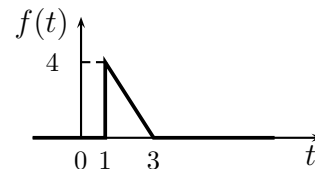


Nome:	
Nr. Mat.	
Firma:	

a) Determinare la trasformata di Laplace $X_i(s)$ dei seguenti segnali temporali $x_i(t)$:

$$x_1(t) = \frac{t^3}{6} e^{-2t} + 2 \cos(2\pi t), \quad x_2(t) = 5 \sin(2t - 6),$$



Soluzione:

$$X_1(s) = \frac{1}{(s+2)^4} + \frac{2s}{s^2 + 4\pi^2}, \quad X_2(s) = \frac{10e^{-3s}}{s^2 + 4}, \quad X_3(s) = \frac{2}{s} \left[-\frac{e^{-s}}{s} + 2e^{-s} + \frac{e^{-3s}}{s} \right]$$

b) Calcolare la risposta impulsiva $g_i(t)$ delle seguenti funzioni di trasferimento $G_i(s)$:

$$G_1(s) = \frac{-4}{(s+2)(s-5)^2}, \quad G_2(s) = \frac{6}{(s+1)^3}, \quad G_3(s) = \frac{s-1}{(s+2)(s-3)(s+4)}$$

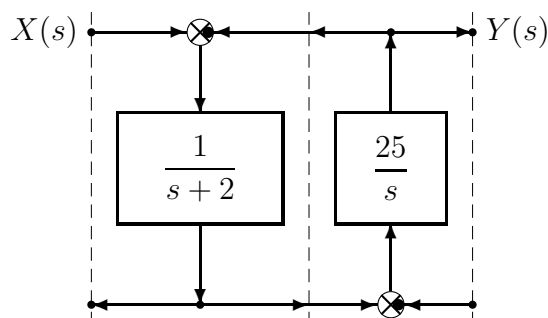
Soluzione:

$$g_1(t) = -\frac{4}{49} e^{-2t} + \frac{4}{49} e^{5t} - \frac{4}{7} t e^{5t}, \quad g_2(t) = 3t^2 e^{-t}, \quad g_3(t) = \frac{3}{10} e^{-2t} + \frac{2}{35} e^{3t} - \frac{5}{14} e^{-4t}$$

c) Lo schema a blocchi riportato a fianco rappresenta un sistema dinamico del secondo ordine.

c.1) Utilizzando la formula di Mason, calcolare la funzione di trasferimento $G(s)$ che lega l'ingresso $X(s)$ all'uscita $Y(s)$:

$$G(s) = \frac{Y(s)}{X(s)} = \frac{25}{s^2 + 2s + 25}$$

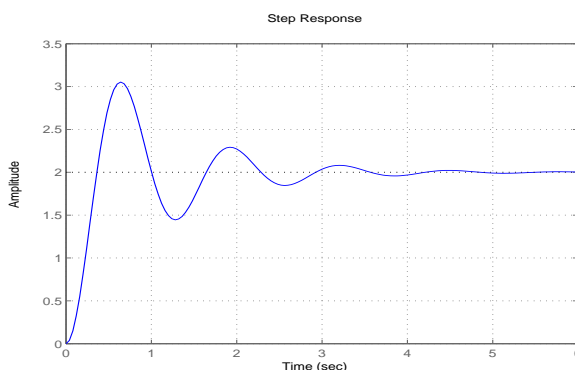


c.2) Relativamente alla funzione di trasferimento $G(s)$ calcolare: 1) la parte reale σ e 2) la parte immaginaria ω dei poli dominanti del sistema; 3) la pulsazione naturale ω_n e 4) il coefficiente di smorzamento δ dei poli dominanti del sistema; 5) il guadagno statico K_0 ; 6) il tempo di assestamento T_a del sistema $G(s)$ alla risposta al gradino:

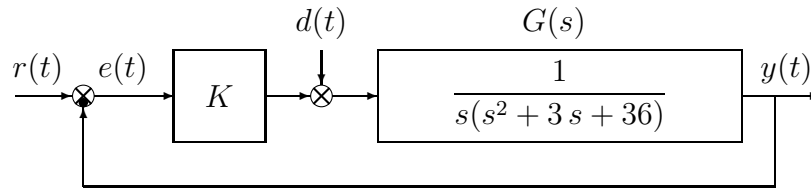
- | | | |
|-------------------|-------------------|--------------|
| 1) $\sigma = -1$ | 3) $\omega_n = 5$ | 5) $K_0 = 1$ |
| 2) $\omega = 4.9$ | 4) $\delta = 0.2$ | 6) $T_a = 3$ |

c.3) Sul disegno a quadretti riportato a fianco disegnare l'andamento qualitativo della risposta $y(t)$ della funzione di trasferimento $G(s)$ al gradino in ingresso $x(t) = 2$.

Per quanto è possibile, disegnare l'andamento temporale in modo congruente con il valore dei parametri numerici determinati al punto c.2).



d) Sia dato il seguente sistema retroazionato:



d.1) Determinare per quali valori del parametro K il sistema retroazionato è asintoticamente stabile.

Soluzione: l'equazione caratteristica del sistema retroazionato è

$$1 + \frac{K}{s(s^2 + 3s + 36)} = 0 \quad \rightarrow \quad s^3 + 3s^2 + 36s + K = 0$$

La corrispondente tabella di Routh è la seguente

$$\begin{array}{c|cc} 3 & 1 & 36 \\ 2 & 3 & K \\ 1 & 36 - \frac{1}{3}K & \\ 0 & K & \end{array}$$

Dalla riga 1 e dalla riga 0 si ricavano i seguenti vincoli:

$$K > 0, \quad K < 108$$

La pulsazione ω^* corrispondente al valore limite $K^* = 108$ è:

$$\omega^* = \sqrt{36} = 6$$

d.2) Posto $r(t) = 0$, si determini il valore del parametro K tale da garantire che in presenza del disturbo costante $d(t) = d_0$, il valore a regime dell'uscita $y(t)$ sia $y_\infty = 0.2 d_0$.

Soluzione: Il valore a regime dell'uscita corrispondente all'applicazione del disturbo costante $d(t) = d_0$ è

$$y_\infty = \frac{G(0) d_0}{1 + K G(0)} = \frac{d_0}{K} = 0.2 d_0$$

Il sistema $G(s)$ è di tipo 1 e quindi il suo guadagno statico infinito $G(0) = \infty$. Il valore di uscita richiesto si ha per $K = 5$.

d.3) Posto $d(t) = 0$, calcolare, in funzione del parametro K , l'errore a regime $e_\infty(t)$ corrispondente all'applicazione del segnale di ingresso a rampa $r(t) = 2t$.

Soluzione: L'errore a regime $e_\infty = \frac{2}{K_v}$ con $K_v = \frac{K}{36}$. Si ottiene quindi che:

$$e_\infty = \frac{72}{K}.$$

d.4) Posto $K = 1$, disegnare qualitativamente il diagramma di Nyquist "completo" del guadagno d'anello $K G(s)$. Calcolare esattamente la posizione σ_a dell'asintoto verticale, le eventuali intersezioni σ_i^* con l'asse reale e i corrispondenti valori delle pulsazioni ω_i^* . Determinare inoltre il margine di ampiezza M_α .

Soluzione: Il diagramma di Nyquist della funzione $G(s)$ per $\omega \in [0, \infty]$ è mostrato in Fig. 1.

Il sistema è di tipo 1 per cui esiste un asintoto verticale in $K_r \Delta_a = -0.0023$.

Esiste un'unica intersezione σ^* con l'asse reale. Tale intersezione si determina facilmente dall'analisi di Routh svolta al punto d.1:

$$\sigma^* = -\frac{1}{K^*} = -0.0092$$

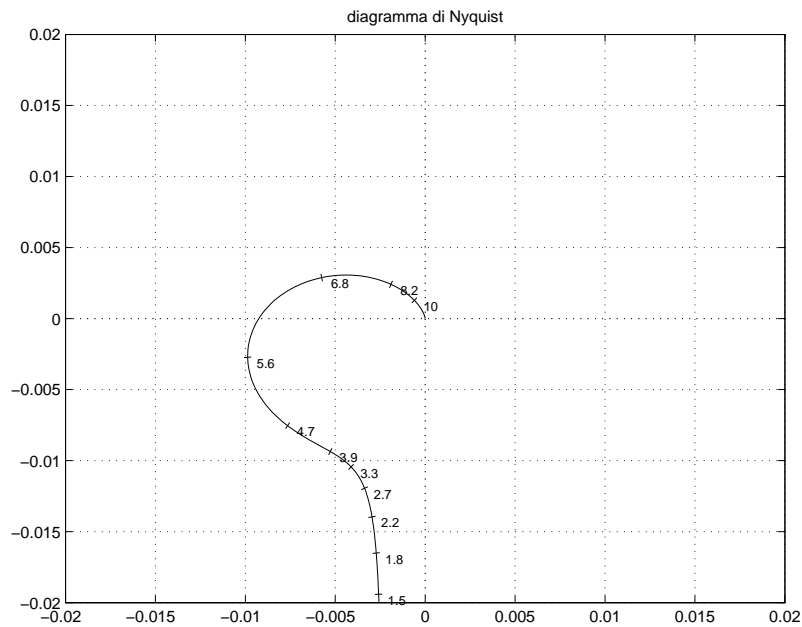


Figura 1: Diagramma di Nyquist della funzione $G(s)$ per $\omega \in [0, \infty]$.

Il corrispondente valore di ω^* è 6 mentre il margine di ampiezza è $M_a = \frac{1}{|\sigma^*|} = 108$.

e) Si faccia riferimento ad un sistema $G(s)$ i cui diagrammi di Bode sono mostrati in figura. Nei limiti della precisione consentita dal grafico si risponda alle seguenti domande:

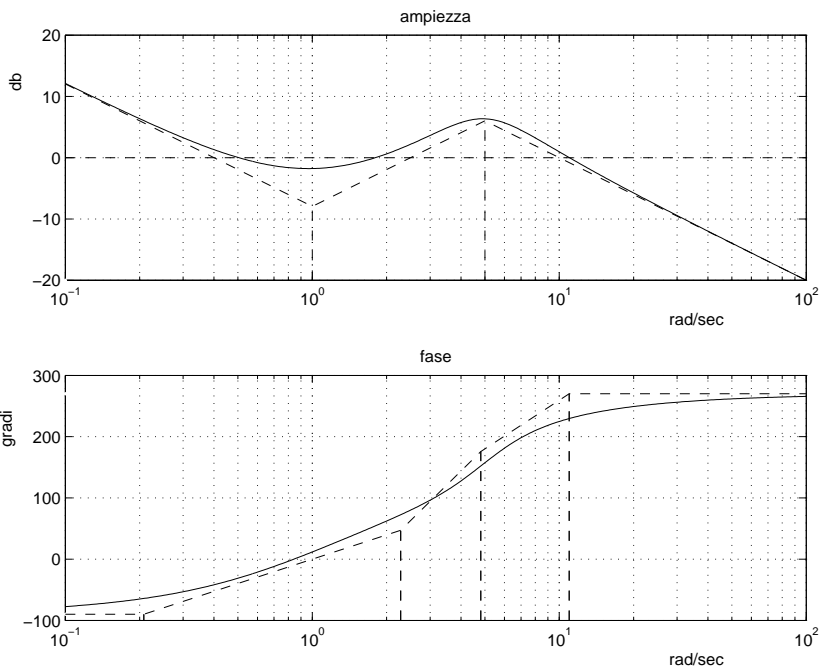
e.1) calcolare la risposta “a regime” $y_\infty(t)$ del sistema $G(s)$ quando in ingresso è presente il segnale:

$$x(t) = 2 \cos(5t + \pi/3);$$

$$y_\infty(t) = 4 \cos(5t + 4\pi/3)$$

e.2) ricavare l'espressione analitica della funzione di trasferimento $G(s)$. Giustificare brevemente la soluzione trovata.

$$G(s) = \frac{10(s+1)^2}{s(s^2 - 5s + 25)}$$



f) **Non è richiesto lo svolgimento di questo esercizio agli iscritti ad Ingegneria Ambientale.**

Si faccia riferimento al sistema descritto nell'esercizio d):

f.1) Tracciare qualitativamente il luogo delle radici del sistema retroazionato per valori positivi del parametro K . Determinare qualitativamente i punti di diramazione. Soluzione: vedi figura 4.

f.2) Determinare il centro degli asintoti, gli angoli che gli asintoti formano rispetto all'asse reale positivo, le intersezioni del luogo delle radici con l'asse immaginario e i corrispondenti valori del parametro K .

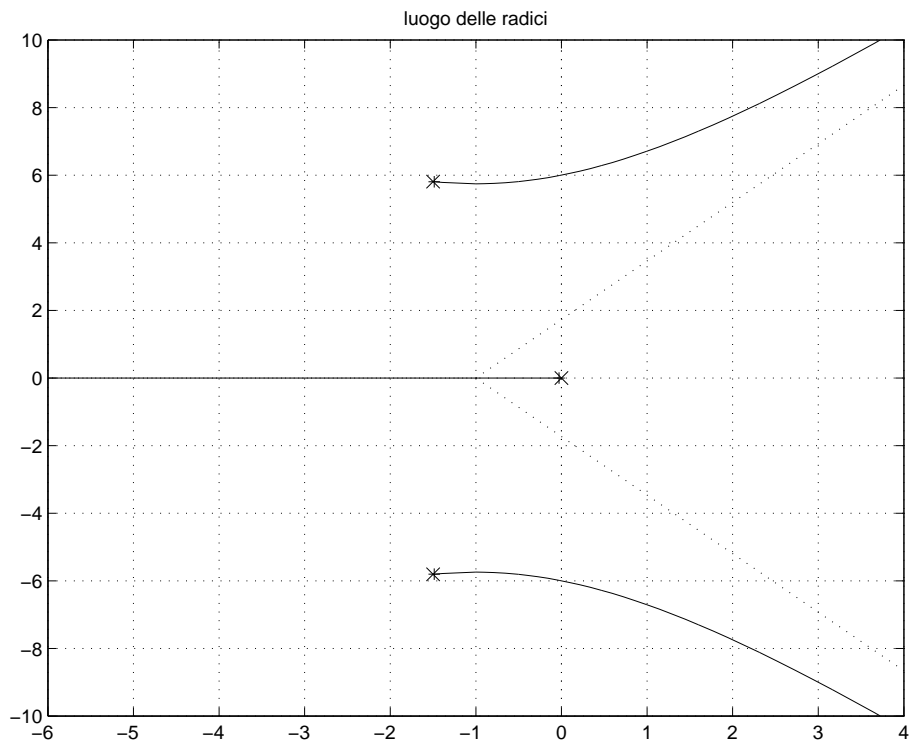


Figura 2: Luogo delle radici di $G(s)$.

Soluzione:

$$\begin{aligned} \sigma &= -1 \\ \phi &= 60, 180, 300 \\ s^* &= 6i \\ K^* &= 108 \end{aligned}$$

**Fondamenti di Controlli Automatici -
A.A. 2006/07
4 Settembre 2007 - Domande Teoriche
Compito A Nr.**

Nome:	
Nr. Mat.	
Firma:	

Per ciascuno dei test a soluzione multipla segnare con una crocetta tutte le affermazioni che si ritengono giuste.

1. Il picco di risonanza M_R per un sistema del 2 ordine è:

- $M_R = \frac{1}{2\delta\sqrt{1-\delta^2}}$
- $M_R = \frac{1}{2\delta\sqrt{1-2\delta^2}}$
- $M_R = \frac{\delta}{2\sqrt{1-\delta^2}}$
- $M_R = \frac{\delta}{2\sqrt{1-2\delta^2}}$

2. Scrivere la funzione di trasferimento $G(s)$ corrispondente alla seguente equazione differenziale:

$$\ddot{y}(t) + 4\dot{y}(t) + 2y(t) = 2\dot{x}(t) + 3x(t) \quad \rightarrow \quad G(s) = \frac{Y(s)}{X(s)} = \frac{2s + 3}{s^3 + 4s^2 + 2s + 1}$$

3. Se gli elementi della prima colonna della tabella di Routh di una equazione caratteristica di 3 grado ha tutti gli elementi positivi tranne uno che è negativo, ne segue che l'equazione caratteristica:

- ha almeno una radice a parte reale negativa
- può avere una coppia di radici complesse coniugate a parte reale positiva
- ha solo una radice a parte reale positiva
- ha almeno una radice a parte reale positiva

4. La trasformata di Laplace del segnale $x(t) = 2t^2$ è:

- $X(s) = \frac{1}{s^2}$;
- $X(s) = \frac{2}{s^3}$;
- $X(s) = \frac{4}{s^3}$.

5. Un sistema del secondo ordine che presenta un coefficiente di smorzamento $-1 < \delta < 0$ è caratterizzato da:

- due poli complessi coniugati a parte reale negativa;
- due poli complessi coniugati a parte reale positiva;
- due poli reali distinti a parte reale negativa;
- due poli reali distinti a parte reale positiva.

6. Un sistema di tipo 1

- ha un polo nell'origine;
- ha uno zero nell'origine;
- ha un errore a regime nullo nella risposta al gradino;
- ha un errore a regime nullo nella risposta alla rampa.

7. Il luogo dei punti del piano complesso determinato da poli complessi coniugati a coefficiente di smorzamento δ costante è formato da:

- due semirette uscenti dall'origine;
- una retta parallela all'asse immaginario;
- due rette parallele all'asse reale.

8. La funzione complessa $X(s) = \frac{1}{(s+3)^2}$ è la trasformata di Laplace:

- di un segnale $x(t)$ che tende a zero per $t \rightarrow \infty$;
- di un segnale $x(t)$ che tende a 1 per $t \rightarrow 0$;
- del segnale $x(t) = t^2 e^{-(t-3)}$;
- del segnale $x(t) = t e^{-3t}$.

9. Il diagramma di Nyquist della funzione $G(s) = \frac{s+2}{s^2+4s+4}$ per $\omega \in [0, \infty]$:

- è una semicirconferenza;
- presenta un asintoto verticale;
- si evolve tutta nel semipiano positivo;
- ha guadagno statico unitario.

10. Determinare il tempo di assestamento del sistema $G(s) = \frac{1}{s^2+10s+64}$;

$$T_a = \frac{3}{5}$$

11. Un sistema $G(s)$ a fase minima di tipo 2 e con grado relativo 2 presenta nel diagramma asintotico di Bode delle ampiezze:

- una pendenza di -20 db/decade per $\omega \rightarrow 0$;
- una pendenza di -40 db/decade per $\omega \rightarrow 0$;
- una pendenza di -20 db/decade per $\omega \rightarrow \infty$;
- una pendenza di -40 db/decade per $\omega \rightarrow \infty$.

12. Il valore finale per $t \rightarrow \infty$ della risposta all'impulso $g(t)$ del sistema $G(s) = \frac{4s+1}{s(s^2+2)}$ vale:

- $g(\infty) = 0$;
- $g(\infty) = 1/2$;
- $g(\infty) = 1$.

Non è richiesto lo svolgimento delle seguenti domande agli iscritti ad Ingegneria Ambientale.

13. In corrispondenza di un punto di diramazione nel luogo delle radici di un sistema dinamico $G(s)$:

- vi sono radici multiple nell'equazione caratteristica del sistema;
- hanno origine rami che dividono il piano complesso in parti uguali;
- i rami del luogo delle radici sono costituiti da semirette;
- i rami del luogo delle radici sono perpendicolari fra di loro.

14. Nella graficazione del contorno delle radici al variare del parametro τ , un asintoto può essere percorso dall'infinito al finito:

- solo se il grado relativo è negativo;
- solo se il grado relativo è positivo;
- anche se il grado relativo è nullo.