Fondamenti di Controlli Automatici - A.A. 2006/07

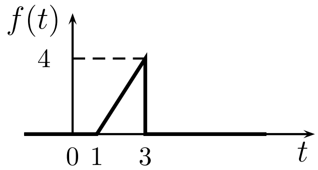
18 Luglio 2007 - Esercizi

Compito Nr.

Nome:	
Nr. Mat.	
Firma:	

a) Determinare la trasformata di Laplace $X_i(s)$ dei seguenti segnali temporali $x_i(t)$:

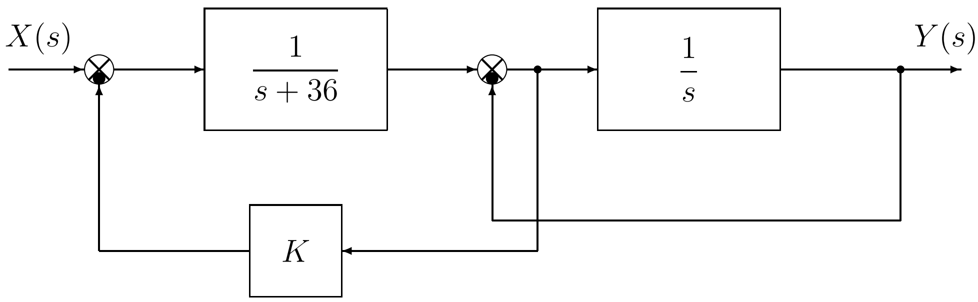
$$x_1(t) = \frac{1}{8}\, t^3\, e^{-2\,t} + \cos(5\,\pi\, t), \qquad x_2(t) = 3\, \sin(4\,t - 6),$$



b) Calcolare la risposta impulsiva $g_i(t)$ delle seguenti funzioni di trasferimento $G_i(s)$:

$$G_1(s) = \frac{-2}{(s+4)\,(s-3)^2}, \qquad G_2(s) = \frac{2}{(s+3)^3}, \qquad G_3(s) = \frac{s+1}{(s+5)\,(s-1)\,(s+3)}$$

c) Si consideri il seguente schema a blocchi:



c.1) Posto $K = -31$, utilizzando la formula di Mason calcolare la funzione di trasferimento $G(s)$ che lega l'ingresso $X(s)$ all'uscita $Y(s)$:

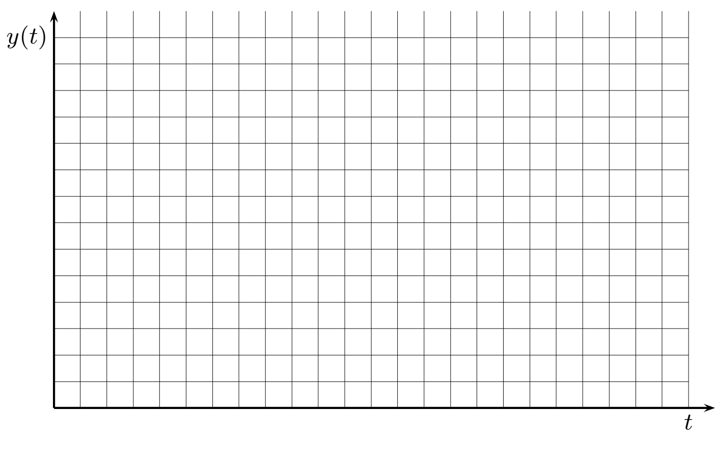
$$G(s) = \frac{Y(s)}{X(s)} =$$

c.2) Relativamente alla funzione di trasferimento $G(s)$ calcolare: 1) la parte reale σ e 2) la parte immaginaria ω dei poli dominanti del sistema; 3) la pulsazione naturale ω_n e 4) il coefficiente di smorzamento δ dei poli dominanti del sistema; 5) il guadagno statico K_0; 6) il tempo di assestamento T_a del sistema $G(s)$ alla risposta al gradino:

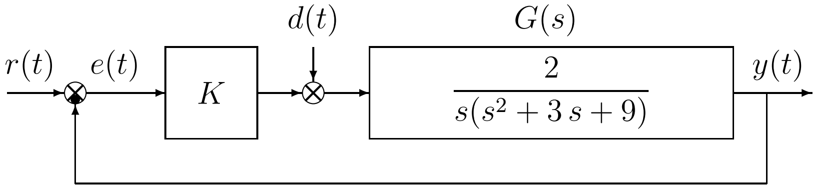
1) $\sigma = \ldots\ldots$ 3) $\omega_n = \ldots\ldots$ 5) $K_0 = \ldots\ldots$

2) $\omega = \ldots\ldots$ 4) $\delta = \ldots\ldots$ 6) $T_a = \ldots\ldots$

c.3) Sul disegno a quadretti riportato a fianco disegnare l'andamento qualitativo della risposta $y(t)$ della funzione di trasferimento $G(s)$ al gradino in ingesso $x(t) = 9$.
Per quanto è possibile, disegnare l'andamento temporale in modo congruente con il valore dei parametri numerici determinati al punto c.2).



d) Sia dato il seguente sistema retroazionato:



d.1) Determinare per quali valori del parametro K il sistema retroazionato è asintoticamente stabile.

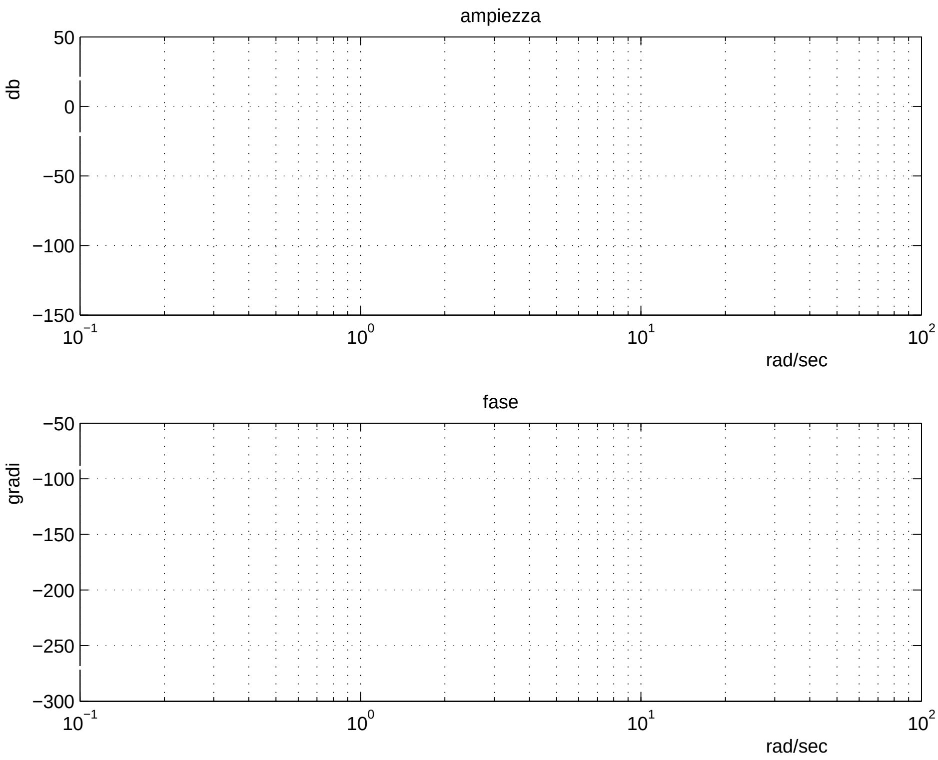
d.2) Posto $r(t) = 0$, si determini il valore del parametro K tale da garantire che in presenza del disturbo costante $d(t) = d_0$, il valore a regime dell'uscita $y(t)$ sia $y_\infty = 0.5\,d_0$.

d.3) Posto $d(t) = 0$, calcolare, in funzione del parametro K, l'errore a regime $e_\infty(t)$ corrispondente all'applicazione del segnale di ingresso a rampa $r(t) = 4\,t$.

d.4) Posto $K = 1$, disegnare qualitativamente il diagramma di Nyquist "completo" del guadagno d'anello $K\,G(s)$. Calcolare esattamente la posizione σ_a dell'asintoto verticale, le eventuali intersezioni σ_i^* con l'asse reale e i corrispondenti valori delle pulsazioni ω_i^*. Determinare inoltre il margine di ampiezza M_α.

e) Si faccia riferimento al sistema retroazionato dell'esercizio precedente e si ponga $K = 1$:

e.1) Tracciare qualitativamente i diagrammi di Bode delle ampiezze e della fasi del guadagno di anello $K\,G(s)$;



e.2) Fornire una stima della larghezza di banda del sistema retroazionato;

e.3) Fornire una stima della risposta "a regime" $y_\infty(t)$ del sistema retroazionato quando il disturbo $d(t) = 0$ e in ingresso è presente il segnale $r(t) = 3 + 4\,\cos(0.02\,t)$.

f) **Non è richiesto lo svolgimento di questo esercizio agli iscritti ad Ingegneria Ambientale.**

Si faccia riferimento al sistema descritto nell'esercizio d):

f.1) Tracciare qualitativamente il luogo delle radici del sistema retroazionato per valori positivi del parametro K. Determinare qualitativamente i punti di diramazione.

f.2) Determinare il centro degli asintoti, gli angoli che gli asintoti formano rispetto all'asse reale positivo, le intersezioni del luogo delle radici con l'asse immaginario e i corrispondenti valori del parametro K.

Fondamenti di Controlli Automatici - A.A. 2006/07

18 Luglio 2007 - Domande Teoriche

Compito Nr.

Nome:	
Nr. Mat.	
Firma:	

Per ciascuno dei test a soluzione multipla segnare con una crocetta tutte le affermazioni che si ritengono giuste.

1. Un sistema di "tipo 2" è caratterizzato da:
   - ○ 2 poli nulli;
   - ○ 2 poli complessi coniugati;
   - ○ grado relativo $n - m = 2$.

2. Per $\omega \in [-\infty, \infty]$, il diagramma di Nyquist "completo" di un sistema $G(s)$ di tipo 2 deve essere chiuso all'infinito:
   - ○ con una semicirconferenza percorsa in senso orario;
   - ○ con una semicirconferenza percorsa in senso antiorario;
   - ○ con una circonferenza percorsa in senso orario;
   - ○ con una circonferenza percorsa in senso antiorario.

3. Dato il diagramma di Bode delle ampiezze di $G(j\omega)$, da esso si può dedurre il diagramma delle fasi:
   - ○ solo se il diagramma di Bode presenta pendenze negative o nulle;
   - ○ solo se il sistema $G(s)$ ha tutti i poli e tutti gli zeri a parte reale negativa;
   - ○ solo se il sistema $G(s)$ ha tutti i poli a parte reale negativa.

4. La trasformata di Laplace del segnale $x(t) = 2\,t$ è:
   - ○ $X(s) = \frac{1}{s^2}$;
   - ○ $X(s) = \frac{2}{s^2}$;
   - ○ $X(s) = \frac{1}{s^3}$;
   - ○ $X(s) = \frac{2}{s^3}$.

5. Un sistema del secondo ordine che presenta un coefficiente di smorzamento $0 < \delta < 1$ è caratterizzato da:
   - ○ due poli complessi coniugati a parte reale negativa;
   - ○ due poli complessi coniugati a parte reale positiva;
   - ○ due poli reali distinti a parte reale negativa;
   - ○ due poli reali distinti a parte reale positiva.

6. Un sistema di tipo 1 chiuso in retroazione unitaria negativa:
   - ○ ha guadagno statico minore di 1;
   - ○ ha guadagno statico maggiore di 1;
   - ○ ha guadagno statico unitario.

7. Nell'appicazione del criterio di Routh, le radici dell'equazione ausiliaria che si ottiene quando una riga intera della tabella di Routh si annulla:
   - ○ sono radici anche dell'equazione caratteristica di partenza;
   - ○ sono tutte radici a parte reale nulla;
   - ○ sono radici simmetriche rispetto all'origine del piano complesso.

8. La funzione complessa $X(s) = \frac{1}{(s+3)^2}$ è la trasformata di Laplace:

   ◯ di un segnale $x(t)$ che tende a zero per $t \to \infty$;
   ◯ di un segnale $x(t)$ che tende a zero per $t \to 0$;
   ◯ del segnale $x(t) = te^{-(t-3)}$;
   ◯ del segnale $x(t) = t^2 e^{-3t}$.

9. Il diagramma di Nyquist della funzione $G(s) = \frac{s+1}{s(s+2)}$ per $\omega \in [0, \infty]$:

   ◯ è una semicirconferenza;
   ◯ presenta un asintoto verticale;
   ◯ si evolve tutta nel semipiano positivo;
   ◯ ha guadagno statico unitario.

10. Determinare il tempo di assestamento del sistema $G(s) = \frac{1}{s+4}$;

$$T_a =$$

11. Un sistema $G(s)$ a fase minima di tipo 2 e con grado relativo 1 presenta nel diagramma asintotico di Bode delle ampiezze:

   ◯ una pendenza di $-20\, db/decade$ per $\omega \to 0$;
   ◯ una pendenza di $-40\, db/decade$ per $\omega \to 0$;
   ◯ una pendenza di $-20\, db/decade$ per $\omega \to \infty$;
   ◯ una pendenza di $-40\, db/decade$ per $\omega \to \infty$.

12. Il valore finale per $t \to \infty$ della risposta all'impulso $g(t)$ del sistema $G(s) = \frac{4s+1}{s^2+2}$ vale:

   ◯ $g(\infty) = 0$;
   ◯ $g(\infty) = 1$;
   ◯ $g(\infty) = 2$.

Non è richiesto lo svolgimento delle seguenti domande agli iscritti ad Ingegneria Ambientale.

13. Un sistema dinamico $G(s)$ avente i poli e gli zeri posizionati in modo alterno (un polo, uno zero, un polo, uno zero ecc.) sull'asse reale presenta un luogo delle radici:

   ◯ che per $K < 0$ si evolve tutto sull'asse reale;
   ◯ che per $K > 0$ si evolve tutto sull'asse reale;
   ◯ che può evolvere anche al di fuori dell'asse reale.

14. Il metodo del contorno delle radici studia le curve descritte dalle radici dell'equazione caratteristica al variare:

   ◯ di un qualunque parametro che compare nell'equazione caratteristica;
   ◯ di un qualunque parametro che entra linearmente nell'equazione caratteristica;
   ◯ delle sole costanti di tempo relative ad un polo o ad uno zero.

Fondamenti di Controlli Automatici - A.A. 2006/07

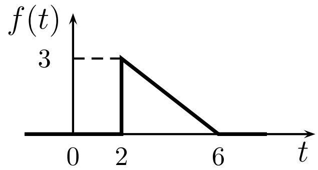
18 Luglio 2007 - Esercizi

Compito Nr.

Nome:	
Nr. Mat.	
Firma:	

a) Determinare la trasformata di Laplace $X_i(s)$ dei seguenti segnali temporali $x_i(t)$:

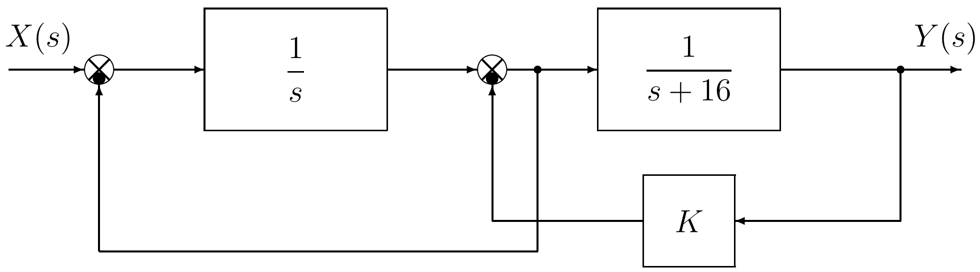
$$x_1(t) = 5\,\cos(3\,t - 8), \qquad x_2(t) = \tfrac{1}{4}\,t^3\,e^{-t} + 2\,\sin(6\,\pi\,t),$$



b) Calcolare la risposta impulsiva $g_i(t)$ delle seguenti funzioni di trasferimento $G_i(s)$:

$$G_1(s) = -\frac{4}{(s+2)^3}, \qquad G_2(s) = \frac{s+2}{(s-4)\,(s-2)\,(s+5)}, \qquad G_3(s) = \frac{3}{(s-4)\,(s+5)^2}$$

c) Si consideri il seguente schema a blocchi:



c.1) Posto $K = -13$, utilizzando la formula di Mason calcolare la funzione di trasferimento $G(s)$ che lega l'ingresso $X(s)$ all'uscita $Y(s)$:

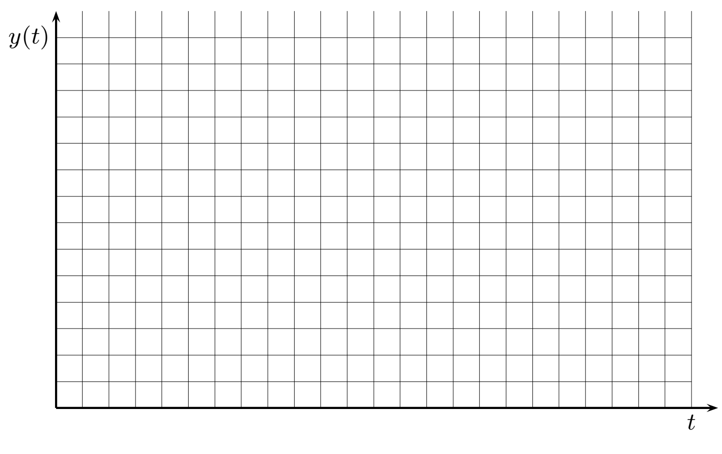
$$G(s) = \frac{Y(s)}{X(s)} =$$

c.2) Relativamente alla funzione di trasferimento $G(s)$ calcolare: 1) la parte reale σ e 2) la parte immaginaria ω dei poli dominanti del sistema; 3) la pulsazione naturale ω_n e 4) il coefficiente di smorzamento δ dei poli dominanti del sistema; 5) il guadagno statico K_0; 6) il tempo di assestamento T_a del sistema $G(s)$ alla risposta al gradino:

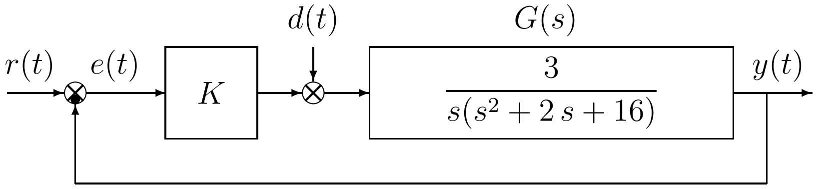
1) $\sigma = \ldots\ldots$ 3) $\omega_n = \ldots\ldots$ 5) $K_0 = \ldots\ldots$

2) $\omega = \ldots\ldots$ 4) $\delta = \ldots\ldots$ 6) $T_a = \ldots\ldots$

c.3) Sul disegno a quadretti riportato a fianco disegnare l'andamento qualitativo della risposta $y(t)$ della funzione di trasferimento $G(s)$ al gradino in ingesso $x(t) = 8$.
Per quanto è possibile, disegnare l'andamento temporale in modo congruente con il valore dei parametri numerici determinati al punto c.2).



d) Sia dato il seguente sistema retroazionato:



d.1) Determinare per quali valori del parametro K il sistema retroazionato è asintoticamente stabile.

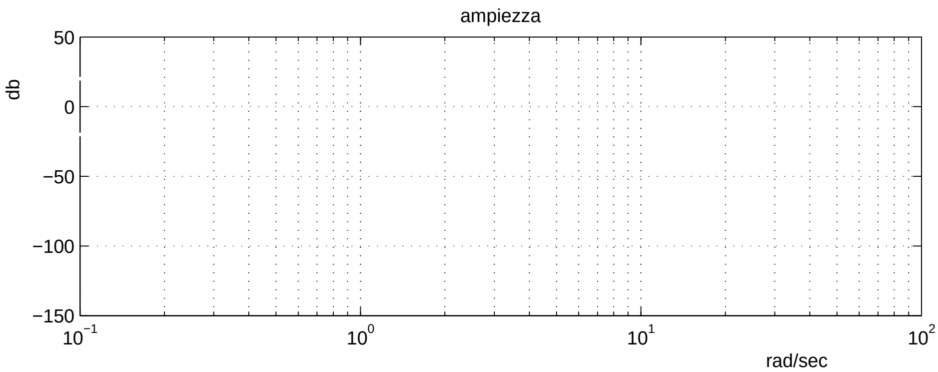
d.2) Posto $r(t) = 0$, si determini il valore del parametro K tale da garantire che in presenza del disturbo costante $d(t) = d_0$, il valore a regime dell'uscita $y(t)$ sia $y_\infty = 0.4\,d_0$.

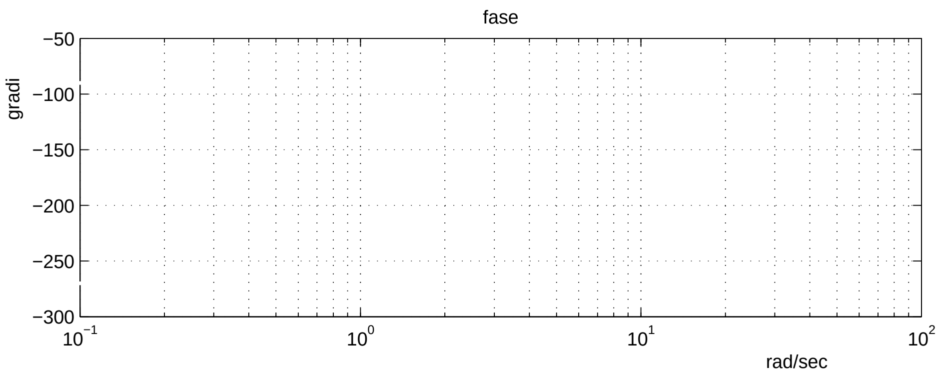
d.3) Posto $d(t) = 0$, calcolare, in funzione del parametro K, l'errore a regime $e_\infty(t)$ corrispondente all'applicazione del segnale di ingresso a rampa $r(t) = 3\,t$.

d.4) Posto $K = 1$, disegnare qualitativamente il diagramma di Nyquist "completo" del guadagno d'anello $K\,G(s)$. Calcolare esattamente la posizione σ_a dell'asintoto verticale, le eventuali intersezioni σ_i^* con l'asse reale e i corrispondenti valori delle pulsazioni ω_i^*. Determinare inoltre il margine di ampiezza M_α.

e) Si faccia riferimento al sistema retroazionato dell'esercizio precedente e si ponga $K = 1$:

e.1) Tracciare qualitativamente i diagrammi di Bode delle ampiezze e della fasi del guadagno di anello $K\,G(s)$;





e.2) Fornire una stima della larghezza di banda del sistema retroazionato;

e.3) Fornire una stima della risposta "a regime" $y_\infty(t)$ del sistema retroazionato quando il disturbo $d(t) = 0$ e in ingresso è presente il segnale $r(t) = 2 + 5\,\cos(0.01\,t)$.

f) **Non è richiesto lo svolgimento di questo esercizio agli iscritti ad Ingegneria Ambientale.**

Si faccia riferimento al sistema descritto nell'esercizio d):

f.1) Tracciare qualitativamente il luogo delle radici del sistema retroazionato per valori positivi del parametro K. Determinare qualitativamente i punti di diramazione.

f.2) Determinare il centro degli asintoti, gli angoli che gli asintoti formano rispetto all'asse reale positivo, le intersezioni del luogo delle radici con l'asse immaginario e i corrispondenti valori del parametro K.

Fondamenti di Controlli Automatici - A.A. 2006/07

18 Luglio 2007 - Domande Teoriche

Compito Nr.

Nome:	
Nr. Mat.	
Firma:	

Per ciascuno dei test a soluzione multipla segnare con una crocetta tutte le affermazioni che si ritengono giuste.

1. Un sistema di "tipo 2" è caratterizzato da:
   - ○ grado relativo $n - m = 2$;
   - ○ 2 poli complessi coniugati;
   - ○ 2 poli nulli.
2. Per $\omega \in [-\infty, \infty]$, il diagramma di Nyquist "completo" di un sistema $G(s)$ di tipo 2 deve essere chiuso all'infinito:
   - ○ con una circonferenza percorsa in senso antiorario;
   - ○ con una circonferenza percorsa in senso orario;
   - ○ con una semicirconferenza percorsa in senso antiorario;
   - ○ con una semicirconferenza percorsa in senso orario.
3. Dato il diagramma di Bode delle ampiezze di $G(j\omega)$, da esso si può dedurre il diagramma delle fasi:
   - ○ solo se il sistema $G(s)$ ha tutti i poli e tutti gli zeri a parte reale negativa;
   - ○ solo se il sistema $G(s)$ ha tutti i poli a parte reale negativa;
   - ○ solo se il diagramma di Bode presenta pendenze negative o nulle.
4. La trasformata di Laplace del segnale $x(t) = 2\,t$ è:
   - ○ $X(s) = \frac{1}{s^3}$;
   - ○ $X(s) = \frac{2}{s^3}$;
   - ○ $X(s) = \frac{1}{s^2}$;
   - ○ $X(s) = \frac{2}{s^2}$.
5. Un sistema del secondo ordine che presenta un coefficiente di smorzamento $0 < \delta < 1$ è caratterizzato da:
   - ○ due poli complessi coniugati a parte reale positiva;
   - ○ due poli complessi coniugati a parte reale negativa;
   - ○ due poli reali distinti a parte reale positiva;
   - ○ due poli reali distinti a parte reale negativa.
6. Un sistema di tipo 1 chiuso in retroazione unitaria negativa:
   - ○ ha guadagno statico unitario;
   - ○ ha guadagno statico minore di 1;
   - ○ ha guadagno statico maggiore di 1.
7. Nell'appicazione del criterio di Routh, le radici dell'equazione ausiliaria che si ottiene quando una riga intera della tabella di Routh si annulla:
   - ○ sono tutte radici a parte reale nulla;
   - ○ sono radici simmetriche rispetto all'origine del piano complesso;
   - ○ sono radici anche dell'equazione caratteristica di partenza.

8. La funzione complessa $X(s) = \frac{1}{(s+3)^2}$ è la trasformata di Laplace:

   - ◯ del segnale $x(t) = t^2 e^{-3t}$;
   - ◯ del segnale $x(t) = te^{-(t-3)}$;
   - ◯ di un segnale $x(t)$ che tende a zero per $t \to 0$;
   - ◯ di un segnale $x(t)$ che tende a zero per $t \to \infty$.

9. Il diagramma di Nyquist della funzione $G(s) = \frac{s+1}{s(s+2)}$ per $\omega \in [0, \infty]$:

   - ◯ ha guadagno statico unitario;
   - ◯ si evolve tutta nel semipiano positivo;
   - ◯ presenta un asintoto verticale;
   - ◯ è una semicirconferenza.

10. Determinare il tempo di assestamento del sistema $G(s) = \frac{1}{s+8}$;

$$T_a =$$

11. Un sistema $G(s)$ a fase minima di tipo 2 e con grado relativo 1 presenta nel diagramma asintotico di Bode delle ampiezze:

   - ◯ una pendenza di $-40\, db/decade$ per $\omega \to 0$;
   - ◯ una pendenza di $-20\, db/decade$ per $\omega \to 0$;
   - ◯ una pendenza di $-40\, db/decade$ per $\omega \to \infty$;
   - ◯ una pendenza di $-20\, db/decade$ per $\omega \to \infty$.

12. Il valore iniziale per $t = 0^+$ della risposta all'impulso $g(t)$ del sistema $G(s) = \frac{2\,s+3}{s^2+1}$ vale:

   - ◯ $g(0^+) = 0$;
   - ◯ $g(0^+) = 1$;
   - ◯ $g(0^+) = 2$.

   Non è richiesto lo svolgimento delle seguenti domande agli iscritti ad Ingegneria Ambientale.

13. Un sistema dinamico $G(s)$ avente i poli e gli zeri posizionati in modo alterno (un polo, uno zero, un polo, uno zero ecc.) sull'asse reale presenta un luogo delle radici:

   - ◯ che può evolvere anche al di fuori dell'asse reale;
   - ◯ che per $K > 0$ si evolve tutto sull'asse reale;
   - ◯ che per $K < 0$ si evolve tutto sull'asse reale.

14. Il metodo del contorno delle radici studia le curve descritte dalle radici dell'equazione caratteristica al variare:

   - ◯ di un qualunque parametro che entra linearmente nell'equazione caratteristica;
   - ◯ di un qualunque parametro che compare nell'equazione caratteristica;
   - ◯ delle sole costanti di tempo relative ad un polo o ad uno zero.

Fondamenti di Controlli Automatici - A.A. 2006/07

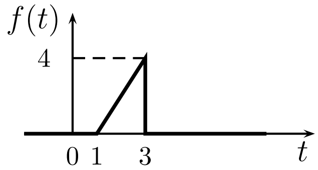
18 Luglio 2007 - Esercizi

Compito A Nr.

Nome:	
Nr. Mat.	
Firma:	

a) Determinare la trasformata di Laplace $X_i(s)$ dei seguenti segnali temporali $x_i(t)$:

$$x_1(t) = \tfrac{1}{8}\, t^3\, e^{-2\,t} + \cos(5\,\pi\,t), \qquad x_2(t) = 3\,\sin(4\,t - 6),$$



Soluzione:

$$X_1(s) = \frac{3}{4(s+2)^4} + \frac{s}{s^2 + 25\,\pi^2}, \qquad X_2(s) = \frac{12\,e^{-3s/2}}{s^2+16}, \qquad X_3(s) = \frac{2}{s}\left[\frac{e^{-s}}{s} - 2\,e^{-3\,s} - \frac{e^{-3\,s}}{s}\right]$$

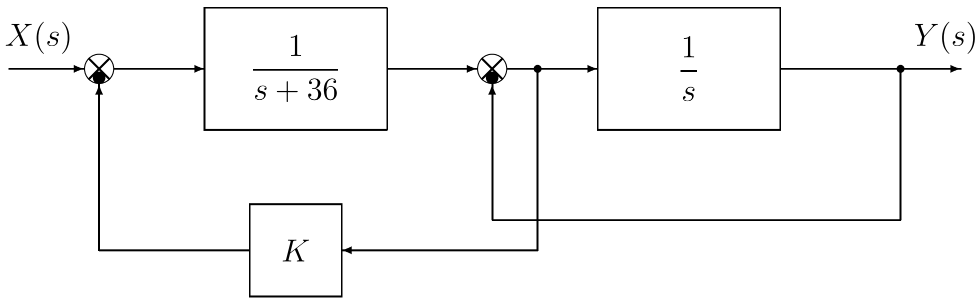
b) Calcolare la risposta impulsiva $g_i(t)$ delle seguenti funzioni di trasferimento $G_i(s)$:

$$G_1(s) = \frac{-2}{(s+4)\,(s-3)^2}, \qquad G_2(s) = \frac{2}{(s+3)^3}, \qquad G_3(s) = \frac{s+1}{(s+5)\,(s-1)\,(s+3)}$$

Soluzione:

$$g_1(t) = -\frac{2}{49}\,e^{-4\,t} + \frac{2}{49}\,e^{3\,t} - \frac{2}{7}\,t\,e^{3\,t}, \qquad g_2(t) = t^2\,e^{-3\,t}, \qquad g_3(t) = -\frac{1}{3}\,e^{-5\,t} + \frac{1}{12}\,e^{t} + \frac{1}{4}\,e^{-3\,t}$$

c) Si consideri il seguente schema a blocchi:



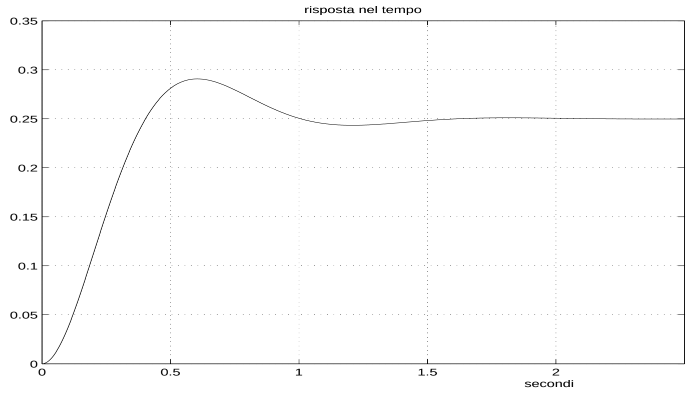
c.1) Posto $K = -31$, utilizzando la formula di Mason calcolare la funzione di trasferimento $G(s)$ che lega l'ingresso $X(s)$ all'uscita $Y(s)$:

$$G(s) = \frac{Y(s)}{X(s)} = \frac{1}{s^2 + 6\,s + 36}$$

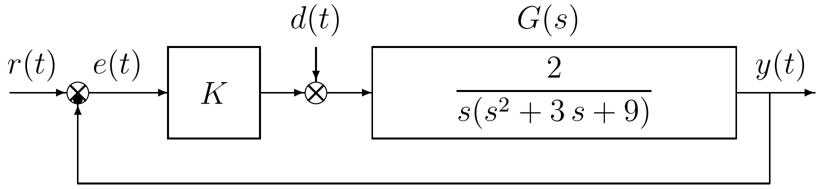
c.2) Relativamente alla funzione di trasferimento $G(s)$ calcolare: 1) la parte reale σ e 2) la parte immaginaria ω dei poli dominanti del sistema; 3) la pulsazione naturale ω_n e 4) il coefficiente di smorzamento δ dei poli dominanti del sistema; 5) il guadagno statico K_0; 6) il tempo di assestamento T_a del sistema $G(s)$ alla risposta al gradino:

1) $\sigma = -3$	3) $\omega_n = 6$	5) $K_0 = \frac{1}{36}$
2) $\omega = 5.2$	4) $\delta = 0.5$	6) $T_a = 1$

c.3) Sul disegno a quadretti riportato a fianco disegnare l'andamento qualitativo della risposta $y(t)$ della funzione di trasferimento $G(s)$ al gradino in ingesso $x(t) = 9$.
Per quanto è possibile, disegnare l'andamento temporale in modo congruente con il valore dei parametri numerici determinati al punto c.2).



d) Sia dato il seguente sistema retroazionato:



d.1) Determinare per quali valori del parametro K il sistema retroazionato è asintoticamente stabile.

Soluzione: l'equazione caratteristica del sistema retroazionato è

$$1 + \frac{2\,K}{s\,(s^2 + 3\,s + 9)} = 0 \qquad \rightarrow \qquad s^3 + 3\,s^2 + 9\,s + 2\,K = 0$$

La corrispondente tabella di Routh è la seguente

$$\begin{array}{c|cc} 3 & 1 & 9 \\ 2 & 3 & 2\,K \\ 1 & 9 - \frac{2}{3}K & \\ 0 & 2\,K & \end{array}$$

Dalla riga 1 e dalla riga 0 si ricavano i seguenti vincoli:

$$K > 0, \qquad\qquad K < \frac{27}{2}$$

La pulsazione ω^* corrispondente al valore limite $K^* = \frac{27}{2}$ è:

$$\omega^* = \sqrt{9} = 3$$

d.2) Posto $r(t) = 0$, si determini il valore del parametro K tale da garantire che in presenza del disturbo costante $d(t) = d_0$, il valore a regime dell'uscita $y(t)$ sia $y_\infty = 0.5\,d_0$.

Soluzione: Il valore a regime dell'uscita corrispondente all'applicazione del disturbo costante $d(t) = d_0$ è

$$y_\infty = \frac{G(0)\,d_0}{1 + K\,G(0)} = \frac{d_0}{K} = 0.5\,d_0$$

Il sistema $G(s)$è di tipo 1 e quindi il suo guadagno statico infinito $G(0) = \infty$. Il valore di uscita richiesto si ha per $K = 2$.

d.3) Posto $d(t) = 0$, calcolare, in funzione del parametro K, l'errore a regime $e_\infty(t)$ corrispondente all'applicazione del segnale di ingresso a rampa $r(t) = 4\,t$.

Soluzione: L'errore a regime $e_\infty = \frac{4}{K_v}$ con $K_v = \frac{2\,K}{9}$. Si ottiene quindi che:

$$e_\infty = \frac{18}{K}.$$

d.4) Posto $K = 1$, disegnare qualitativamente il diagramma di Nyquist "completo" del guadagno d'anello $K\,G(s)$. Calcolare esattamente la posizione σ_a dell'asintoto verticale, le eventuali intersezioni σ_i^* con l'asse reale e i corrispondenti valori delle pulsazioni ω_i^*. Determinare inoltre il margine di ampiezza M_α.

Soluzione: Il diagramma di Nyquist della funzione $G(s)$ per $\omega \in [0,\ \infty]$ è mostrato in Fig. 1.

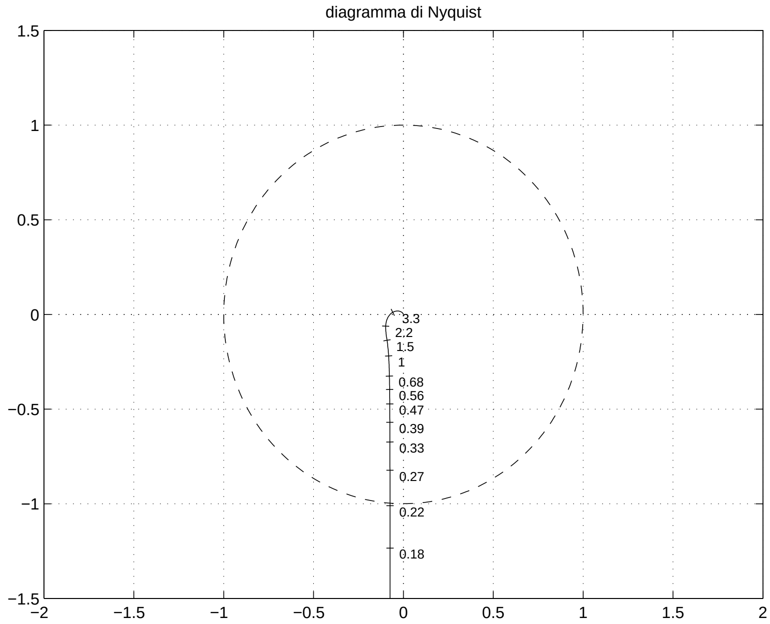


Figura 1: Diagramma di Nyquist della funzione $G(s)$ per $\omega \in [0,\ \infty]$.

Il sistema é di tipo 1 per cui esiste un asintoto verticale in $K_\tau\,\Delta_a = -0.07407$.

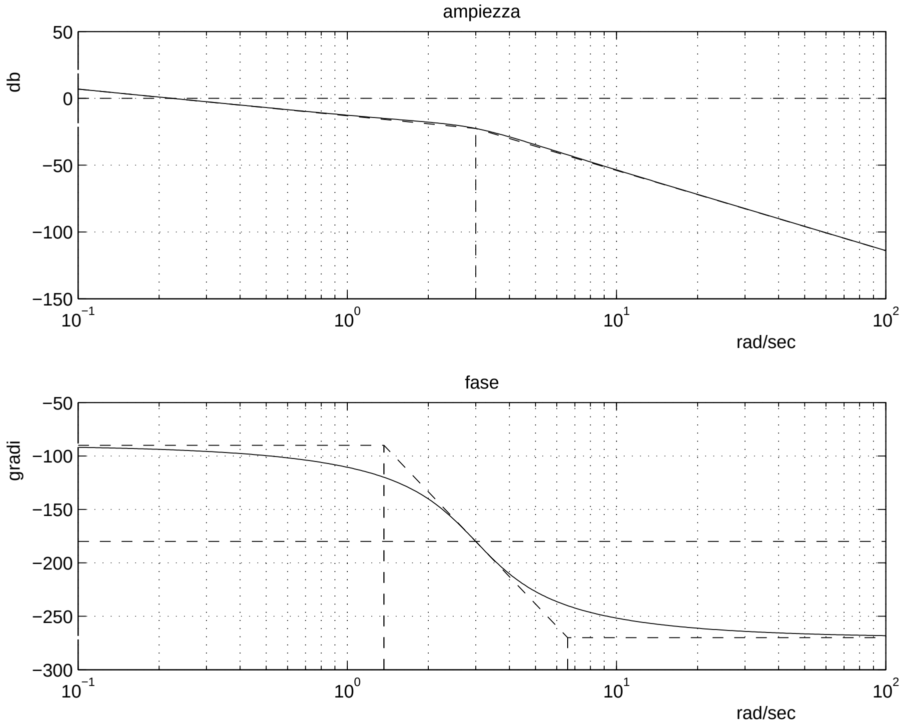
Esiste un'unica intersezione σ^* con l'asse reale. Tale intersezione si determina facilmente dall'analisi di Routh svolta al punto d.1:

$$\sigma^* = -\frac{1}{K^*} = -0.07407$$

Il corrispondente valore di ω^* è 3 mentre il margine di ampiezza è $M_a = \frac{1}{|\sigma^*|} = \frac{27}{2}$.

e) Si faccia riferimento al sistema retroazionato dell'esercizio precedente e si ponga $K = 1$:

e.1) Tracciare qualitativamente i diagrammi di Bode delle ampiezze e della fasi del guadagno di anello $K\,G(s)$;



e.2) Fornire una stima della larghezza di banda del sistema retroazionato;

Soluzione: La banda passante del sistema può essere determinata dal punto di incrocio del diagramma di Bode delle ampiezze con l'asse 0 db. Una stima della banda passante del sistema è quindi $\omega_T = 0.24\, rad/s$.

e.3) Fornire una stima della risposta "a regime" $y_\infty(t)$ del sistema retroazionato quando il disturbo $d(t) = 0$ e in ingresso è presente il segnale $r(t) = 3 + 4\,\cos(0.02\,t)$.

Soluzione: Essendo il sistema retroazionato di tipo passa-basso ed essendo la pulsazione del segnale di ingresso $\omega_r << \omega_T$, con buona approssimazione l'uscita risulta uguale al segnale d'ingresso, percui $y(t) = 3 + 4\,\cos(0.02\,t)$.

f) **Non è richiesto lo svolgimento di questo esercizio agli iscritti ad Ingegneria Ambientale.**

Si faccia riferimento al sistema descritto nell'esercizio d):

f.1) Tracciare qualitativamente il luogo delle radici del sistema retroazionato per valori positivi del parametro K. Determinare qualitativamente i punti di diramazione. Soluzione: vedi figura 4.

f.2) Determinare il centro degli asintoti, gli angoli che gli asintoti formano rispetto all'asse reale positivo, le intersezioni del luogo delle radici con l'asse immaginario e i corrispondenti valori del parametro K.

Soluzione:

$$\sigma = -1$$
$$\phi = 60,\ 180,\ 300$$
$$s^* = 3\,i$$
$$K^* = \frac{27}{2}$$

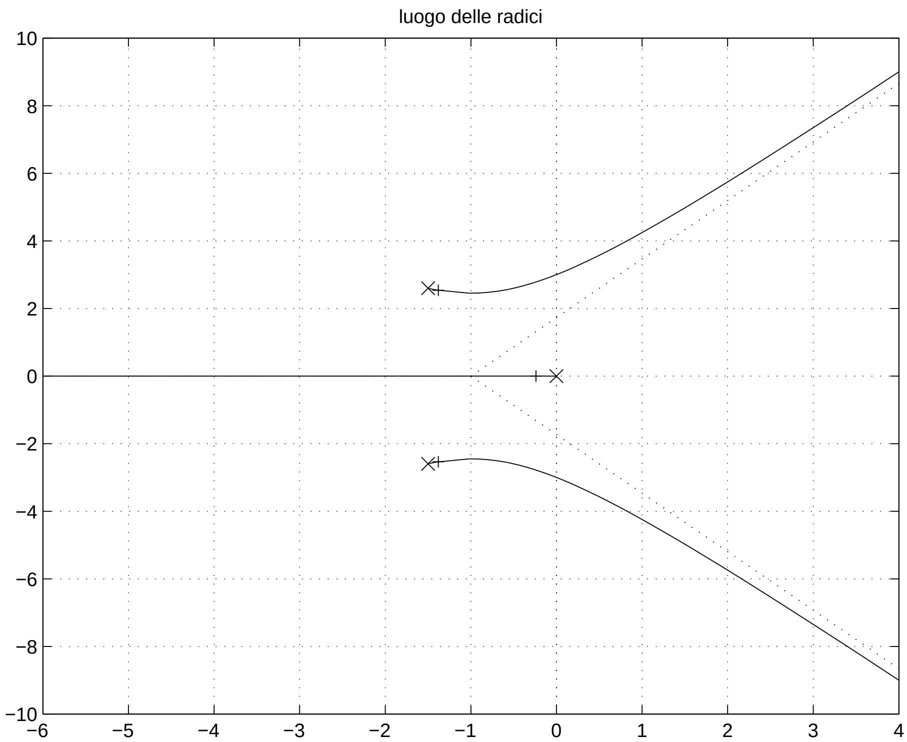


Figura 2: Luogo della radici di $G(s)$.

Fondamenti di Controlli Automatici - A.A. 2006/07
18 Luglio 2007 - Domande Teoriche
Compito A Nr.

Nome:	
Nr. Mat.	
Firma:	

Per ciascuno dei test a soluzione multipla segnare con una crocetta tutte le affermazioni che si ritengono giuste.

1. Un sistema di “tipo 2” è caratterizzato da:
   - ⊗ 2 poli nulli;
   - ◯ 2 poli complessi coniugati;
   - ◯ grado relativo $n - m = 2$.
2. Per $\omega \in [-\infty, \infty]$, il diagramma di Nyquist “completo” di un sistema $G(s)$ di tipo 2 deve essere chiuso all’infinito:
   - ◯ con una semicirconferenza percorsa in senso orario;
   - ◯ con una semicirconferenza percorsa in senso antiorario;
   - ⊗ con una circonferenza percorsa in senso orario;
   - ◯ con una circonferenza percorsa in senso antiorario.
3. Dato il diagramma di Bode delle ampiezze di $G(j\omega)$, da esso si può dedurre il diagramma delle fasi:
   - ◯ solo se il diagramma di Bode presenta pendenze negative o nulle;
   - ⊗ solo se il sistema $G(s)$ ha tutti i poli e tutti gli zeri a parte reale negativa;
   - ◯ solo se il sistema $G(s)$ ha tutti i poli a parte reale negativa.
4. La trasformata di Laplace del segnale $x(t) = 2\,t$ è:
   - ◯ $X(s) = \frac{1}{s^2}$;
   - ⊗ $X(s) = \frac{2}{s^2}$;
   - ◯ $X(s) = \frac{1}{s^3}$;
   - ◯ $X(s) = \frac{2}{s^3}$.
5. Un sistema del secondo ordine che presenta un coefficiente di smorzamento $0 < \delta < 1$ è caratterizzato da:
   - ⊗ due poli complessi coniugati a parte reale negativa;
   - ◯ due poli complessi coniugati a parte reale positiva;
   - ◯ due poli reali distinti a parte reale negativa;
   - ◯ due poli reali distinti a parte reale positiva.
6. Un sistema di tipo 1 chiuso in retroazione unitaria negativa:
   - ◯ ha guadagno statico minore di 1;
   - ◯ ha guadagno statico maggiore di 1;
   - ⊗ ha guadagno statico unitario.
7. Nell’appicazione del criterio di Routh, le radici dell’equazione ausiliaria che si ottiene quando una riga intera della tabella di Routh si annulla:
   - ⊗ sono radici anche dell’equazione caratteristica di partenza;
   - ◯ sono tutte radici a parte reale nulla;
   - ⊗ sono radici simmetriche rispetto all’origine del piano complesso.

8. La funzione complessa $X(s) = \frac{1}{(s+3)^2}$ è la trasformata di Laplace:

   - $\otimes$ di un segnale $x(t)$ che tende a zero per $t \to \infty$;
   - $\otimes$ di un segnale $x(t)$ che tende a zero per $t \to 0$;
   - $\bigcirc$ del segnale $x(t) = te^{-(t-3)}$;
   - $\bigcirc$ del segnale $x(t) = t^2 e^{-3t}$.

9. Il diagramma di Nyquist della funzione $G(s) = \frac{s+1}{s(s+2)}$ per $\omega \in [0, \infty]$:

   - $\bigcirc$ è una semicirconferenza;
   - $\otimes$ presenta un asintoto verticale;
   - $\otimes$ si evolve tutta nel semipiano positivo;
   - $\bigcirc$ ha guadagno statico unitario.

10. Determinare il tempo di assestamento del sistema $G(s) = \frac{1}{s+4}$;

$$T_a = \frac{3}{4}$$

11. Un sistema $G(s)$ a fase minima di tipo 2 e con grado relativo 1 presenta nel diagramma asintotico di Bode delle ampiezze:

   - $\bigcirc$ una pendenza di $-20\,db/decade$ per $\omega \to 0$;
   - $\otimes$ una pendenza di $-40\,db/decade$ per $\omega \to 0$;
   - $\otimes$ una pendenza di $-20\,db/decade$ per $\omega \to \infty$;
   - $\bigcirc$ una pendenza di $-40\,db/decade$ per $\omega \to \infty$.

12. Il valore finale per $t \to \infty$ della risposta all'impulso $g(t)$ del sistema $G(s) = \frac{4s+1}{s^2+2}$ vale:

   - $\otimes$ $g(\infty) = 0$;
   - $\bigcirc$ $g(\infty) = 1$;
   - $\bigcirc$ $g(\infty) = 2$.

Non è richiesto lo svolgimento delle seguenti domande agli iscritti ad Ingegneria Ambientale.

13. Un sistema dinamico $G(s)$ avente i poli e gli zeri posizionati in modo alterno (un polo, uno zero, un polo, uno zero ecc.) sull'asse reale presenta un luogo delle radici:

   - $\otimes$ che per $K < 0$ si evolve tutto sull'asse reale;
   - $\otimes$ che per $K > 0$ si evolve tutto sull'asse reale;
   - $\bigcirc$ che può evolvere anche al di fuori dell'asse reale.

14. Il metodo del contorno delle radici studia le curve descritte dalle radici dell'equazione caratteristica al variare:

   - $\bigcirc$ di un qualunque parametro che compare nell'equazione caratteristica;
   - $\otimes$ di un qualunque parametro che entra linearmente nell'equazione caratteristica;
   - $\bigcirc$ delle sole costanti di tempo relative ad un polo o ad uno zero.

Fondamenti di Controlli Automatici - A.A. 2006/07

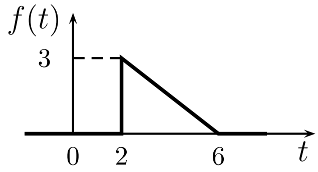
18 Luglio 2007 - Esercizi

Compito B Nr.

Nome:	
Nr. Mat.	
Firma:	

a) Determinare la trasformata di Laplace $X_i(s)$ dei seguenti segnali temporali $x_i(t)$:

$$x_1(t) = 5\,\cos(3\,t - 8), \qquad x_2(t) = \tfrac{1}{4}\,t^3\,e^{-t} + 2\,\sin(6\,\pi\,t),$$



Soluzione:

$$X_1(s) = \frac{5\,s\,e^{-8s/3}}{s^2+9}, \qquad X_2(s) = \frac{3}{2\,(s+1)^4} + \frac{12\,\pi}{s^2+36\,\pi^2}, \qquad X_3(s) = \frac{3}{s}\left[-\frac{e^{-2s}}{4\,s} + e^{-2\,s} + \frac{e^{-6\,s}}{4\,s}\right]$$

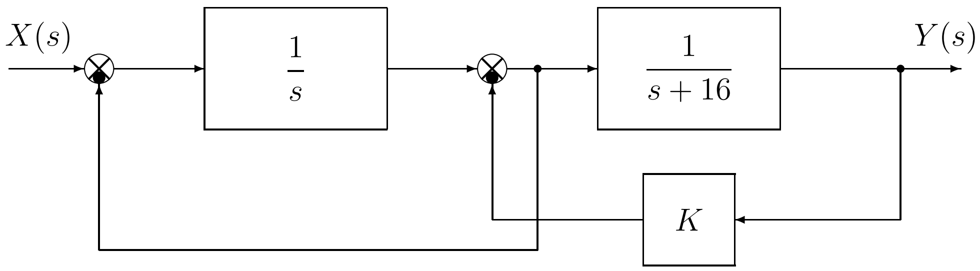
b) Calcolare la risposta impulsiva $g_i(t)$ delle seguenti funzioni di trasferimento $G_i(s)$:

$$G_1(s) = -\frac{4}{(s+2)^3}, \qquad G_2(s) = \frac{s+2}{(s-4)\,(s-2)\,(s+5)}, \qquad G_3(s) = \frac{3}{(s-4)\,(s+5)^2}$$

Soluzione:

$$g_1(t) = -2\,t^2\,e^{-2\,t}, \qquad g_2(t) = \frac{1}{3}\,e^{4\,t} - \frac{4}{14}\,e^{2\,t} - \frac{1}{21}\,e^{-5\,t}, \qquad g_3(t) = \frac{1}{27}\,e^{4\,t} - \frac{1}{27}\,e^{-5\,t} - \frac{1}{3}\,t\,e^{-5\,t}$$

c) Si consideri il seguente schema a blocchi:



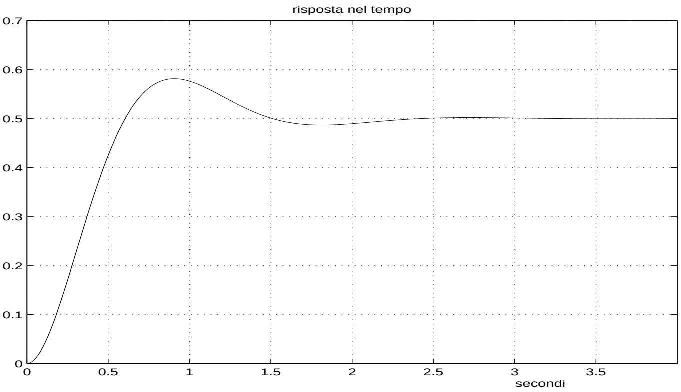
c.1) Posto $K = -13$, utilizzando la formula di Mason calcolare la funzione di trasferimento $G(s)$ che lega l'ingresso $X(s)$ all'uscita $Y(s)$:

$$G(s) = \frac{Y(s)}{X(s)} = \frac{1}{s^2 + 4\,s + 16}$$

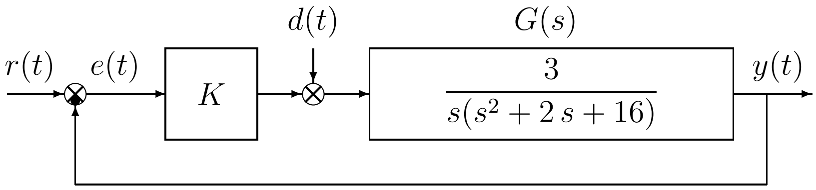
c.2) Relativamente alla funzione di trasferimento $G(s)$ calcolare: 1) la parte reale σ e 2) la parte immaginaria ω dei poli dominanti del sistema; 3) la pulsazione naturale ω_n e 4) il coefficiente di smorzamento δ dei poli dominanti del sistema; 5) il guadagno statico K_0; 6) il tempo di assestamento T_a del sistema $G(s)$ alla risposta al gradino:

1) $\sigma = -2$	3) $\omega_n = 4$	5) $K_0 = \frac{1}{16}$
2) $\omega = 3.5$	4) $\delta = 0.5$	6) $T_a = 1.5$

c.3) Sul disegno a quadretti riportato a fianco disegnare l'andamento qualitativo della risposta $y(t)$ della funzione di trasferimento $G(s)$ al gradino in ingesso $x(t) = 8$.
Per quanto è possibile, disegnare l'andamento temporale in modo congruente con il valore dei parametri numerici determinati al punto c.2).



d) Sia dato il seguente sistema retroazionato:



d.1) Determinare per quali valori del parametro K il sistema retroazionato è asintoticamente stabile.

Soluzione: l'equazione caratteristica del sistema retroazionato è

$$1 + \frac{3\,K}{s\,(s^2 + 2\,s + 16)} = 0 \qquad \rightarrow \qquad s^3 + 2\,s^2 + 16\,s + 3\,K = 0$$

La corrispondente tabella di Routh è la seguente

$$\begin{array}{c|cc} 3 & 1 & 16 \\ 2 & 2 & 3\,K \\ 1 & 16 - \frac{3}{2}\,K & \\ 0 & 3\,K & \end{array}$$

Dalla riga 1 e dalla riga 0 si ricavano i seguenti vincoli:

$$K > 0, \qquad\qquad K < \frac{32}{3}$$

La pulsazione ω^* corrispondente al valore limite $K^* = \frac{32}{3}$ è:

$$\omega^* = \sqrt{16} = 4$$

d.2) Posto $r(t) = 0$, si determini il valore del parametro K tale da garantire che in presenza del disturbo costante $d(t) = d_0$, il valore a regime dell'uscita $y(t)$ sia $y_\infty = 0.4\,d_0$.

<u>Soluzione</u>: Il valore a regime dell'uscita corrispondente all'applicazione del disturbo costante $d(t) = d_0$ è

$$y_\infty = \frac{G(0)\,d_0}{1 + K\,G(0)} = \frac{d_0}{K} = 0.4\,d_0$$

Il sistema $G(s)$è di tipo 1 e quindi il suo guadagno statico infinito $G(0) = \infty$. Il valore di uscita richiesto si ha per $K = 2.5$.

d.3) Posto $d(t) = 0$, calcolare, in funzione del parametro K, l'errore a regime $e_\infty(t)$ corrispondente all'applicazione del segnale di ingresso a rampa $r(t) = 3\,t$.

<u>Soluzione</u>: L'errore a regime $e_\infty = \frac{3}{K_v}$ con $K_v = \frac{3\,K}{16}$. Si ottiene quindi che:

$$e_\infty = \frac{16}{K}.$$

d.4) Posto $K = 1$, disegnare qualitativamente il diagramma di Nyquist "completo" del guadagno d'anello $K\,G(s)$. Calcolare esattamente la posizione σ_a dell'asintoto verticale, le eventuali intersezioni σ_i^* con l'asse reale e i corrispondenti valori delle pulsazioni ω_i^*. Determinare inoltre il margine di ampiezza M_α.

Soluzione: Il diagramma di Nyquist della funzione $G(s)$ per $\omega \in [0,\ \infty]$ è mostrato in Fig. 3.

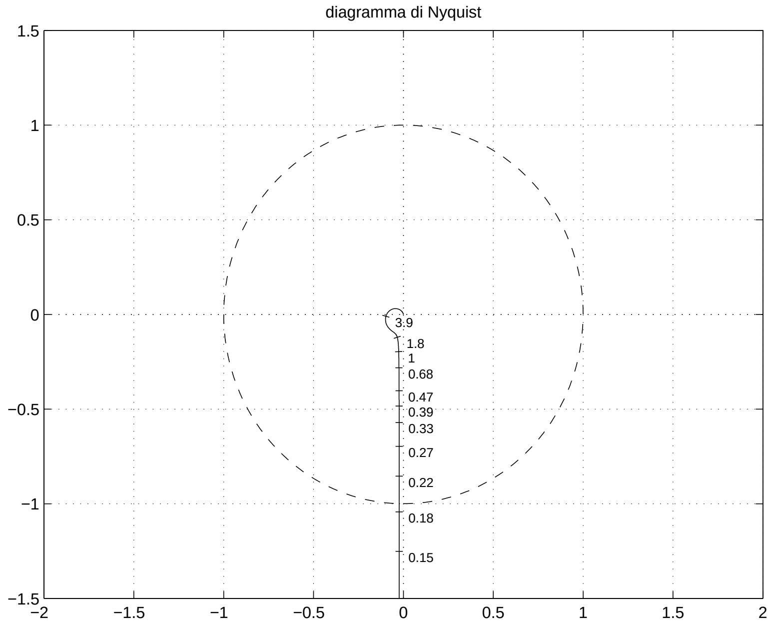


Figura 3: Diagramma di Nyquist della funzione $G(s)$ per $\omega \in [0,\ \infty]$.

Il sistema é di tipo 1 per cui esiste un asintoto verticale in $K_\tau\,\Delta_a = -0.02344$.

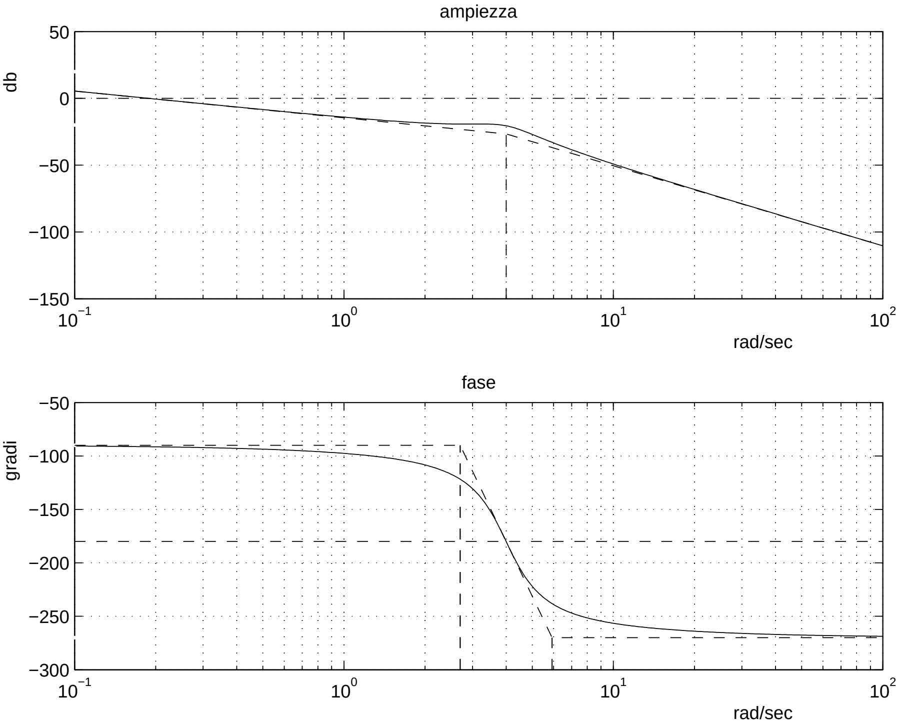
Esiste un'unica intersezione σ^* con l'asse reale. Tale intersezione si determina facilmente dall'analisi di Routh svolta al punto d.1:

$$\sigma^* = -\frac{1}{K^*} = -0.09375$$

Il corrispondente valore di ω^* è 4 mentre il margine di ampiezza è $M_a = \frac{1}{|\sigma^*|} = \frac{32}{3}$.

e) Si faccia riferimento al sistema retroazionato dell'esercizio precedente e si ponga $K = 1$:

e.1) Tracciare qualitativamente i diagrammi di Bode delle ampiezze e della fasi del guadagno di anello $K\,G(s)$;



e.2) Fornire una stima della larghezza di banda del sistema retroazionato;

Soluzione: La banda passante del sistema può essere determinata dal punto di incrocio del diagramma di Bode delle ampiezze con l'asse 0 db. Una stima della banda passante del sistema è quindi $\omega_T = 0.2\, rad/s$.

e.3) Fornire una stima della risposta "a regime" $y_\infty(t)$ del sistema retroazionato quando il disturbo $d(t) = 0$ e in ingresso è presente il segnale $r(t) = 2 + 5\,\cos(0.01\,t)$.

Soluzione: Essendo il sistema retroazionato di tipo passa-basso ed essendo la pulsazione del segnale di ingresso $\omega_r << \omega_T$, con buona approssimazione l'uscita risulta uguale al segnale d'ingresso, percui $y(t) = 2 + 5\,\cos(0.01\,t)$.

f) **Non è richiesto lo svolgimento di questo esercizio agli iscritti ad Ingegneria Ambientale.**

Si faccia riferimento al sistema descritto nell'esercizio d):

f.1) Tracciare qualitativamente il luogo delle radici del sistema retroazionato per valori positivi del parametro K. Determinare qualitativamente i punti di diramazione. Soluzione: vedi figura 4.

f.2) Determinare il centro degli asintoti, gli angoli che gli asintoti formano rispetto all'asse reale positivo, le intersezioni del luogo delle radici con l'asse immaginario e i corrispondenti valori del parametro K.

Soluzione:

$$\sigma = -0.667$$
$$\phi = 60,\ 180,\ 300$$
$$s^* = 4\,i$$
$$K^* = \frac{32}{3}$$

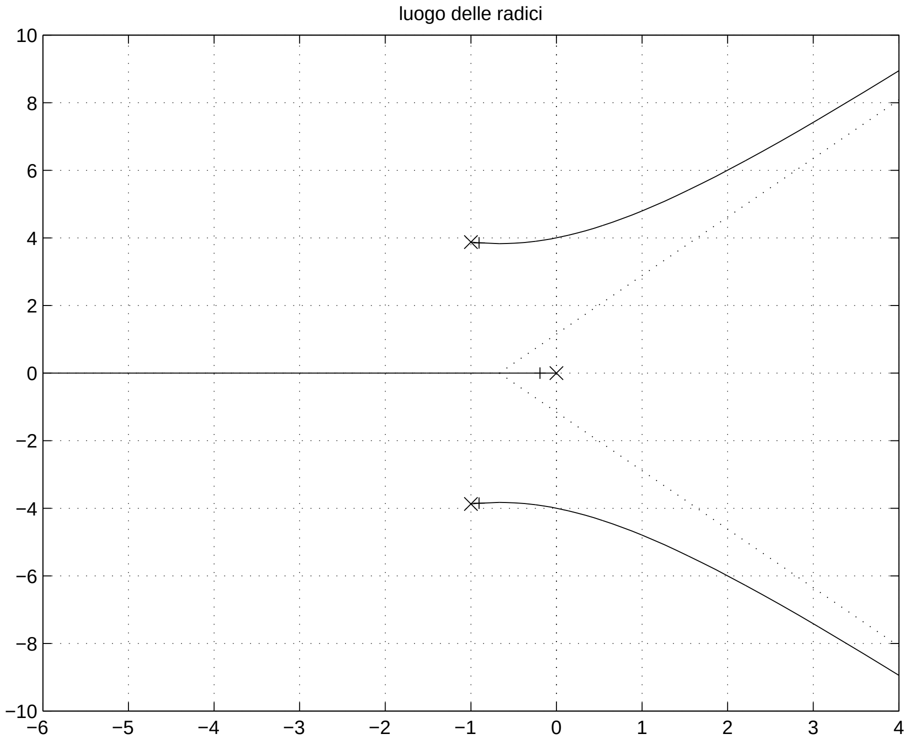


Figura 4: Luogo della radici di $G(s)$.

Fondamenti di Controlli Automatici - A.A. 2006/07
18 Luglio 2007 - Domande Teoriche
Compito B Nr.

Nome:	
Nr. Mat.	
Firma:	

Per ciascuno dei test a soluzione multipla segnare con una crocetta tutte le affermazioni che si ritengono giuste.

1. Un sistema di "tipo 2" è caratterizzato da:

   ○ grado relativo $n - m = 2$;
   ○ 2 poli complessi coniugati;
   ⊗ 2 poli nulli.

2. Per $\omega \in [-\infty, \infty]$, il diagramma di Nyquist "completo" di un sistema $G(s)$ di tipo 2 deve essere chiuso all'infinito:

   ○ con una circonferenza percorsa in senso antiorario;
   ⊗ con una circonferenza percorsa in senso orario;
   ○ con una semicirconferenza percorsa in senso antiorario;
   ○ con una semicirconferenza percorsa in senso orario.

3. Dato il diagramma di Bode delle ampiezze di $G(j\omega)$, da esso si può dedurre il diagramma delle fasi:

   ⊗ solo se il sistema $G(s)$ ha tutti i poli e tutti gli zeri a parte reale negativa;
   ○ solo se il sistema $G(s)$ ha tutti i poli a parte reale negativa;
   ○ solo se il diagramma di Bode presenta pendenze negative o nulle.

4. La trasformata di Laplace del segnale $x(t) = 2\,t$ è:

   ○ $X(s) = \frac{1}{s^3}$;
   ○ $X(s) = \frac{2}{s^3}$;
   ○ $X(s) = \frac{1}{s^2}$;
   ⊗ $X(s) = \frac{2}{s^2}$.

5. Un sistema del secondo ordine che presenta un coefficiente di smorzamento $0 < \delta < 1$ è caratterizzato da:

   ○ due poli complessi coniugati a parte reale positiva;
   ⊗ due poli complessi coniugati a parte reale negativa;
   ○ due poli reali distinti a parte reale positiva;
   ○ due poli reali distinti a parte reale negativa.

6. Un sistema di tipo 1 chiuso in retroazione unitaria negativa:

   ⊗ ha guadagno statico unitario;
   ○ ha guadagno statico minore di 1;
   ○ ha guadagno statico maggiore di 1.

7. Nell'appicazione del criterio di Routh, le radici dell'equazione ausiliaria che si ottiene quando una riga intera della tabella di Routh si annulla:

   ○ sono tutte radici a parte reale nulla;
   ⊗ sono radici simmetriche rispetto all'origine del piano complesso;
   ⊗ sono radici anche dell'equazione caratteristica di partenza.

8. La funzione complessa $X(s) = \frac{1}{(s+3)^2}$ è la trasformata di Laplace:

   ◯ del segnale $x(t) = t^2 e^{-3t}$;
   ◯ del segnale $x(t) = te^{-(t-3)}$;
   ⊗ di un segnale $x(t)$ che tende a zero per $t \to 0$;
   ⊗ di un segnale $x(t)$ che tende a zero per $t \to \infty$.

9. Il diagramma di Nyquist della funzione $G(s) = \frac{s+1}{s(s+2)}$ per $\omega \in [0, \infty]$:

   ◯ ha guadagno statico unitario;
   ⊗ si evolve tutta nel semipiano positivo;
   ⊗ presenta un asintoto verticale;
   ◯ è una semicirconferenza.

10. Determinare il tempo di assestamento del sistema $G(s) = \frac{1}{s+8}$;

$$T_a = \frac{3}{8}$$

11. Un sistema $G(s)$ a fase minima di tipo 2 e con grado relativo 1 presenta nel diagramma asintotico di Bode delle ampiezze:

    ⊗ una pendenza di $-40\, db/decade$ per $\omega \to 0$;
    ◯ una pendenza di $-20\, db/decade$ per $\omega \to 0$;
    ◯ una pendenza di $-40\, db/decade$ per $\omega \to \infty$;
    ⊗ una pendenza di $-20\, db/decade$ per $\omega \to \infty$.

12. Il valore iniziale per $t = 0^+$ della risposta all'impulso $g(t)$ del sistema $G(s) = \frac{2\,s+3}{s^2+1}$ vale:

    ◯ $g(0^+) = 0$;
    ◯ $g(0^+) = 1$;
    ⊗ $g(0^+) = 2$.

Non è richiesto lo svolgimento delle seguenti domande agli iscritti ad Ingegneria Ambientale.

13. Un sistema dinamico $G(s)$ avente i poli e gli zeri posizionati in modo alterno (un polo, uno zero, un polo, uno zero ecc.) sull'asse reale presenta un luogo delle radici:

    ◯ che può evolvere anche al di fuori dell'asse reale;
    ⊗ che per $K > 0$ si evolve tutto sull'asse reale;
    ⊗ che per $K < 0$ si evolve tutto sull'asse reale.

14. Il metodo del contorno delle radici studia le curve descritte dalle radici dell'equazione caratteristica al variare:

    ⊗ di un qualunque parametro che entra linearmente nell'equazione caratteristica;
    ◯ di un qualunque parametro che compare nell'equazione caratteristica;
    ◯ delle sole costanti di tempo relative ad un polo o ad uno zero.