Fondamenti di Controlli Automatici - A.A. 2006/07

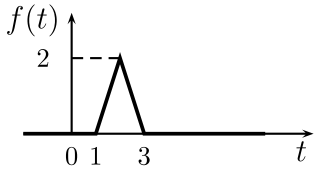
20 Giugno 2007 - Esercizi

Compito Nr.

Nome:	
Nr. Mat.	
Firma:	

a) Determinare la trasformata di Laplace $X_i(s)$ dei seguenti segnali temporali $x_i(t)$:

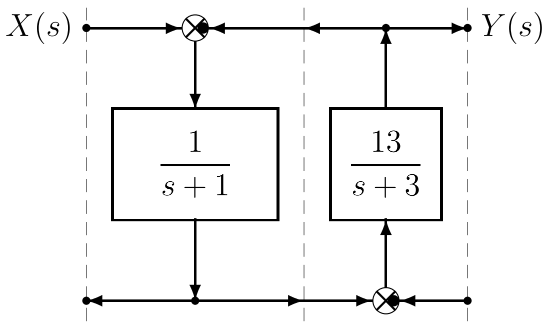
$$x_1(t) = \tfrac{1}{2}\, t^2\, e^{6\,t} + 3\,\sin(2\,\pi\,t), \qquad x_2(t) = 3\,\cos(2\,t - 4),$$



b) Calcolare la risposta impulsiva $g_i(t)$ delle seguenti funzioni di trasferimento $G_i(s)$:

$$G_1(s) = \frac{-4}{(s+2)\,(s-1)^2}, \qquad G_2(s) = \frac{4}{(s-2)^3}, \qquad G_3(s) = \frac{s+3}{(s+1)\,(s-2)\,(s+4)}$$

c) Lo schema a blocchi riportato a fianco rappresenta un sistema dinamico del secondo ordine.



c.1) Utilizzando la formula di Mason, calcolare la funzione di trasferimento $G(s)$ che lega l'ingresso $X(s)$ all'uscita $Y(s)$:

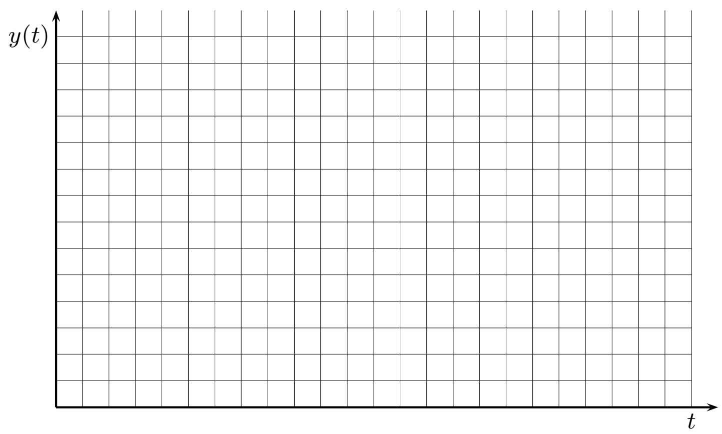
$$G(s) = \frac{Y(s)}{X(s)} =$$

c.2) Relativamente alla funzione di trasferimento $G(s)$ calcolare: 1) la parte reale σ e 2) la parte immaginaria ω dei poli dominanti del sistema; 3) la pulsazione naturale ω_n e 4) il coefficiente di smorzamento $\delta <$ dei poli dominanti del sistema; 5) il guadagno statico K_0; 6) il tempo di assestamento T_a del sistema $G(s)$ alla risposta al gradino:

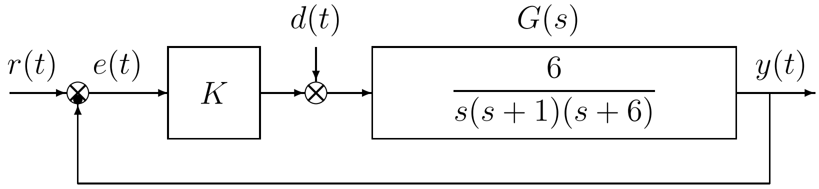
1) $\sigma = \ldots\ldots$ 3) $\omega_n = \ldots\ldots$ 5) $K_0 = \ldots\ldots$

2) $\omega = \ldots\ldots$ 4) $\delta = \ldots\ldots$ 6) $T_a = \ldots\ldots$

c.3) Sul disegno a quadretti riportato a fianco disegnare l'andamento qualitativo della risposta $y(t)$ della funzione di trasferimento $G(s)$ al gradino in ingesso $x(t) = 2$.
Per quanto è possibile, disegnare l'andamento temporale in modo congruente con il valore dei parametri numerici determinati al punto c.2).



d) Sia dato il seguente sistema retroazionato:



d.1) Determinare per quali valori del parametro K il sistema retroazionato è asintoticamente stabile.

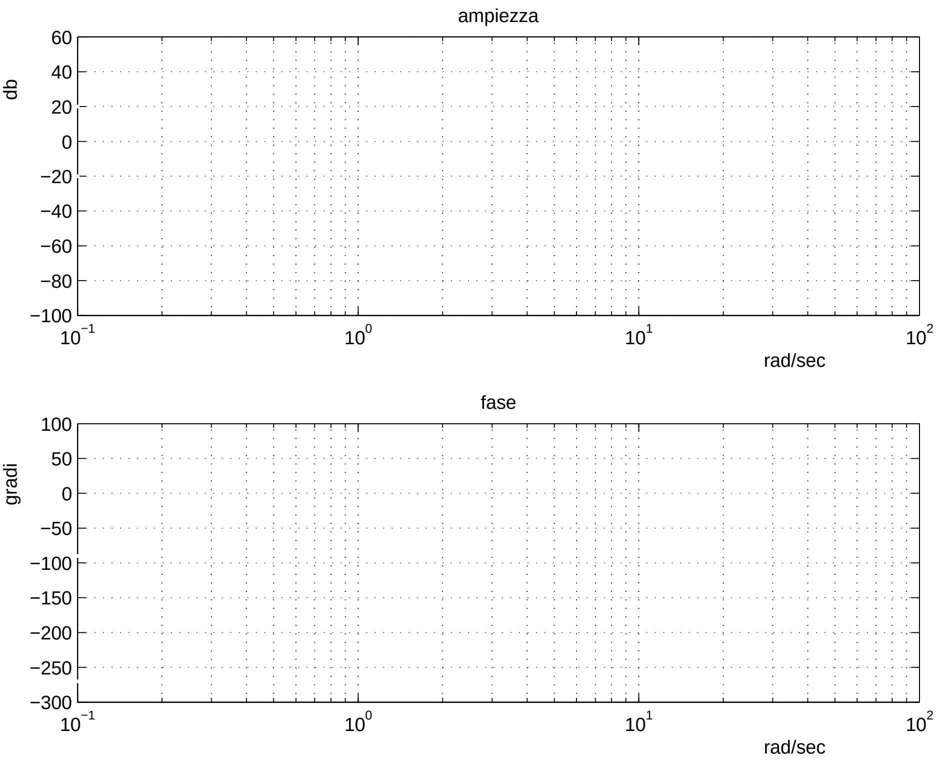
d.2) Posto $r(t) = 0$, si determini il valore del parametro K tale da garantire che in presenza del disturbo costante $d(t) = d_0$, il valore a regime dell'uscita $y(t)$ sia $y_\infty = 0.2\, d_0$.

d.3) Posto $d(t) = 0$, calcolare, in funzione del parametro K, l'errore a regime $e_\infty(t)$ corrispondente all'applicazione del segnale di ingresso a rampa $r(t) = 3\,t$.

d.4) Posto $K = 1$, disegnare qualitativamente il diagramma di Nyquist "completo" del guadagno d'anello $K\,G(s)$. Calcolare esattamente la posizione σ_a dell'asintoto verticale, le eventuali intersezioni σ_i^* con l'asse reale e i corrispondenti valori delle pulsazioni ω_i^*. Determinare inoltre il margine di ampiezza M_α.

e) Si faccia riferimento al sistema retroazionato dell'esercizio precedente e si ponga $K = 1$:

e.1) Tracciare qualitativamente i diagrammi di Bode delle ampiezze e della fasi del guadagno di anello $K\,G(s)$;



e.2) Fornire una stima della larghezza di banda del sistema retroazionato;

e.3) Fornire una stima della risposta "a regime" $y_\infty(t)$ del sistema retroazionato quando il disturbo $d(t) = 0$ e in ingresso è presente il segnale $r(t) = 4 + 3\,\cos(200\,t)$.

f) **Non è richiesto lo svolgimento di questo esercizio agli iscritti ad Ingegneria Ambientale.**

Si faccia riferimento al sistema descritto nell'esercizio d):

f.1) Tracciare qualitativamente il luogo delle radici del sistema retroazionato per valori positivi del parametro K. Determinare qualitativamente i punti di diramazione.

f.2) Determinare il centro degli asintoti, gli angoli che gli asintoti formano rispetto all'asse reale positivo, le intersezioni del luogo delle radici con l'asse immaginario e i corrispondenti valori del parametro K.

Fondamenti di Controlli Automatici - A.A. 2006/07

20 Giugno 2007 - Domande Teoriche

Compito Nr.

Nome:	
Nr. Mat.	
Firma:	

Per ciascuno dei test a soluzione multipla segnare con una crocetta tutte le affermazioni che si ritengono giuste.

1. La trasformata di Laplace del segnale $x(t) = t^2$ è:
   - ○ $X(s) = \frac{1}{s^2}$;
   - ○ $X(s) = \frac{2}{s^2}$;
   - ○ $X(s) = \frac{1}{s^3}$;
   - ○ $X(s) = \frac{2}{s^3}$.

2. Il diagramma di Nyquist della funzione $G(s) = \frac{s+1}{s+2}$ per $\omega \in [0, \infty]$:
   - ○ è una semicirconferenza;
   - ○ presenta un asintoto verticale;
   - ○ si evolve tutta nel semipiano positivo;
   - ○ ha guadagno statico unitario.

3. In base al principio del modello interno, affinchè un sistema retroazionato abbia errore a regime nullo quando in ingresso vi è un segnale la cui trasformata di Laplace ha 2 poli nell'origine, è necessario che nel guadagno d'anello:
   - ○ sia presente almeno un polo nell'origine;
   - ○ siano presenti almeno due poli nell'origine;
   - ○ siano presenti almeno tre poli nell'origine.

4. Il sistema dinamico $\ddot{y} = -y\, e^{-t} + t^2\, x$ (dove x è l'ingresso, y è l'uscita e t è la variabile "tempo") è:
   - ○ lineare;
   - ○ non lineare;
   - ○ stazionario;
   - ○ non stazionario.

5. Due sistemi di tipo 0 asintoticamente stabili, aventi la stessa costante di posizione K_p, se vengono posti in retroazione negativa unitaria:
   - ○ generano sistemi in retroazione stabili;
   - ○ presentano lo stesso errore a regime con ingresso a gradino;
   - ○ presentano un errore a regime nullo con ingresso a gradino;
   - ○ presentano un errore a regime nullo con ingresso a rampa.

6. Determinare il tempo di assestamento del sistema $G(s) = \frac{1}{s+2}$;

$$T_a =$$

7. Un sistema $G(s)$ asintoticamente stabile e a fase non minima:
   - ○ ha almeno un polo a parte reale positiva;
   - ○ ha almeno uno zero a parte reale positiva;
   - ○ può avere sia poli che zeri a parte reale positiva.

8. Un sistema in retroazione negativa avente $G(s)$ sul ramo diretto, $H(s)$ sul ramo di retroazione e con elevato guadagno statico d'anello;
   - ◯ è poco sensibile alle variazioni parametriche di $G(s)$;
   - ◯ è poco sensibile alle variazioni parametriche di $H(s)$;
   - ◯ presenta una forte attenuazione dei disturbi costanti agenti sul sistema.
9. Nella costruzione della tabella di Routh, l'annullamento di tutti i coefficienti di una riga si può avere:
   - ◯ solo per righe dispari;
   - ◯ solo per righe pari;
   - ◯ sia per righe pari che per righe dispari;
10. Un sistema $G(s)$ a fase minima di tipo 1 e con grado relativo 2 presenta nel diagramma asintotico di Bode delle ampiezze:
    - ◯ una pendenza di $-20\,db/decade$ per $\omega \to 0$;
    - ◯ una pendenza di $-40\,db/decade$ per $\omega \to 0$;
    - ◯ una pendenza di $-20\,db/decade$ per $\omega \to \infty$;
    - ◯ una pendenza di $-40\,db/decade$ per $\omega \to \infty$.
11. Il valore iniziale per $t = 0^+$ della risposta all'impulso $g(t)$ del sistema $G(s) = \frac{2\,s+3}{2\,s^2+1}$ vale:
    - ◯ $g(0^+) = 0$;
    - ◯ $g(0^+) = 1$;
    - ◯ $g(0^+) = 2$.
12. La larghezza di banda ω_f del sistema $G(s) = \frac{\omega_n^2}{s^2+2\,\delta\,\omega_n+\omega_n^2}$:
    - ◯ è proporzionale a ω_n;
    - ◯ è proporzionale a δ;
    - ◯ è uguale a $\frac{3}{\delta\,\omega_n}$.

Non è richiesto lo svolgimento delle seguenti domande agli iscritti ad Ingegneria Ambientale.

13. Sia $1 + K\,G(s) = 0$ l'equazione caratteristica di un sistema retroazionato. Le radici triple del corrispondente luogo delle radici al variare del parametro K sono tutte e sole le soluzioni:
    - ◯ dell'equazione $\frac{d^2\,G(s)}{d\,s^2} = 0$;
    - ◯ del sistema di equazioni $1 + K\,G(s) = 0$, $\frac{d^2\,G(s)}{d\,s^2} = 0$;
    - ◯ del sistema di equazioni $1 + K\,G(s) = 0$, $\frac{d\,G(s)}{d\,s} = 0$, $\frac{d^2\,G(s)}{d\,s^2} = 0$.
14. Il luogo delle radici presenta almeno un asintoto verticale ($r = n - m > 0$ è il grado relativo):
    - ◯ quando $r = 2$ e K è positiva;
    - ◯ quando $r = 2$ e K è negativa;
    - ◯ quando $r = 4$ e K è positiva;
    - ◯ quando $r = 4$ e K è negativa.

Fondamenti di Controlli Automatici - A.A. 2006/07

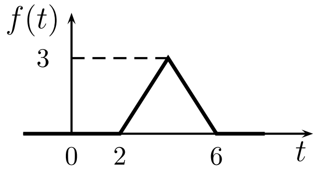
20 Giugno 2007 - Esercizi

Compito Nr.

Nome:	
Nr. Mat.	
Firma:	

a) Determinare la trasformata di Laplace $X_i(s)$ dei seguenti segnali temporali $x_i(t)$:

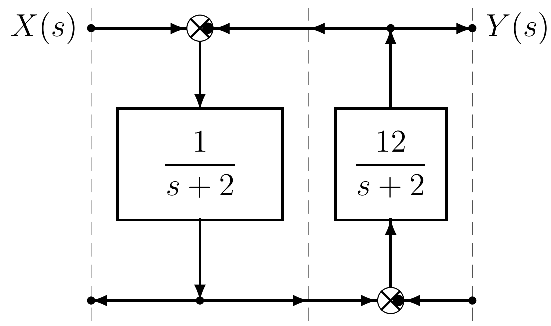
$$x_1(t) = 4\,\sin(3\,t - 6), \qquad x_2(t) = \tfrac{1}{3}\,t^2\,e^{2\,t} + 3\,\cos(6\,\pi\,t),$$



b) Calcolare la risposta impulsiva $g_i(t)$ delle seguenti funzioni di trasferimento $G_i(s)$:

$$G_1(s) = -\frac{2}{(s+4)^3}, \qquad G_2(s) = \frac{s+4}{(s-1)\,(s+2)\,(s+3)}, \qquad G_3(s) = \frac{4}{(s-3)\,(s+2)^2}$$

c) Lo schema a blocchi riportato a fianco rappresenta un sistema dinamico del secondo ordine.



c.1) Utilizzando la formula di Mason, calcolare la funzione di trasferimento $G(s)$ che lega l'ingresso $X(s)$ all'uscita $Y(s)$:

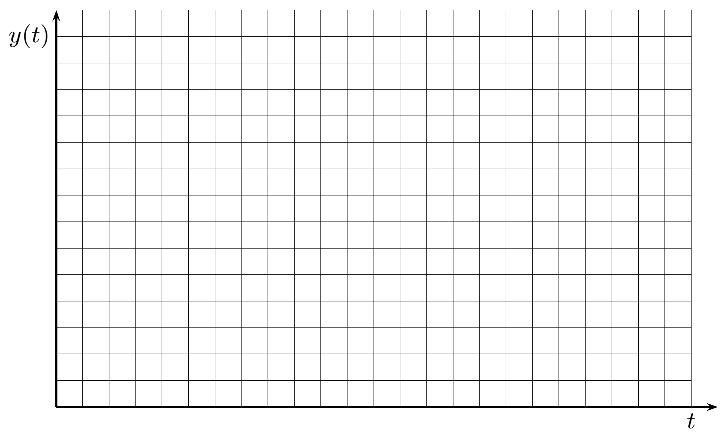
$$G(s) = \frac{Y(s)}{X(s)} =$$

c.2) Relativamente alla funzione di trasferimento $G(s)$ calcolare: 1) la parte reale σ e 2) la parte immaginaria ω dei poli dominanti del sistema; 3) la pulsazione naturale ω_n e 4) il coefficiente di smorzamento $\delta <$ dei poli dominanti del sistema; 5) il guadagno statico K_0; 6) il tempo di assestamento T_a del sistema $G(s)$ alla risposta al gradino:

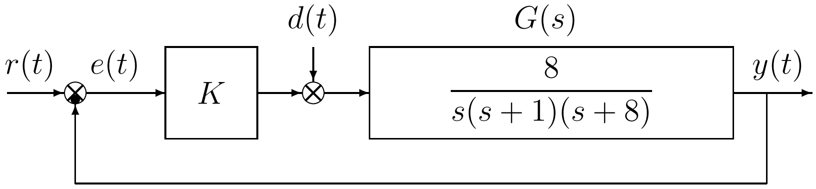
1) $\sigma = \ldots\ldots$ 3) $\omega_n = \ldots\ldots$ 5) $K_0 = \ldots\ldots$

2) $\omega = \ldots\ldots$ 4) $\delta = \ldots\ldots$ 6) $T_a = \ldots\ldots$

c.3) Sul disegno a quadretti riportato a fianco disegnare l'andamento qualitativo della risposta $y(t)$ della funzione di trasferimento $G(s)$ al gradino in ingesso $x(t) = 3$.
Per quanto è possibile, disegnare l'andamento temporale in modo congruente con il valore dei parametri numerici determinati al punto c.2).



d) Sia dato il seguente sistema retroazionato:



d.1) Determinare per quali valori del parametro K il sistema retroazionato è asintoticamente stabile.

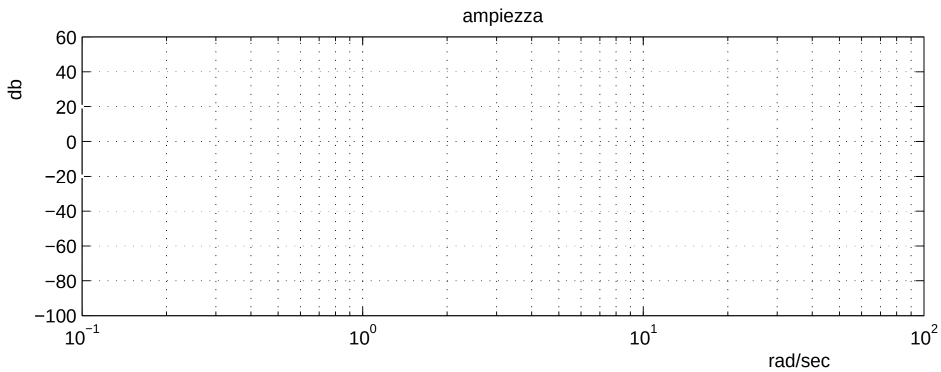
d.2) Posto $r(t) = 0$, si determini il valore del parametro K tale da garantire che in presenza del disturbo costante $d(t) = d_0$, il valore a regime dell'uscita $y(t)$ sia $y_\infty = 0.25\, d_0$.

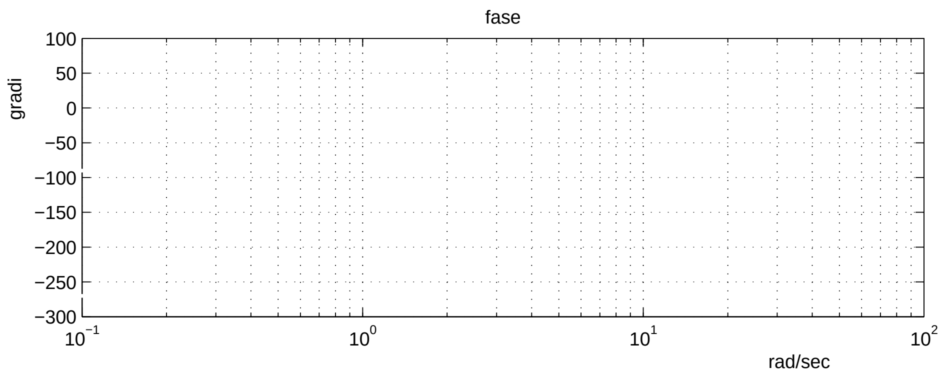
d.3) Posto $d(t) = 0$, calcolare, in funzione del parametro K, l'errore a regime $e_\infty(t)$ corrispondente all'applicazione del segnale di ingresso a rampa $r(t) = 2\, t$.

d.4) Posto $K = 1$, disegnare qualitativamente il diagramma di Nyquist "completo" del guadagno d'anello $K\, G(s)$. Calcolare esattamente la posizione σ_a dell'asintoto verticale, le eventuali intersezioni σ_i^* con l'asse reale e i corrispondenti valori delle pulsazioni ω_i^*. Determinare inoltre il margine di ampiezza M_α.

e) Si faccia riferimento al sistema retroazionato dell'esercizio precedente e si ponga $K = 1$:

e.1) Tracciare qualitativamente i diagrammi di Bode delle ampiezze e della fasi del guadagno di anello $K\, G(s)$;





e.2) Fornire una stima della larghezza di banda del sistema retroazionato;

e.3) Fornire una stima della risposta "a regime" $y_\infty(t)$ del sistema retroazionato quando il disturbo $d(t) = 0$ e in ingresso è presente il segnale $r(t) = 5 + \cos(300\, t)$.

f) **Non è richiesto lo svolgimento di questo esercizio agli iscritti ad Ingegneria Ambientale.**

Si faccia riferimento al sistema descritto nell'esercizio d):

f.1) Tracciare qualitativamente il luogo delle radici del sistema retroazionato per valori positivi del parametro K. Determinare qualitativamente i punti di diramazione.

f.2) Determinare il centro degli asintoti, gli angoli che gli asintoti formano rispetto all'asse reale positivo, le intersezioni del luogo delle radici con l'asse immaginario e i corrispondenti valori del parametro K.

Fondamenti di Controlli Automatici - A.A. 2006/07

20 Giugno 2007 - Domande Teoriche

Compito Nr.

Nome:	
Nr. Mat.	
Firma:	

Per ciascuno dei test a soluzione multipla segnare con una crocetta tutte le affermazioni che si ritengono giuste.

1. La trasformata di Laplace del segnale $x(t) = t^2$ è:
   - ○ $X(s) = \frac{1}{s^3}$;
   - ○ $X(s) = \frac{2}{s^3}$;
   - ○ $X(s) = \frac{1}{s^2}$;
   - ○ $X(s) = \frac{2}{s^2}$.
2. Il diagramma di Nyquist della funzione $G(s) = \frac{s+1}{s+2}$ per $\omega \in [0, \infty]$:
   - ○ ha guadagno statico unitario;
   - ○ si evolve tutta nel semipiano positivo;
   - ○ presenta un asintoto verticale;
   - ○ è una semicirconferenza.
3. In base al principio del modello interno, affinchè un sistema retroazionato abbia errore a regime nullo quando in ingresso vi è un segnale la cui trasformata di Laplace ha 2 poli nell'origine, è necessario che nel guadagno d'anello:
   - ○ sia presente almeno un polo nell'origine;
   - ○ siano presenti almeno tre poli nell'origine;
   - ○ siano presenti almeno due poli nell'origine.
4. Il sistema dinamico $\ddot{y} = -y\, e^{-t} + t^2\, x$ (dove x è l'ingresso, y è l'uscita e t è la variabile "tempo") è:
   - ○ non lineare;
   - ○ lineare;
   - ○ non stazionario;
   - ○ stazionario.
5. Due sistemi di tipo 0 asintoticamente stabili, aventi la stessa costante di posizione K_p, se vengono posti in retroazione negativa unitaria:
   - ○ generano sistemi in retroazione stabili;
   - ○ presentano un errore a regime nullo con ingresso a rampa;
   - ○ presentano un errore a regime nullo con ingresso a gradino;
   - ○ presentano lo stesso errore a regime con ingresso a gradino.
6. Determinare il tempo di assestamento del sistema $G(s) = \frac{1}{s+10}$;

$$T_a =$$

7. Un sistema $G(s)$ asintoticamente stabile e a fase non minima:
   - ○ può avere sia poli che zeri a parte reale positiva;
   - ○ ha almeno un polo a parte reale positiva;
   - ○ ha almeno uno zero a parte reale positiva.

8. Un sistema in retroazione negativa avente $G(s)$ sul ramo diretto, $H(s)$ sul ramo di retroazione e con elevato guadagno statico d'anello;

   ◯ è poco sensibile alle variazioni parametriche di $H(s)$;
   ◯ è poco sensibile alle variazioni parametriche di $G(s)$;
   ◯ presenta una forte attenuazione dei disturbi costanti agenti sul sistema.

9. Nella costruzione della tabella di Routh, l'annullamento di tutti i coefficienti di una riga si può avere:

   ◯ solo per righe pari;
   ◯ solo per righe dispari;
   ◯ sia per righe pari che per righe dispari;

10. Un sistema $G(s)$ a fase minima di tipo 1 e con grado relativo 2 presenta nel diagramma asintotico di Bode delle ampiezze:

    ◯ una pendenza di $-40\,db/decade$ per $\omega \to 0$;
    ◯ una pendenza di $-20\,db/decade$ per $\omega \to 0$;
    ◯ una pendenza di $-40\,db/decade$ per $\omega \to \infty$;
    ◯ una pendenza di $-20\,db/decade$ per $\omega \to \infty$.

11. Il valore iniziale per $t = 0^+$ della risposta all'impulso $g(t)$ del sistema $G(s) = \frac{4\,s+1}{s^2+2}$ vale:

    ◯ $g(0^+) = 0$;
    ◯ $g(0^+) = 1$;
    ◯ $g(0^+) = 2$.

12. La larghezza di banda ω_f del sistema $G(s) = \frac{\omega_n^2}{s^2+2\,\delta\,\omega_n+\omega_n^2}$:

    ◯ è proporzionale a δ;
    ◯ è proporzionale a ω_n;
    ◯ è uguale a $\frac{3}{\delta\,\omega_n}$.

Non è richiesto lo svolgimento delle seguenti domande agli iscritti ad Ingegneria Ambientale.

13. Sia $1 + K\,G(s) = 0$ l'equazione caratteristica di un sistema retroazionato. Le radici triple del corrispondente luogo delle radici al variare del parametro K sono tutte e sole le soluzioni:

    ◯ del sistema di equazioni $1 + K\,G(s) = 0$, $\frac{d\,G(s)}{d\,s} = 0$, $\frac{d^2\,G(s)}{d\,s^2} = 0$;
    ◯ del sistema di equazioni $1 + K\,G(s) = 0$, $\frac{d^2\,G(s)}{d\,s^2} = 0$;
    ◯ dell'equazione $\frac{d^2\,G(s)}{d\,s^2} = 0$.

14. Il luogo delle radici presenta almeno un asintoto verticale ($r = n - m > 0$ è il grado relativo):

    ◯ quando $r = 2$ e K è negativa;
    ◯ quando $r = 2$ e K è positiva;
    ◯ quando $r = 4$ e K è negativa;
    ◯ quando $r = 4$ e K è positiva.

Fondamenti di Controlli Automatici - A.A. 2006/07

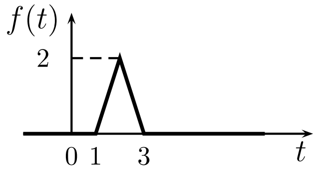
20 Giugno 2007 - Esercizi

Compito A Nr.

Nome:	
Nr. Mat.	
Firma:	

a) Determinare la trasformata di Laplace $X_i(s)$ dei seguenti segnali temporali $x_i(t)$:

$$x_1(t) = \tfrac{1}{2}\, t^2\, e^{6\,t} + 3\, \sin(2\,\pi\, t), \qquad x_2(t) = 3\, \cos(2\,t - 4),$$



Soluzione:

$$X_1(s) = \frac{1}{(s-6)^3} + \frac{6\,\pi}{s^2+4\,\pi^2}, \qquad X_2(s) = \frac{3\,s\,e^{-2s}}{s^2+4}, \qquad X_3(s) = \frac{2}{s^2}\left[e^{-s} - 2\,e^{-2\,s} + e^{-3\,s}\right]$$

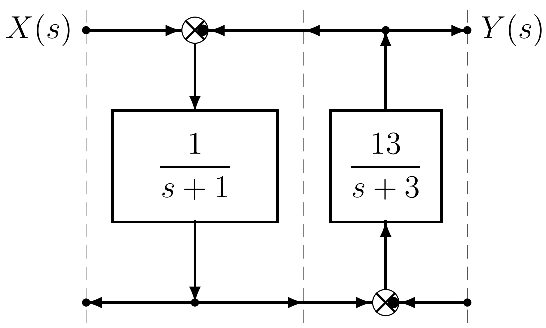
b) Calcolare la risposta impulsiva $g_i(t)$ delle seguenti funzioni di trasferimento $G_i(s)$:

$$G_1(s) = \frac{-4}{(s+2)\,(s-1)^2}, \qquad G_2(s) = \frac{4}{(s-2)^3}, \qquad G_3(s) = \frac{s+3}{(s+1)\,(s-2)\,(s+4)}$$

Soluzione:

$$g_1(t) = -\frac{4}{9}\,e^{-2\,t} + \frac{4}{9}\,e^{t} - \frac{4}{3}\,t\,e^{t}, \qquad g_2(t) = 2\,t^2\,e^{2\,t}, \qquad g_3(t) = -\frac{2}{9}\,e^{-t} + \frac{5}{18}\,e^{2\,t} - \frac{1}{18}\,e^{-4\,t}$$

c) Lo schema a blocchi riportato a fianco rappresenta un sistema dinamico del secondo ordine.



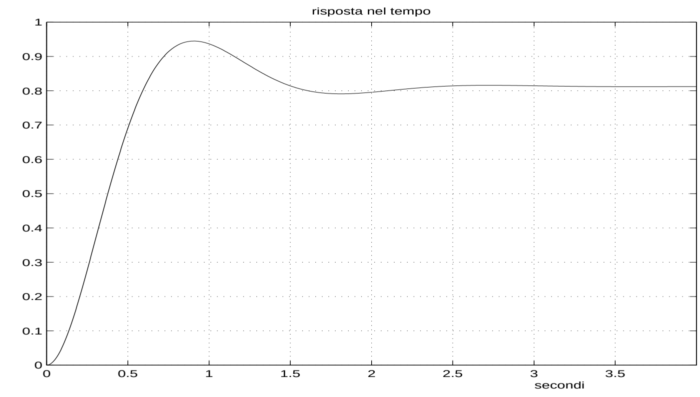
c.1) Utilizzando la formula di Mason, calcolare la funzione di trasferimento $G(s)$ che lega l'ingresso $X(s)$ all'uscita $Y(s)$:

$$G(s) = \frac{Y(s)}{X(s)} = \frac{13}{s^2+4\,s+16}$$

c.2) Relativamente alla funzione di trasferimento $G(s)$ calcolare: 1) la parte reale σ e 2) la parte immaginaria ω dei poli dominanti del sistema; 3) la pulsazione naturale ω_n e 4) il coefficiente di smorzamento $\delta <$ dei poli dominanti del sistema; 5) il guadagno statico K_0; 6) il tempo di assestamento T_a del sistema $G(s)$ alla risposta al gradino:

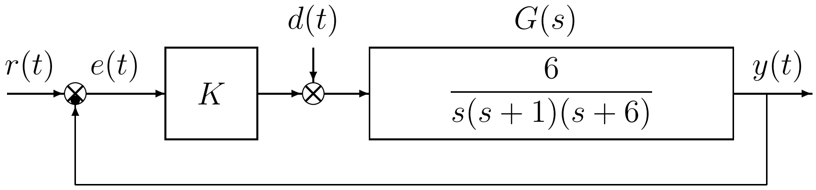
1) $\sigma = -2$	3) $\omega_n = 4$	5) $K_0 = 0.81$
2) $\omega = 3.46$	4) $\delta = 0.5$	6) $T_a = 1.5$

c.3) Sul disegno a quadretti riportato a fianco disegnare l'andamento qualitativo della risposta $y(t)$ della funzione di trasferimento $G(s)$ al gradino in ingesso $x(t) = 2$.
Per quanto è possibile, disegnare l'andamento temporale in modo congruente con il valore dei parametri numerici determinati al punto c.2).



Risposta al gradino unitario.

d) Sia dato il seguente sistema retroazionato:



d.1) Determinare per quali valori del parametro K il sistema retroazionato è asintoticamente stabile.

Soluzione: l'equazione caratteristica del sistema retroazionato è

$$1 + \frac{6\,K}{s\,(s+1)\,(s+6)} = 0 \qquad \rightarrow \qquad s^3 + 7\,s^2 + 6\,s^2 + 6\,K = 0$$

La corrispondente tabella di Routh è la seguente

$$\begin{array}{c|cc} 3 & 1 & 6 \\ 2 & 7 & 6\,K \\ 1 & 42 - 6\,K & \\ 0 & 6\,K & \end{array}$$

Dalla riga 1 e dalla riga 0 si ricavano i seguenti vincoli:

$$K > 0, \qquad\qquad K < 7$$

La pulsazione ω^* corrispondente al valore limite $K^* = 7$ è:

$$\omega^* = \sqrt{6} = 2.45$$

d.2) Posto $r(t) = 0$, si determini il valore del parametro K tale da garantire che in presenza del disturbo costante $d(t) = d_0$, il valore a regime dell'uscita $y(t)$ sia $y_\infty = 0.2\,d_0$.

<u>Soluzione</u>: Il valore a regime dell'uscita corrispondente all'applicazione del disturbo costante $d(t) = d_0$ è

$$y_\infty = \frac{G(0)\,d_0}{1 + K\,G(0)} = \frac{d_0}{K} = 0.2\,d_0$$

Il sistema $G(s)$è di tipo 1 e quindi il suo guadagno statico infinito $G(0) = \infty$. Il valore di uscita richiesto si ha per $K = 5$.

d.3) Posto $d(t) = 0$, calcolare, in funzione del parametro K, l'errore a regime $e_\infty(t)$ corrispondente all'applicazione del segnale di ingresso a rampa $r(t) = 3\,t$.

<u>Soluzione</u>: L'errore a regime $e_\infty = \frac{3}{K_v}$ con $K_v = K$. Si ottiene quindi che:

$$e_\infty = \frac{3}{K}.$$

d.4) Posto $K = 1$, disegnare qualitativamente il diagramma di Nyquist "completo" del guadagno d'anello $K\,G(s)$. Calcolare esattamente la posizione σ_a dell'asintoto verticale, le eventuali intersezioni σ_i^* con l'asse reale e i corrispondenti valori delle pulsazioni ω_i^*. Determinare inoltre il margine di ampiezza M_α.

<u>Soluzione</u>: Il diagramma di Nyquist della funzione $G(s)$ per $\omega \in [0,\ \infty]$ è mostrato in Fig. 1.

Il sistema é di tipo 1 per cui esiste un asintoto verticale in $K_\tau\,\Delta_a = -1.167$.

Esiste un'unica intersezione σ^* con l'asse reale. Tale intersezione si determina facilmente dall'analisi di Routh svolta al punto d.1:

$$\sigma^* = -\frac{1}{K^*} = -0.143$$

Il corrispondente valore di ω^* è 2.45 mentre il margine di ampiezza è $M_a = \frac{1}{|\sigma^*|} = 7$.

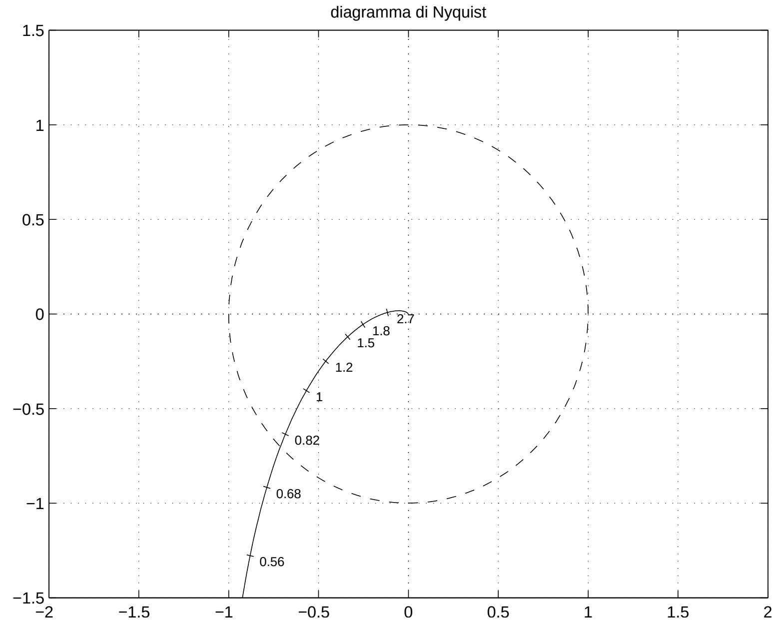
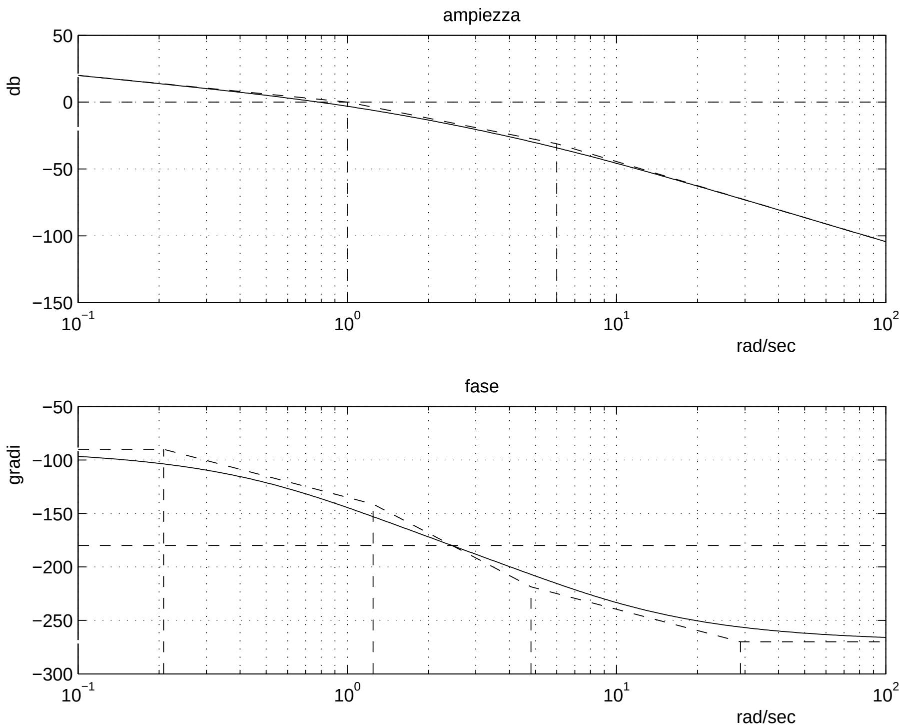


Figura 1: Diagramma di Nyquist della funzione $G(s)$ per $\omega \in [0,\ \infty]$.

e) Si faccia riferimento al sistema retroazionato dell'esercizio precedente e si ponga $K = 1$:

e.1) Tracciare qualitativamente i diagrammi di Bode delle ampiezze e della fasi del guadagno di anello $K\,G(s)$;



e.2) Fornire una stima della larghezza di banda del sistema retroazionato;

Soluzione: La banda passante del sistema può essere determinata dal punto di incrocio del diagramma di Bode delle ampiezze con l'asse 0 db. Una stima della banda passante del sistema è quindi $\omega_T = 1\,rad/s$.

e.3) Fornire una stima della risposta "a regime" $y_\infty(t)$ del sistema retroazionato quando il disturbo $d(t) = 0$ e in ingresso è presente il segnale $r(t) = 4 + 3\,\cos(200\,t)$.

Soluzione: Essendo il sistema retroazionato di tipo passa-basso ed essendo la pulsazione del segnale di ingresso $\omega_r >> \omega_T$, l'uscita risulta uguale alla componente a pulzazione nulla dell'ingresso, mentre la componente in alta frequenza viene praticamente annullata, percui $y(t) = 4$.

f) **Non è richiesto lo svolgimento di questo esercizio agli iscritti ad Ingegneria Ambientale.**

Si faccia riferimento al sistema descritto nell'esercizio d):

f.1) Tracciare qualitativamente il luogo delle radici del sistema retroazionato per valori positivi del parametro K. Determinare qualitativamente i punti di diramazione. Soluzione: vedi figura 4.

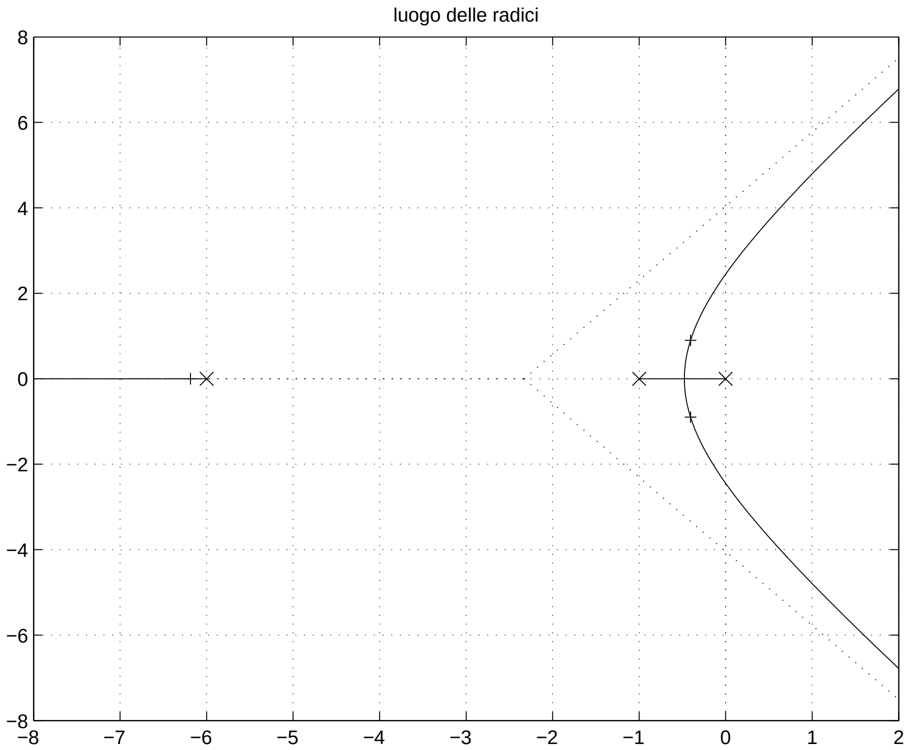


Figura 2: Luogo della radici di $G(s)$.

f.2) Determinare il centro degli asintoti, gli angoli che gli asintoti formano rispetto all'asse reale positivo, le intersezioni del luogo delle radici con l'asse immaginario e i corrispondenti valori del parametro K.

Soluzione:

$$\sigma = -2.333$$
$$\phi = 60,\ 180,\ 300$$
$$s^* = 2.45\, i$$
$$K^* = 7$$

Fondamenti di Controlli Automatici - A.A. 2006/07
20 Giugno 2007 - Domande Teoriche
Compito A Nr.

Nome:	
Nr. Mat.	
Firma:	

Per ciascuno dei test a soluzione multipla segnare con una crocetta tutte le affermazioni che si ritengono giuste.

1. La trasformata di Laplace del segnale $x(t) = t^2$ è:

   ○ $X(s) = \frac{1}{s^2}$;
   ○ $X(s) = \frac{2}{s^2}$;
   ○ $X(s) = \frac{1}{s^3}$;
   ⊗ $X(s) = \frac{2}{s^3}$.

2. Il diagramma di Nyquist della funzione $G(s) = \frac{s+1}{s+2}$ per $\omega \in [0, \infty]$:

   ⊗ è una semicirconferenza;
   ○ presenta un asintoto verticale;
   ⊗ si evolve tutta nel semipiano positivo;
   ○ ha guadagno statico unitario.

3. In base al principio del modello interno, affinchè un sistema retroazionato abbia errore a regime nullo quando in ingresso vi è un segnale la cui trasformata di Laplace ha 2 poli nell'origine, è necessario che nel guadagno d'anello:

   ○ sia presente almeno un polo nell'origine;
   ⊗ siano presenti almeno due poli nell'origine;
   ○ siano presenti almeno tre poli nell'origine.

4. Il sistema dinamico $\ddot{y} = -y\, e^{-t} + t^2\, x$ (dove x è l'ingresso, y è l'uscita e t è la variabile "tempo") è:

   ⊗ lineare;
   ○ non lineare;
   ○ stazionario;
   ⊗ non stazionario.

5. Due sistemi di tipo 0 asintoticamente stabili, aventi la stessa costante di posizione K_p, se vengono posti in retroazione negativa unitaria:

   ○ generano sistemi in retroazione stabili;
   ⊗ presentano lo stesso errore a regime con ingresso a gradino;
   ○ presentano un errore a regime nullo con ingresso a gradino;
   ○ presentano un errore a regime nullo con ingresso a rampa.

6. Determinare il tempo di assestamento del sistema $G(s) = \frac{1}{s+2}$;

$$T_a = \frac{3}{2}$$

7. Un sistema $G(s)$ asintoticamente stabile e a fase non minima:

   ○ ha almeno un polo a parte reale positiva;
   ⊗ ha almeno uno zero a parte reale positiva;
   ○ può avere sia poli che zeri a parte reale positiva.

8. Un sistema in retroazione negativa avente $G(s)$ sul ramo diretto, $H(s)$ sul ramo di retroazione e con elevato guadagno statico d'anello;

   ⊗ è poco sensibile alle variazioni parametriche di $G(s)$;
   ○ è poco sensibile alle variazioni parametriche di $H(s)$;
   ⊗ presenta una forte attenuazione dei disturbi costanti agenti sul sistema.

9. Nella costruzione della tabella di Routh, l'annullamento di tutti i coefficienti di una riga si può avere:

   ⊗ solo per righe dispari;
   ○ solo per righe pari;
   ○ sia per righe pari che per righe dispari;

10. Un sistema $G(s)$ a fase minima di tipo 1 e con grado relativo 2 presenta nel diagramma asintotico di Bode delle ampiezze:

   ⊗ una pendenza di $-20\, db/decade$ per $\omega \to 0$;
   ○ una pendenza di $-40\, db/decade$ per $\omega \to 0$;
   ○ una pendenza di $-20\, db/decade$ per $\omega \to \infty$;
   ⊗ una pendenza di $-40\, db/decade$ per $\omega \to \infty$.

11. Il valore iniziale per $t = 0^+$ della risposta all'impulso $g(t)$ del sistema $G(s) = \frac{2\,s+3}{2\,s^2+1}$ vale:

   ○ $g(0^+) = 0$;
   ⊗ $g(0^+) = 1$;
   ○ $g(0^+) = 2$.

12. La larghezza di banda ω_f del sistema $G(s) = \frac{\omega_n^2}{s^2+2\,\delta\,\omega_n+\omega_n^2}$:

   ⊗ è proporzionale a ω_n;
   ○ è proporzionale a δ;
   ○ è uguale a $\frac{3}{\delta\,\omega_n}$.

Non è richiesto lo svolgimento delle seguenti domande agli iscritti ad Ingegneria Ambientale.

13. Sia $1 + K\,G(s) = 0$ l'equazione caratteristica di un sistema retroazionato. Le radici triple del corrispondente luogo delle radici al variare del parametro K sono tutte e sole le soluzioni:

   ○ dell'equazione $\frac{d^2\,G(s)}{d\,s^2} = 0$;
   ○ del sistema di equazioni $1 + K\,G(s) = 0$, $\frac{d^2\,G(s)}{d\,s^2} = 0$;
   ⊗ del sistema di equazioni $1 + K\,G(s) = 0$, $\frac{d\,G(s)}{d\,s} = 0$, $\frac{d^2\,G(s)}{d\,s^2} = 0$.

14. Il luogo delle radici presenta almeno un asintoto verticale ($r = n - m > 0$ è il grado relativo):

   ⊗ quando $r = 2$ e K è positiva;
   ○ quando $r = 2$ e K è negativa;
   ○ quando $r = 4$ e K è positiva;
   ⊗ quando $r = 4$ e K è negativa.

Fondamenti di Controlli Automatici - A.A. 2006/07

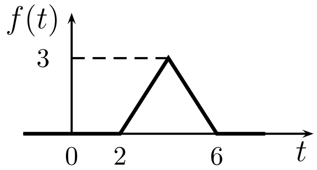
20 Giugno 2007 - Esercizi

Compito B Nr.

Nome:	
Nr. Mat.	
Firma:	

a) Determinare la trasformata di Laplace $X_i(s)$ dei seguenti segnali temporali $x_i(t)$:

$$x_1(t) = 4\,\sin(3\,t-6), \qquad x_2(t) = \tfrac{1}{3}\,t^2\,e^{2\,t} + 3\,\cos(6\,\pi\,t),$$



Soluzione:

$$X_1(s) = \frac{12\,e^{-2s}}{s^2+9}, \qquad X_2(s) = \frac{2}{3\,(s-2)^3} + \frac{3\,s}{s^2+36\,\pi^2}, \qquad X_3(s) = \frac{3}{2\,s^2}\left[e^{-2s} - 2\,e^{-4s} + e^{-6s}\right]$$

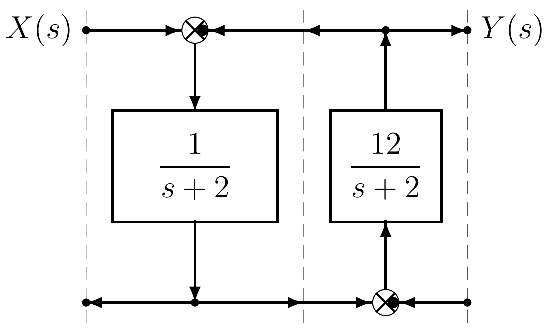
b) Calcolare la risposta impulsiva $g_i(t)$ delle seguenti funzioni di trasferimento $G_i(s)$:

$$G_1(s) = -\frac{2}{(s+4)^3}, \qquad G_2(s) = \frac{s+4}{(s-1)\,(s+2)\,(s+3)}, \qquad G_3(s) = \frac{4}{(s-3)\,(s+2)^2}$$

Soluzione:

$$g_1(t) = -t^2\,e^{-4\,t}, \qquad g_2(t) = \frac{5}{12}\,e^{t} - \frac{2}{3}\,e^{-2\,t} + \frac{1}{4}\,e^{-3\,t}, \qquad g_3(t) = \frac{4}{25}\,e^{3\,t} - \frac{4}{25}\,e^{-2\,t} - \frac{4}{5}\,t\,e^{-2\,t}$$

c) Lo schema a blocchi riportato a fianco rappresenta un sistema dinamico del secondo ordine.



c.1) Utilizzando la formula di Mason, calcolare la funzione di trasferimento $G(s)$ che lega l'ingresso $X(s)$ all'uscita $Y(s)$:

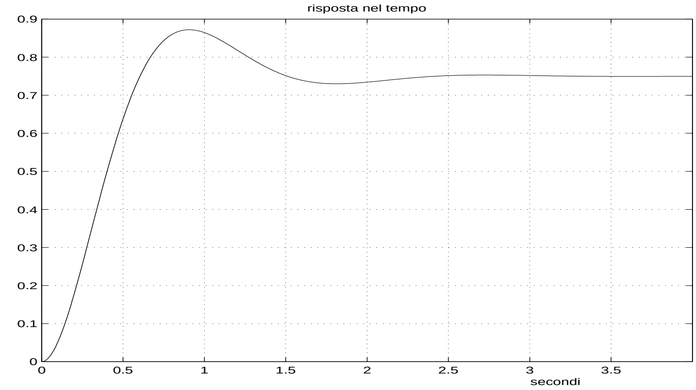
$$G(s) = \frac{Y(s)}{X(s)} = \frac{12}{s^2 + 4\,s + 16}$$

c.2) Relativamente alla funzione di trasferimento $G(s)$ calcolare: 1) la parte reale σ e 2) la parte immaginaria ω dei poli dominanti del sistema; 3) la pulsazione naturale ω_n e 4) il coefficiente di smorzamento $\delta <$ dei poli dominanti del sistema; 5) il guadagno statico K_0; 6) il tempo di assestamento T_a del sistema $G(s)$ alla risposta al gradino:

1) $\sigma = -2$ 3) $\omega_n = 4$ 5) $K_0 = 0.75$

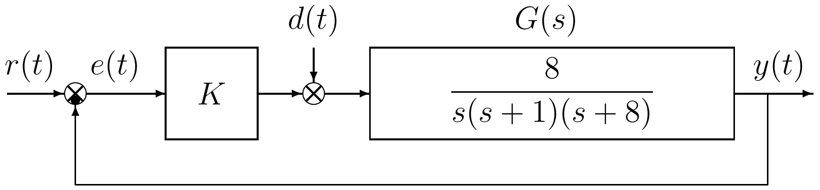
2) $\omega = 3.46$ 4) $\delta = 0.5$ 6) $T_a = 1.5$

c.3) Sul disegno a quadretti riportato a fianco disegnare l'andamento qualitativo della risposta $y(t)$ della funzione di trasferimento $G(s)$ al gradino in ingesso $x(t) = 3$.
Per quanto è possibile, disegnare l'andamento temporale in modo congruente con il valore dei parametri numerici determinati al punto c.2).



Risposta al gradino unitario.

d) Sia dato il seguente sistema retroazionato:



d.1) Determinare per quali valori del parametro K il sistema retroazionato è asintoticamente stabile.

Soluzione: l'equazione caratteristica del sistema retroazionato è

$$1+\frac{8\,K}{s\,(s+1)\,(s+8)}=0 \qquad \rightarrow \qquad s^3+9\,s^2+8\,s^2+8\,K=0$$

La corrispondente tabella di Routh è la seguente

$$\begin{array}{c|cc} 3 & 1 & 8 \\ 2 & 9 & 8\,K \\ 1 & 72-8\,K & \\ 0 & 8\,K & \end{array}$$

Dalla riga 1 e dalla riga 0 si ricavano i seguenti vincoli:

$$K>0, \qquad\qquad K<9$$

La pulsazione ω^* corrispondente al valore limite $K^*=9$ è:

$$\omega^*=\sqrt{8}=2.83$$

d.2) Posto $r(t)=0$, si determini il valore del parametro K tale da garantire che in presenza del disturbo costante $d(t)=d_0$, il valore a regime dell'uscita $y(t)$ sia $y_\infty=0.25\,d_0$.

<u>Soluzione</u>: Il valore a regime dell'uscita corrispondente all'applicazione del disturbo costante $d(t)=d_0$ è

$$y_\infty=\frac{G(0)\,d_0}{1+K\,G(0)}=\frac{d_0}{K}=0.25\,d_0$$

Il sistema $G(s)$è di tipo 1 e quindi il suo guadagno statico infinito $G(0)=\infty$. Il valore di uscita richiesto si ha per $K=4$.

d.3) Posto $d(t)=0$, calcolare, in funzione del parametro K, l'errore a regime $e_\infty(t)$ corrispondente all'applicazione del segnale di ingresso a rampa $r(t)=2\,t$.

<u>Soluzione</u>: L'errore a regime $e_\infty=\frac{2}{K_v}$ con $K_v=K$. Si ottiene quindi che:

$$e_\infty=\frac{2}{K}.$$

d.4) Posto $K=1$, disegnare qualitativamente il diagramma di Nyquist "completo" del guadagno d'anello $K\,G(s)$. Calcolare esattamente la posizione σ_a dell'asintoto verticale, le eventuali intersezioni σ_i^* con l'asse reale e i corrispondenti valori delle pulsazioni ω_i^*. Determinare inoltre il margine di ampiezza M_α.

<u>Soluzione</u>: Il diagramma di Nyquist della funzione $G(s)$ per $\omega\in[0,\ \infty]$ è mostrato in Fig. 3.

Il sistema é di tipo 1 per cui esiste un asintoto verticale in $K_\tau\,\Delta_a=-1.125$.

Esiste un'unica intersezione σ^* con l'asse reale. Tale intersezione si determina facilmente dall'analisi di Routh svolta al punto d.1:

$$\sigma^*=-\frac{1}{K^*}=-0.111$$

Il corrispondente valore di ω^* è 2.83 mentre il margine di ampiezza è $M_a=\frac{1}{|\sigma^*|}=9$.

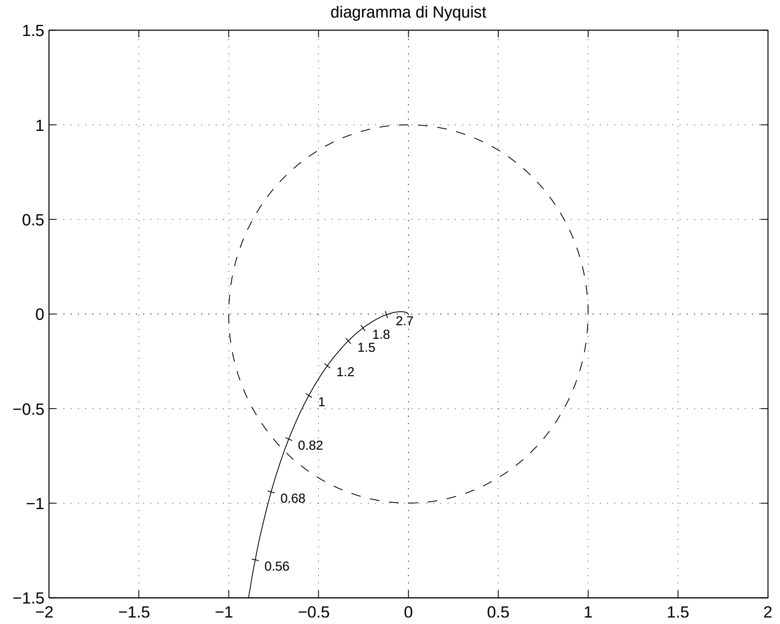
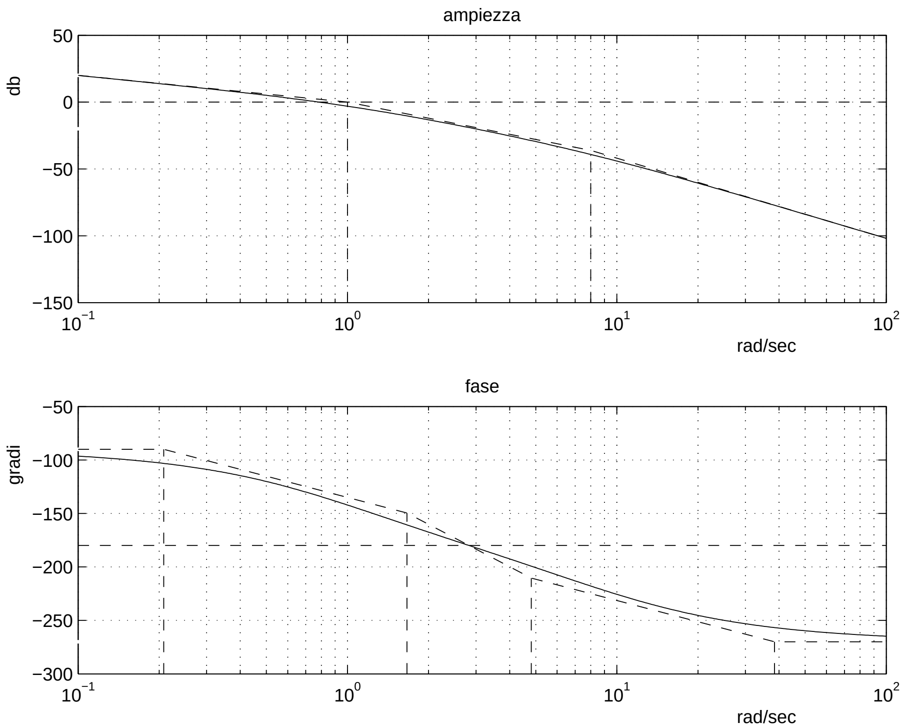


Figura 3: Diagramma di Nyquist della funzione $G(s)$ per $\omega \in [0,\ \infty]$.

e) Si faccia riferimento al sistema retroazionato dell'esercizio precedente e si ponga $K = 1$:

e.1) Tracciare qualitativamente i diagrammi di Bode delle ampiezze e della fasi del guadagno di anello $K\,G(s)$;



e.2) Fornire una stima della larghezza di banda del sistema retroazionato;

Soluzione: La banda passante del sistema può essere determinata dal punto di incrocio del diagramma di Bode delle ampiezze con l'asse 0 db. Una stima della banda passante del sistema è quindi $\omega_T = 1\,rad/s$.

e.3) Fornire una stima della risposta "a regime" $y_\infty(t)$ del sistema retroazionato quando il disturbo $d(t) = 0$ e in ingresso è presente il segnale $r(t) = 5 + \cos(300\,t)$.

Soluzione: Essendo il sistema retroazionato di tipo passa-basso ed essendo la pulsazione del segnale di ingresso $\omega_r >> \omega_T$, l'uscita risulta uguale alla componente a pulzazione nulla dell'ingresso, mentre la componente in alta frequenza viene praticamente annullata, percui $y(t) = 5$.

f) **Non è richiesto lo svolgimento di questo esercizio agli iscritti ad Ingegneria Ambientale.**

Si faccia riferimento al sistema descritto nell'esercizio d):

f.1) Tracciare qualitativamente il luogo delle radici del sistema retroazionato per valori positivi del parametro K. Determinare qualitativamente i punti di diramazione. Soluzione: vedi figura 4.

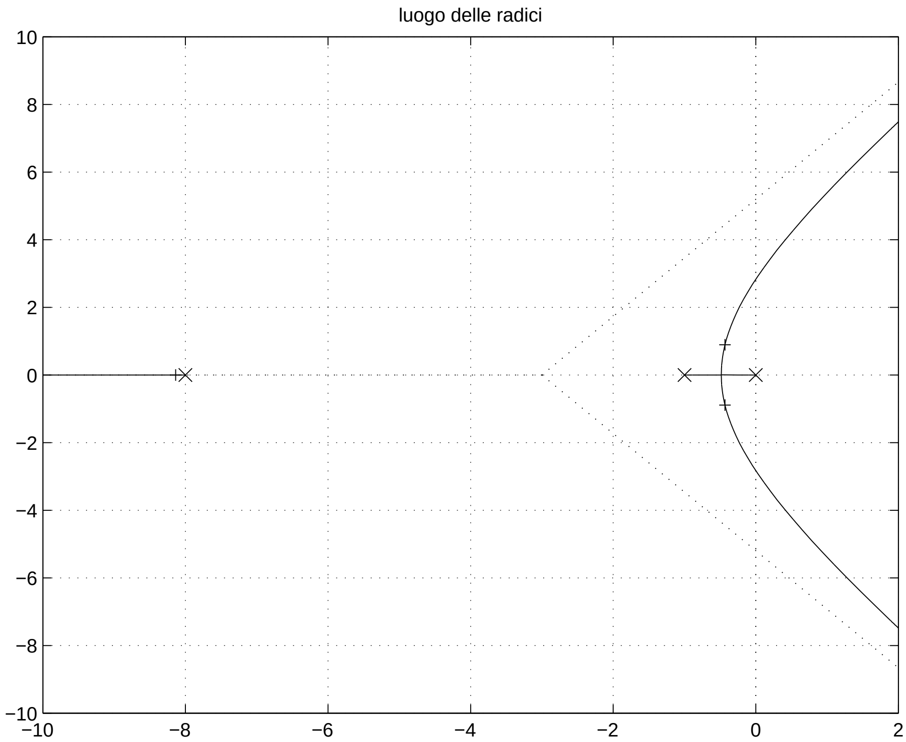


Figura 4: Luogo della radici di $G(s)$.

f.2) Determinare il centro degli asintoti, gli angoli che gli asintoti formano rispetto all'asse reale positivo, le intersezioni del luogo delle radici con l'asse immaginario e i corrispondenti valori del parametro K.

Soluzione:

$$\begin{gathered} \sigma = -3 \\ \phi = 60,\ 180,\ 300 \\ s^* = 2.83\, i \\ K^* = 9 \end{gathered}$$

Fondamenti di Controlli Automatici - A.A. 2006/07

20 Giugno 2007 - Domande Teoriche

Compito B Nr.

Nome:	
Nr. Mat.	
Firma:	

Per ciascuno dei test a soluzione multipla segnare con una crocetta tutte le affermazioni che si ritengono giuste.

1. La trasformata di Laplace del segnale $x(t) = t^2$ è:
   - ○ $X(s) = \frac{1}{s^3}$;
   - ⊗ $X(s) = \frac{2}{s^3}$;
   - ○ $X(s) = \frac{1}{s^2}$;
   - ○ $X(s) = \frac{2}{s^2}$.

2. Il diagramma di Nyquist della funzione $G(s) = \frac{s+1}{s+2}$ per $\omega \in [0, \infty]$:
   - ○ ha guadagno statico unitario;
   - ⊗ si evolve tutta nel semipiano positivo;
   - ○ presenta un asintoto verticale;
   - ⊗ è una semicirconferenza.

3. In base al principio del modello interno, affinchè un sistema retroazionato abbia errore a regime nullo quando in ingresso vi è un segnale la cui trasformata di Laplace ha 2 poli nell'origine, è necessario che nel guadagno d'anello:
   - ○ sia presente almeno un polo nell'origine;
   - ○ siano presenti almeno tre poli nell'origine;
   - ⊗ siano presenti almeno due poli nell'origine.

4. Il sistema dinamico $\ddot{y} = -y\, e^{-t} + t^2\, x$ (dove x è l'ingresso, y è l'uscita e t è la variabile "tempo") è:
   - ○ non lineare;
   - ⊗ lineare;
   - ⊗ non stazionario;
   - ○ stazionario.

5. Due sistemi di tipo 0 asintoticamente stabili, aventi la stessa costante di posizione K_p, se vengono posti in retroazione negativa unitaria:
   - ○ generano sistemi in retroazione stabili;
   - ○ presentano un errore a regime nullo con ingresso a rampa;
   - ○ presentano un errore a regime nullo con ingresso a gradino;
   - ⊗ presentano lo stesso errore a regime con ingresso a gradino.

6. Determinare il tempo di assestamento del sistema $G(s) = \frac{1}{s+10}$;

$$T_a = \frac{3}{10}$$

7. Un sistema $G(s)$ asintoticamente stabile e a fase non minima:
   - ○ può avere sia poli che zeri a parte reale positiva;
   - ○ ha almeno un polo a parte reale positiva;
   - ⊗ ha almeno uno zero a parte reale positiva.

8. Un sistema in retroazione negativa avente $G(s)$ sul ramo diretto, $H(s)$ sul ramo di retroazione e con elevato guadagno statico d'anello;

   ○ è poco sensibile alle variazioni parametriche di $H(s)$;
   ⊗ è poco sensibile alle variazioni parametriche di $G(s)$;
   ⊗ presenta una forte attenuazione dei disturbi costanti agenti sul sistema.

9. Nella costruzione della tabella di Routh, l'annullamento di tutti i coefficienti di una riga si può avere:

   ○ solo per righe pari;
   ⊗ solo per righe dispari;
   ○ sia per righe pari che per righe dispari;

10. Un sistema $G(s)$ a fase minima di tipo 1 e con grado relativo 2 presenta nel diagramma asintotico di Bode delle ampiezze:

    ○ una pendenza di $-40\, db/decade$ per $\omega \to 0$;
    ⊗ una pendenza di $-20\, db/decade$ per $\omega \to 0$;
    ⊗ una pendenza di $-40\, db/decade$ per $\omega \to \infty$;
    ○ una pendenza di $-20\, db/decade$ per $\omega \to \infty$.

11. Il valore iniziale per $t = 0^+$ della risposta all'impulso $g(t)$ del sistema $G(s) = \frac{4\,s+1}{s^2+2}$ vale:

    ○ $g(0^+) = 0$;
    ○ $g(0^+) = 1$;
    ⊗ $g(0^+) = 2$.

12. La larghezza di banda ω_f del sistema $G(s) = \frac{\omega_n^2}{s^2+2\,\delta\,\omega_n+\omega_n^2}$:

    ○ è proporzionale a δ;
    ⊗ è proporzionale a ω_n;
    ○ è uguale a $\frac{3}{\delta\,\omega_n}$.

Non è richiesto lo svolgimento delle seguenti domande agli iscritti ad Ingegneria Ambientale.

13. Sia $1 + K\,G(s) = 0$ l'equazione caratteristica di un sistema retroazionato. Le radici triple del corrispondente luogo delle radici al variare del parametro K sono tutte e sole le soluzioni:

    ⊗ del sistema di equazioni $1 + K\,G(s) = 0$, $\frac{d\,G(s)}{d\,s} = 0$, $\frac{d^2\,G(s)}{d\,s^2} = 0$;
    ○ del sistema di equazioni $1 + K\,G(s) = 0$, $\frac{d^2\,G(s)}{d\,s^2} = 0$;
    ○ dell'equazione $\frac{d^2\,G(s)}{d\,s^2} = 0$.

14. Il luogo delle radici presenta almeno un asintoto verticale ($r = n - m > 0$ è il grado relativo):

    ○ quando $r = 2$ e K è negativa;
    ⊗ quando $r = 2$ e K è positiva;
    ⊗ quando $r = 4$ e K è negativa;
    ○ quando $r = 4$ e K è positiva.