,\, \infty]$:

   ○ ha guadagno statico unitario;
   ○ si evolve tutta nel semipiano positivo;
   ⊗ presenta un asintoto verticale;
   ○ è chiuso all'infinito da una semicirconferenza percorsa in senso orario.

11. Un sistema $G(s)$ a fase minima di tipo 2 e con grado relativo 3 presenta nel diagramma asintotico di Bode delle fasi:

   ○ una fase di $-\frac{\pi}{2}$ per $\omega \to 0$;
   ⊗ una fase di $-\pi$ per $\omega \to 0$;
   ⊗ una fase di $-\frac{3\pi}{2}$ per $\omega \to \infty$;
   ○ una fase di $-\pi$ per $\omega \to \infty$.

12. L'errore a regime di un sistema $G(s)$ con ingresso del tipo $u(t) = R_0\,t$ si può determinare come $e = \frac{R_0}{K_e}$, dove K_e vale:

   ○ $K_e = \lim_{s\to 0} s^2\,G(s)$;
   ⊗ $K_e = \lim_{s\to 0} s\,G(s)$;
   ○ $K_e = \lim_{s\to 0} G(s)$.

Non è richiesto lo svolgimento delle seguenti domande agli iscritti ad Ingegneria Ambientale.

13. Il luogo delle radici del sistema $\frac{1}{(s+1)(s+2)}$ per valori positivi del guadagno di retroazione:

   ⊗ ha due asintoti verticali;
   ○ ha un asintoto orizzontale corrispondente all'intervallo $(-\infty,\, -2]$;
   ⊗ presenta una diramazione nel punto $-1.5 + j0$.

14. Un problema di contorno delle radici:

   ⊗ si ha quando a variare non è il guadagno di retroazione K ma un qualunque altro parametro del sistema;
   ○ può sempre essere ricondotto ad un problema di luogo delle radici;
   ⊗ può essere ricondotto ad un problema di luogo delle radici tutte le volte che il parametro che varia entra linearmente nell'equazione caratteristica del sistema retroazionato.