Fondamenti di Controlli Automatici - A.A. 2006/07

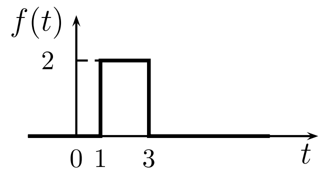
03 Aprile 2007 - Esercizi

Compito Nr.

Nome:	
Nr. Mat.	
Firma:	

a) Determinare la trasformata di Laplace $X_i(s)$ dei seguenti segnali temporali $x_i(t)$:

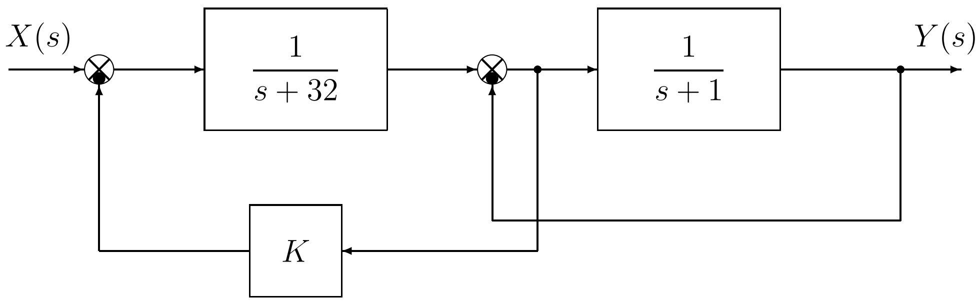
$$x_1(t) = \frac{1}{4}\, t^2\, e^{5\,t} + 2\cos(\pi\, t), \qquad x_2(t) = 2\,\sin(t)\, e^{-3\,t},$$



b) Calcolare la risposta impulsiva $g_i(t)$ delle seguenti funzioni di trasferimento $G_i(s)$:

$$G_1(s) = \frac{-2}{(s+1)\,(s-2)^2}, \qquad G_2(s) = \frac{2}{(s-4)^3}, \qquad G_3(s) = \frac{s+1}{(s+2)\,(s-3)\,(s+4)}$$

c) Si consideri il seguente schema a blocchi:



c.1) Posto $K = -28$, utilizzando la formula di Mason calcolare la funzione di trasferimento $G(s)$ che lega l'ingresso $X(s)$ all'uscita $Y(s)$:

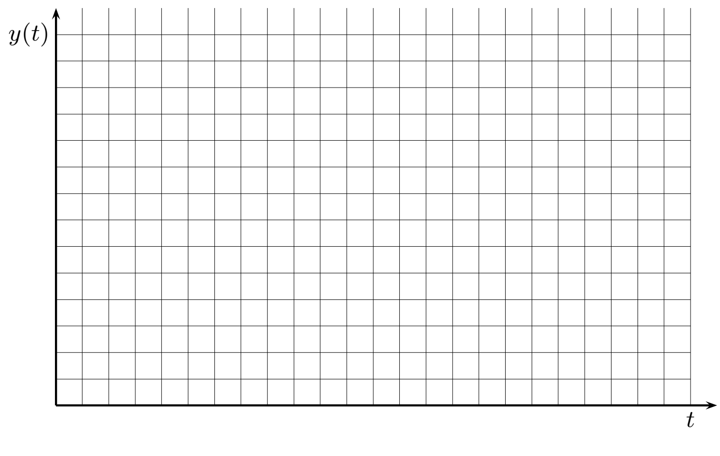
$$G(s) = \frac{Y(s)}{X(s)} =$$

c.2) Relativamente alla funzione di trasferimento $G(s)$ calcolare: 1) la parte reale σ e 2) la parte immaginaria ω dei poli dominanti del sistema; 3) la pulsazione naturale ω_n e 4) il coefficiente di smorzamento δ dei poli dominanti del sistema; 5) il guadagno statico K_0; 6) il tempo di assestamento T_a del sistema $G(s)$ alla risposta al gradino:

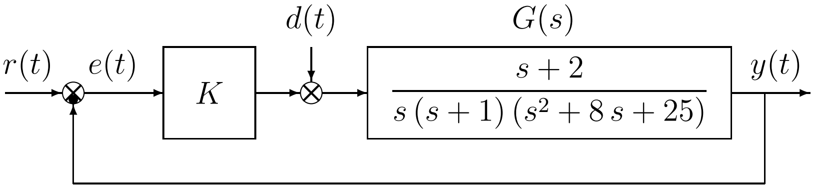
1) $\sigma = \ldots\ldots$ 3) $\omega_n = \ldots\ldots$ 5) $K_0 = \ldots\ldots$

2) $\omega = \ldots\ldots$ 4) $\delta = \ldots\ldots$ 6) $T_a = \ldots\ldots$

c.3) Sul disegno a quadretti riportato a fianco disegnare l'andamento qualitativo della risposta $y(t)$ della funzione di trasferimento $G(s)$ al gradino in ingesso $x(t) = 9$.
Per quanto è possibile, disegnare l'andamento temporale in modo congruente con il valore dei parametri numerici determinati al punto c.2).



d) Sia dato il seguente sistema retroazionato:



d.1) Determinare per quali valori del parametro K il sistema retroazionato è asintoticamente stabile.

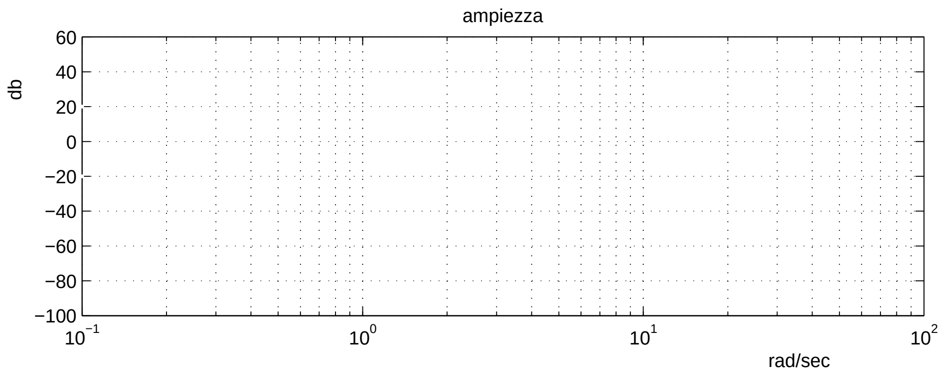
d.2) Posto $r(t) = 0$, si determini il valore del parametro K tale da garantire che in presenza del disturbo costante $d(t) = d_0$, il valore a regime dell'uscita $y(t)$ sia $y_\infty = 0.01\, d_0$.

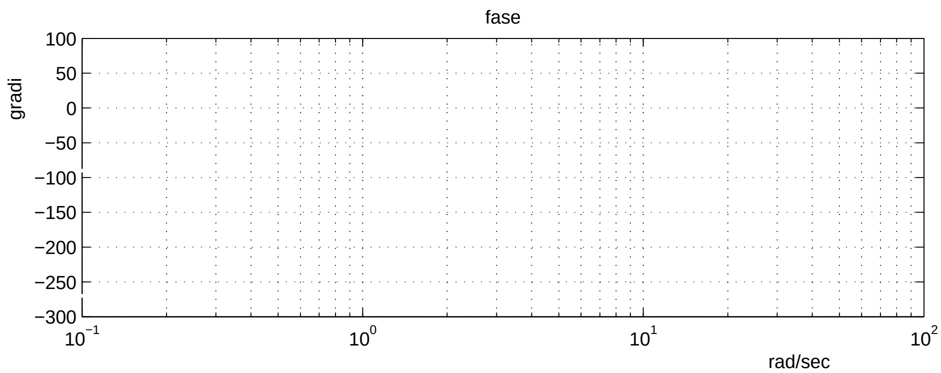
d.3) Posto $d(t) = 0$, calcolare, in funzione del parametro K, l'errore a regime $e_\infty(t)$ corrispondente all'applicazione del segnale di ingresso a rampa $r(t) = 3\,t$.

d.4) Posto $K = 100$, disegnare qualitativamente il diagramma di Nyquist "completo" del guadagno d'anello $K\,G(s)$. Calcolare esattamente la posizione σ_a dell'asintoto verticale, le eventuali intersezioni σ_i^* con l'asse reale e i corrispondenti valori delle pulsazioni ω_i^*. Determinare inoltre il margine di ampiezza M_α.

e) Si faccia riferimento al sistema retroazionato dell'esercizio precedente e si ponga $K = 100$:

e.1) Tracciare qualitativamente i diagrammi di Bode delle ampiezze e della fasi del guadagno di anello $K\,G(s)$;





e.2) Fornire una stima della larghezza di banda del sistema retroazionato;

e.3) Fornire una stima della risposta "a regime" $y_\infty(t)$ del sistema retroazionato quando il disturbo $d(t) = 0$ e in ingresso è presente il segnale $r(t) = 4 + 3\,\cos(0.02\,t)$.

f) **Non è richiesto lo svolgimento di questo esercizio agli iscritti ad Ingegneria Ambientale.**

Si faccia riferimento al sistema descritto nell'esercizio d):

f.1) Tracciare qualitativamente il luogo delle radici del sistema retroazionato per valori positivi del parametro K. Determinare qualitativamente i punti di diramazione.

f.2) Determinare il centro degli asintoti, gli angoli che gli asintoti formano rispetto all'asse reale positivo, le intersezioni del luogo delle radici con l'asse immaginario e i corrispondenti valori del parametro K.

Fondamenti di Controlli Automatici - A.A. 2006/07

03 Aprile 2007 - Domande Teoriche

Compito Nr.

Nome:	
Nr. Mat.	
Firma:	

Per ciascuno dei test a soluzione multipla segnare con una crocetta tutte le affermazioni che si ritengono giuste.

1. Per $\omega \in [-\infty, \infty]$, il diagramma di Nyquist "completo" di un sistema $G(s)$ di tipo 2 deve essere chiuso all'infinito:

   ◯ con una semicirconferenza percorsa in senso orario;
   ◯ con una semicirconferenza percorsa in senso antiorario;
   ◯ con una circonferenza percorsa in senso orario;
   ◯ con una circonferenza percorsa in senso antiorario.

2. Fornire una stima del tempo di assestamento (al 5% del valore finale) del sistema $G(s) = \frac{10}{3s+1}$ chiuso in retroazione negativa con guadagno $K = 10$:

$$T_a =$$

3. Per $\omega > 0$, il diagramma di Bode reale delle fasi della funzione $G(s) = \frac{1}{1+\tau s}$ coincide con il diagramma "asintotico" di Bode:

   ◯ in nessun punto al finito;
   ◯ in un solo punto al finito $\omega_n = 1/\tau$;
   ◯ nei tre punti al finito $\omega_n = 1/\tau$, $\omega_a = \omega_n/4.81$, $\omega_b = 4.81\,\omega_n$.

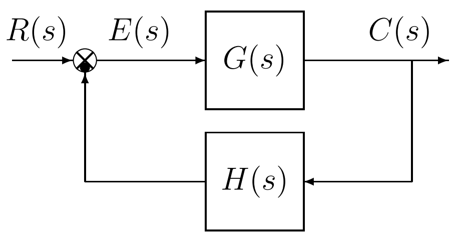
4. Il teorema del valore iniziale applicato alla funzione $F(s) = \mathcal{L}[f(t)]$ afferma che:

$$\lim_{t \to 0^+} f(t) =$$

5. Dato il sistema lineare $G(s) = \frac{s+1}{(s+3)(s+6)}$, il valore finale ($T \to \infty$) della risposta $h(t)$ ad un gradino di ampiezza 2 vale;

   ◯ $h(\infty) = 0$
   ◯ $h(\infty) = 2$
   ◯ $h(\infty) = \frac{1}{9}$
   ◯ $h(\infty) = \infty$

6. Si consideri il sistema retroazionato riportato di fianco. Scrivere il legame che lega la variazione relativa del sistema $H(s)$ alla variazione relativa del sistema retroazionato $G_0(s)$ quando varia un parametro β interno alla funzione di trasferimento $H(s)$:



$$\frac{\Delta G_0(s)}{G_0(s)} = \qquad\qquad \frac{\Delta H(s)}{H(s)}$$

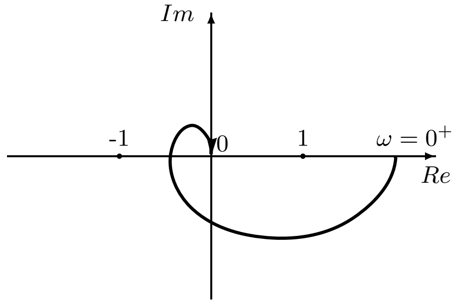
7. Il margine di ampiezza M_A del sistema $G(s) = \frac{1}{(1+\tau_1 s)(1+\tau_2 s)(1+\tau_3 s)}$ con $\tau_1 > 0$, $\tau_2 > 0$, $\tau_3 > 0$ è;

   ◯ sempre maggiore di 1;
   ◯ sempre minore di 1;
   ◯ può essere unitario.

8. Scrivere la funzione di trasferimento $G(s)$ corrispondente alla seguente equazione differenziale:

$$3\,\ddot{y}(t)+2\dot{y}(t)+4\,y(t) = 2\,\ddot{x}(t)+3\,\dot{x}(t)+4\,x(t) \qquad \rightarrow \qquad G(s) = \frac{Y(s)}{X(s)} =$$

9. Dato il seguente diagramma di Nyquist di una funzione $G(s)$ con tutti i poli a parte reale negativa, disegnate il diagramma polare completo.



Utilizzando il criterio di Nyquist è possibile affermare che il sistema retroazionato $K\,G(s)$ è asintoticamente stabile per i seguenti valori di K:

- ○ $K_1^* < K < K_2^*$, $K_1^* > -1$, $K_2^* > 1$;
- ○ $K_1^* < K < K_2^*$, $K_1^* < -1$, $K_2^* > 1$;
- ○ $K_1^* < K < K_2^*$, $K_1^* > -1$, $K_2^* < 1$;
- ○ $K_1^* < K < K_2^*$, $K_1^* < -1$, $K_2^* < 1$;

10. Il margine di fase del sistema $G(s) = 1/s$:

- ○ è $-\frac{\pi}{2}$;
- ○ è $\frac{\pi}{2}$;
- ○ è nullo;
- ○ non è definibile.

11. Il segnale $x(t) = 3\,\sin(6\,t)$ viene posto in ingresso ad un sistema descritto dalla funzione di trasferimento $G(s) = \frac{1}{s+8}$. L'ampiezza A del segnale d'uscita vale:

$$A =$$

12. In un sistema del secondo ordine a poli complessi coniugati, il tempo di assestamento T_a rimane costante al variare della posizione dei poli:

- ○ su di una retta parallela all'asse immaginario;
- ○ su di una circonferenza con centro nell'origine;
- ○ su due semirette uscenti dall'origine;
- ○ su di un'ellisse con fuoco nell'origine.

Non è richiesto lo svolgimento delle seguenti domande agli iscritti ad Ingegneria Ambientale.

13. In un sistema con $K_\tau > 0$, per valori del guadagno di retroazione $K > 0$ un punto dell'asse reale appartiene al luogo delle radici se lascia alla sua destra:

- ○ un numero totale dispari di poli;
- ○ un numero totale pari di poli;
- ○ un numero totale dispari di zeri e poli;
- ○ un numero totale pari di zeri e poli.

14. Il metodo del contorno delle radici studia le curve descritte dalle radici dell'equazione caratteristica al variare:

- ○ di un qualunque parametro che compare nell'equazione caratteristica;
- ○ di un qualunque parametro che entra linearmente nell'equazione caratteristica;
- ○ delle sole costanti di tempo relative ad un polo o ad uno zero.

Fondamenti di Controlli Automatici - A.A. 2006/07

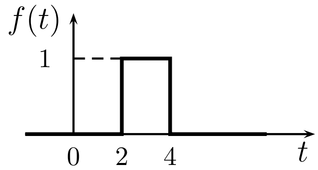
03 Aprile 2007 - Esercizi

Compito Nr.

Nome:	
Nr. Mat.	
Firma:	

a) Determinare la trasformata di Laplace $X_i(s)$ dei seguenti segnali temporali $x_i(t)$:

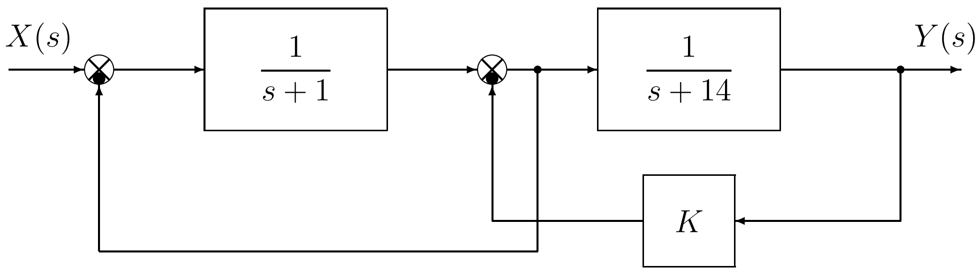
$$x_1(t) = 2\,\sin(5\,t)e^{-t}, \qquad x_2(t) = \tfrac{1}{3}\,t^2\,e^{2\,t} + \cos(2\,\pi\,t),$$



b) Calcolare la risposta impulsiva $g_i(t)$ delle seguenti funzioni di trasferimento $G_i(s)$:

$$G_1(s) = -\frac{3}{(s+2)^3}, \qquad G_2(s) = \frac{s+2}{(s-2)\,(s+3)\,(s+4)}, \qquad G_3(s) = \frac{1}{(s-2)\,(s+1)^2}$$

c) Si consideri il seguente schema a blocchi:



c.1) Posto $K = -12$, utilizzando la formula di Mason calcolare la funzione di trasferimento $G(s)$ che lega l'ingresso $X(s)$ all'uscita $Y(s)$:

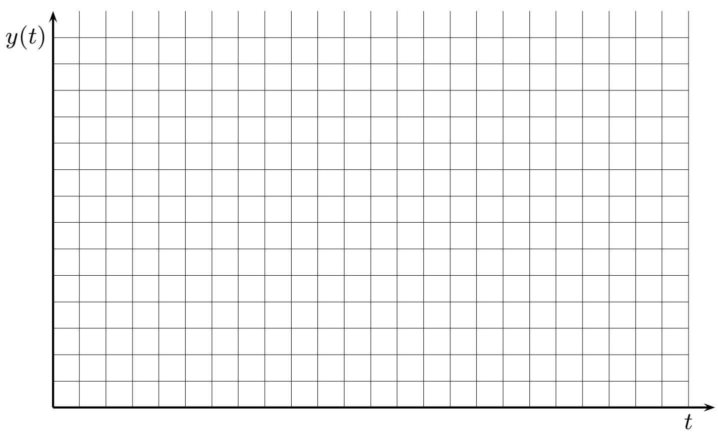
$$G(s) = \frac{Y(s)}{X(s)} =$$

c.2) Relativamente alla funzione di trasferimento $G(s)$ calcolare: 1) la parte reale σ e 2) la parte immaginaria ω dei poli dominanti del sistema; 3) la pulsazione naturale ω_n e 4) il coefficiente di smorzamento δ dei poli dominanti del sistema; 5) il guadagno statico K_0; 6) il tempo di assestamento T_a del sistema $G(s)$ alla risposta al gradino:

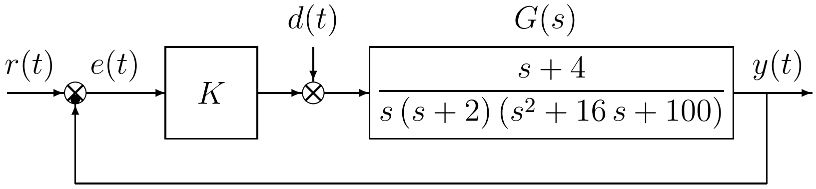
1) $\sigma = \ldots\ldots$ 3) $\omega_n = \ldots\ldots$ 5) $K_0 = \ldots\ldots$

2) $\omega = \ldots\ldots$ 4) $\delta = \ldots\ldots$ 6) $T_a = \ldots\ldots$

c.3) Sul disegno a quadretti riportato a fianco disegnare l'andamento qualitativo della risposta $y(t)$ della funzione di trasferimento $G(s)$ al gradino in ingesso $x(t) = 8$.
Per quanto è possibile, disegnare l'andamento temporale in modo congruente con il valore dei parametri numerici determinati al punto c.2).



d) Sia dato il seguente sistema retroazionato:



d.1) Determinare per quali valori del parametro K il sistema retroazionato è asintoticamente stabile.

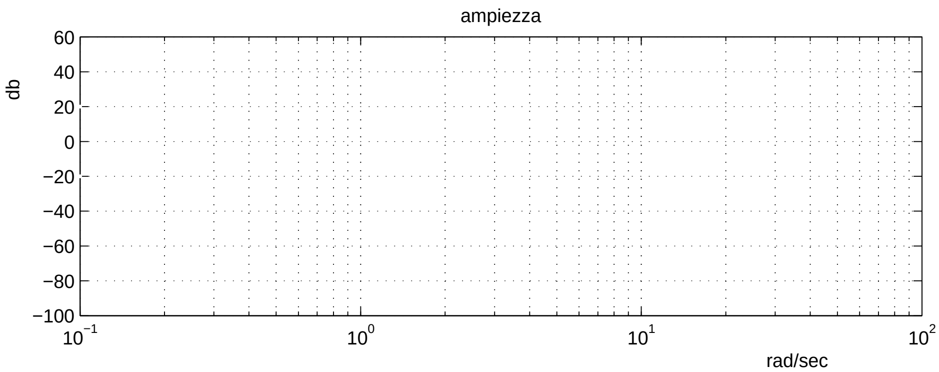
d.2) Posto $r(t) = 0$, si determini il valore del parametro K tale da garantire che in presenza del disturbo costante $d(t) = d_0$, il valore a regime dell'uscita $y(t)$ sia $y_\infty = 0.02\, d_0$.

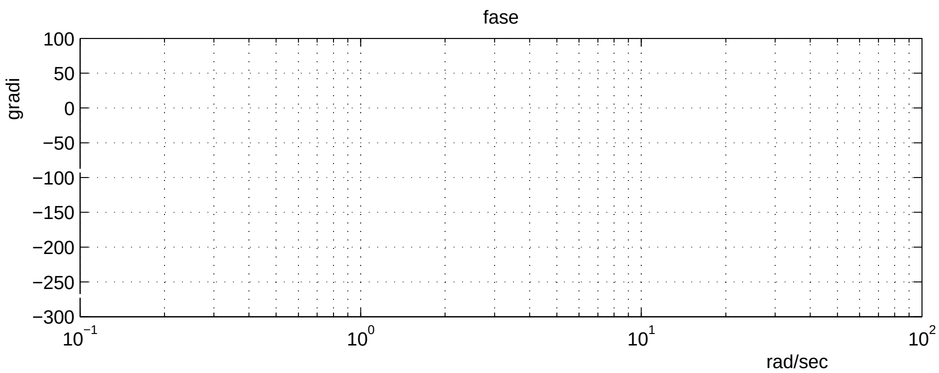
d.3) Posto $d(t) = 0$, calcolare, in funzione del parametro K, l'errore a regime $e_\infty(t)$ corrispondente all'applicazione del segnale di ingresso a rampa $r(t) = 2\,t$.

d.4) Posto $K = 100$, disegnare qualitativamente il diagramma di Nyquist "completo" del guadagno d'anello $K\,G(s)$. Calcolare esattamente la posizione σ_a dell'asintoto verticale, le eventuali intersezioni σ_i^* con l'asse reale e i corrispondenti valori delle pulsazioni ω_i^*. Determinare inoltre il margine di ampiezza M_α.

e) Si faccia riferimento al sistema retroazionato dell'esercizio precedente e si ponga $K = 100$:

e.1) Tracciare qualitativamente i diagrammi di Bode delle ampiezze e della fasi del guadagno di anello $K\,G(s)$;





e.2) Fornire una stima della larghezza di banda del sistema retroazionato;

e.3) Fornire una stima della risposta "a regime" $y_\infty(t)$ del sistema retroazionato quando il disturbo $d(t) = 0$ e in ingresso è presente il segnale $r(t) = 5 + \cos(0.01\,t)$.

f) **Non è richiesto lo svolgimento di questo esercizio agli iscritti ad Ingegneria Ambientale.**

Si faccia riferimento al sistema descritto nell'esercizio d):

f.1) Tracciare qualitativamente il luogo delle radici del sistema retroazionato per valori positivi del parametro K. Determinare qualitativamente i punti di diramazione.

f.2) Determinare il centro degli asintoti, gli angoli che gli asintoti formano rispetto all'asse reale positivo, le intersezioni del luogo delle radici con l'asse immaginario e i corrispondenti valori del parametro K.

Fondamenti di Controlli Automatici - A.A. 2006/07

03 Aprile 2007 - Domande Teoriche

Compito Nr.

Nome:	
Nr. Mat.	
Firma:	

Per ciascuno dei test a soluzione multipla segnare con una crocetta tutte le affermazioni che si ritengono giuste.

1. Per $\omega \in [-\infty, \infty]$, il diagramma di Nyquist "completo" di un sistema $G(s)$ di tipo 2 deve essere chiuso all'infinito:

   ◯ con una circonferenza percorsa in senso antiorario;
   ◯ con una circonferenza percorsa in senso orario;
   ◯ con una semicirconferenza percorsa in senso antiorario;
   ◯ con una semicirconferenza percorsa in senso orario.

2. Fornire una stima del tempo di assestamento (al 5% del valore finale) del sistema $G(s) = \frac{1}{6s+1}$ chiuso in retroazione negativa con guadagno $K = 100$:

$$T_a =$$

3. Per $\omega > 0$, il diagramma di Bode reale delle fasi della funzione $G(s) = \frac{1}{1+\tau s}$ coincide con il diagramma "asintotico" di Bode:

   ◯ nei tre punti al finito $\omega_n = 1/\tau$, $\omega_a = \omega_n/4.81$, $\omega_b = 4.81\,\omega_n$.
   ◯ in nessun punto al finito;
   ◯ in un solo punto al finito $\omega_n = 1/\tau$;

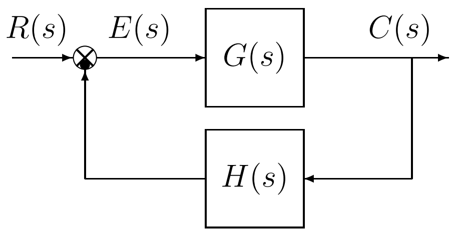
4. Il teorema del valore finale applicato alla funzione $F(s) = \mathcal{L}[f(t)]$ afferma che:

$$\lim_{t\to\infty} f(t) =$$

5. Dato il sistema lineare $G(s) = \frac{s+2}{(s+3)(s+4)}$, il valore finale ($T \to \infty$) della risposta $h(t)$ ad un gradino di ampiezza 2 vale;

   ◯ $h(\infty) = \infty$
   ◯ $h(\infty) = \frac{1}{3}$
   ◯ $h(\infty) = 1$
   ◯ $h(\infty) = 0$

6. Si consideri il sistema retroazionato riportato di fianco. Scrivere il legame che lega la variazione relativa del sistema $G(s)$ alla variazione relativa del sistema retroazionato $G_0(s)$ quando varia un parametro α interno alla funzione di trasferimento $G(s)$:



$$\frac{\Delta G_0(s)}{G_0(s)} = \qquad\qquad \frac{\Delta G(s)}{G(s)}$$

7. Il margine di ampiezza M_A del sistema $G(s) = \frac{1}{(1+\tau_1 s)(1+\tau_2 s)(1+\tau_3 s)}$ con $\tau_1 > 0$, $\tau_2 > 0$, $\tau_3 > 0$ è;

   ◯ sempre minore di 1;
   ◯ sempre maggiore di 1;
   ◯ può essere unitario.

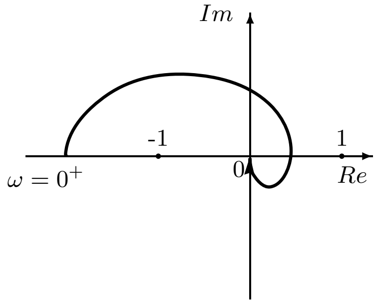
8. Scrivere la funzione di trasferimento $G(s)$ corrispondente alla seguente equazione differenziale:

$$2\,\ddot{x}(t){+}4\,\dot{x}(t){+}x(t) = \ddot{u}(t){+}2\,\dot{u}(t){+}3\,u(t) \qquad \rightarrow \qquad G(s) = \frac{X(s)}{U(s)} =$$

9. Dato il seguente diagramma di Nyquist di una funzione $G(s)$ con tutti i poli a parte reale negativa, disegnate il diagramma polare completo.

   Utilizzando il criterio di Nyquist è possibile affermare che il sistema retroazionato $K\,G(s)$ è asintoticamente stabile per i seguenti valori di K:

   ◯ $K_1^* < K < K_2^*$, $K_1^* > -1$, $K_2^* > 1$;
   ◯ $K_1^* < K < K_2^*$, $K_1^* < -1$, $K_2^* > 1$;
   ◯ $K_1^* < K < K_2^*$, $K_1^* > -1$, $K_2^* < 1$;
   ◯ $K_1^* < K < K_2^*$, $K_1^* < -1$, $K_2^* < 1$;



10. Il margine di fase del sistema $G(s) = 1/s$:

    ◯ è nullo;
    ◯ è $-\frac{\pi}{2}$;
    ◯ è $\frac{\pi}{2}$;
    ◯ non è definibile.

11. Il segnale $x(t) = 2\,\sin(3\,t)$ viene posto in ingresso ad un sistema descritto dalla funzione di trasferimento $G(s) = \frac{1}{s+4}$. L'ampiezza A del segnale d'uscita vale:

$$A =$$

12. In un sistema del secondo ordine a poli complessi coniugati, il tempo di assestamento T_a rimane costante al variare della posizione dei poli:

    ◯ su di una circonferenza con centro nell'origine;
    ◯ su due semirette uscenti dall'origine;
    ◯ su di una retta parallela all'asse immaginario;
    ◯ su di un'ellisse con fuoco nell'origine.

Non è richiesto lo svolgimento delle seguenti domande agli iscritti ad Ingegneria Ambientale.

13. In un sistema con $K_\tau > 0$, per valori del guadagno di retroazione $K > 0$ un punto dell'asse reale appartiene al luogo delle radici se lascia alla sua destra:

    ◯ un numero totale dispari di zeri e poli;
    ◯ un numero totale pari di zeri e poli.
    ◯ un numero totale dispari di poli;
    ◯ un numero totale pari di poli;

14. Il metodo del contorno delle radici studia le curve descritte dalle radici dell'equazione caratteristica al variare:

    ◯ di un qualunque parametro che entra linearmente nell'equazione caratteristica;
    ◯ di un qualunque parametro che compare nell'equazione caratteristica;
    ◯ delle sole costanti di tempo relative ad un polo o ad uno zero.

Fondamenti di Controlli Automatici - A.A. 2006/07

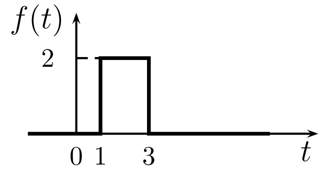
03 Aprile 2007 - Esercizi

Compito A Nr.

Nome:	
Nr. Mat.	
Firma:	

a) Determinare la trasformata di Laplace $X_i(s)$ dei seguenti segnali temporali $x_i(t)$:

$$x_1(t) = \tfrac{1}{4}\, t^2\, e^{5\,t} + 2\cos(\pi\, t), \qquad x_2(t) = 2\, \sin(t)\, e^{-3\,t},$$



Soluzione:

$$X_1(s) = \frac{1}{2(s-5)^3} + \frac{2\,s}{s^2+\pi^2}, \qquad X_2(s) = \frac{2}{(s+3)^2+1}, \qquad X_3(s) = \frac{2}{s}\left[e^{-s} - e^{-3s}\right]$$

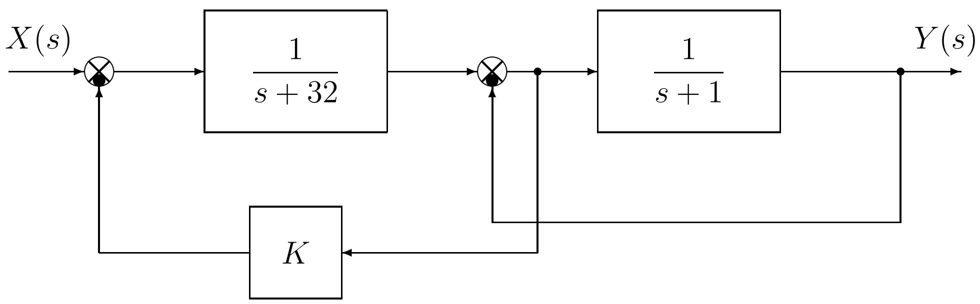
b) Calcolare la risposta impulsiva $g_i(t)$ delle seguenti funzioni di trasferimento $G_i(s)$:

$$G_1(s) = \frac{-2}{(s+1)\,(s-2)^2}, \qquad G_2(s) = \frac{2}{(s-4)^3}, \qquad G_3(s) = \frac{s+1}{(s+2)\,(s-3)\,(s+4)}$$

Soluzione:

$$g_1(t) = -\frac{2}{9}\, e^{t} + \frac{2}{9}\, e^{-2\,t} - \frac{2}{3}\, t\, e^{-2\,t}, \qquad g_2(t) = t^2\, e^{4\,t}, \qquad g_3(t) = \frac{1}{10}\, e^{-2\,t} + \frac{4}{35}\, e^{3\,t} - \frac{3}{14}\, e^{-4\,t}$$

c) Si consideri il seguente schema a blocchi:



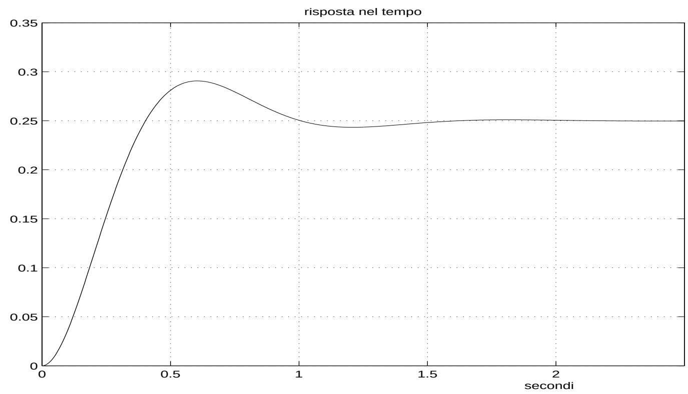
c.1) Posto $K = -28$, utilizzando la formula di Mason calcolare la funzione di trasferimento $G(s)$ che lega l'ingresso $X(s)$ all'uscita $Y(s)$:

$$G(s) = \frac{Y(s)}{X(s)} = \frac{1}{s^2 + 6\,s + 36}$$

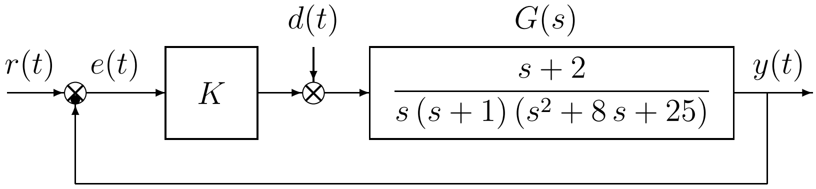
c.2) Relativamente alla funzione di trasferimento $G(s)$ calcolare: 1) la parte reale σ e 2) la parte immaginaria ω dei poli dominanti del sistema; 3) la pulsazione naturale ω_n e 4) il coefficiente di smorzamento δ dei poli dominanti del sistema; 5) il guadagno statico K_0; 6) il tempo di assestamento T_a del sistema $G(s)$ alla risposta al gradino:

1) $\sigma = -3$	3) $\omega_n = 6$	5) $K_0 = \frac{1}{36}$
2) $\omega = 5.2$	4) $\delta = 0.5$	6) $T_a = 1$

c.3) Sul disegno a quadretti riportato a fianco disegnare l'andamento qualitativo della risposta $y(t)$ della funzione di trasferimento $G(s)$ al gradino in ingesso $x(t) = 9$.
Per quanto è possibile, disegnare l'andamento temporale in modo congruente con il valore dei parametri numerici determinati al punto c.2).



d) Sia dato il seguente sistema retroazionato:



d.1) Determinare per quali valori del parametro K il sistema retroazionato è asintoticamente stabile.

Soluzione: l'equazione caratteristica del sistema retroazionato è

$$1 + \frac{K\,(s+2)}{s\,(s+1)\,(s^2+8\,s+25)} = 0 \qquad \rightarrow \qquad s^4 + 9\,s^3 + 33\,s^2 + (25+K)\,s + 2\,K = 0$$

La corrispondente tabella di Routh è la seguente

4	1	33	$2\,K$
3	9	$25+K$	
2	$272-K$	$18\,K$	
1	$(272-K)(25+K)-162\,K$		
0	$18\,K$		

Dalla riga 2 e dalla riga 0 si ricavano i seguenti vincoli:

$$K > 0, \qquad\qquad K < 135.3$$

La pulsazione ω^* corrispondente al valore limite $K^* = 135.3$ è:

$$\omega^* = \sqrt{\frac{25+K^*}{9}} = 4.22$$

d.2) Posto $r(t) = 0$, si determini il valore del parametro K tale da garantire che in presenza del disturbo costante $d(t) = d_0$, il valore a regime dell'uscita $y(t)$ sia $y_\infty = 0.01\,d_0$.

Soluzione: Il valore a regime dell'uscita corrispondente all'applicazione del disturbo costante $d(t) = d_0$ è

$$y_\infty = \frac{G(0)\,d_0}{1+K\,G(0)} = \frac{d_0}{K} = 0.01\,d_0$$

Il sistema $G(s)$è di tipo 1 e quindi il suo guadagno statico infinito $G(0) = \infty$. Il valore di uscita richiesto si ha per $K = 100$.

d.3) Posto $d(t) = 0$, calcolare, in funzione del parametro K, l'errore a regime $e_\infty(t)$ corrispondente all'applicazione del segnale di ingresso a rampa $r(t) = 3\,t$.

Soluzione: L'errore a regime $e_\infty = \frac{3}{K_v}$ con $K_v = \frac{2\,K}{25}$. Si ottiene quindi che:

$$e_\infty = \frac{75}{2\,K}.$$

d.4) Posto $K = 100$, disegnare qualitativamente il diagramma di Nyquist "completo" del guadagno d'anello $K\,G(s)$. Calcolare esattamente la posizione σ_a dell'asintoto verticale, le eventuali intersezioni σ_i^* con l'asse reale e i corrispondenti valori delle pulsazioni ω_i^*. Determinare inoltre il margine di ampiezza M_α.

Soluzione: Il diagramma di Nyquist della funzione $G(s)$ per $\omega \in [0,\ \infty]$ è mostrato in Fig. 1.

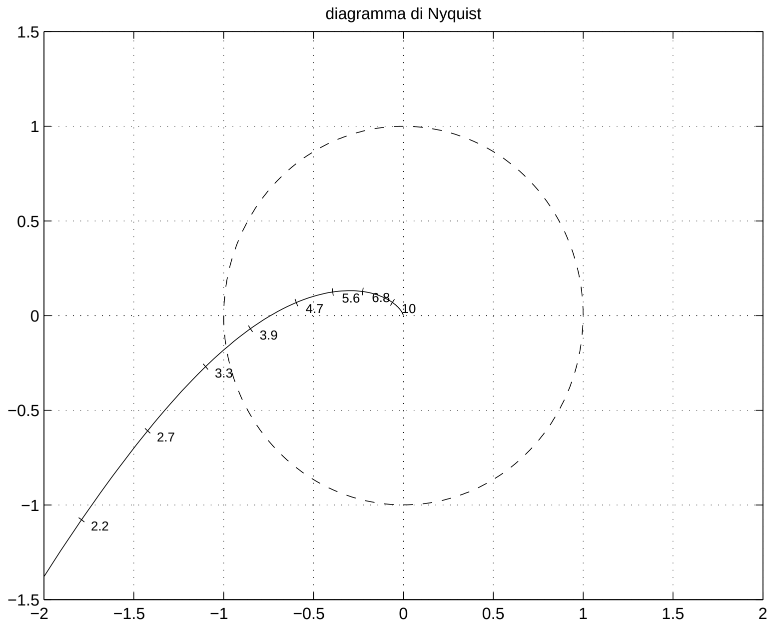


Figura 1: Diagramma di Nyquist della funzione $G(s)$ per $\omega \in [0,\ \infty]$.

Il sistema é di tipo 1 per cui esiste un asintoto verticale in $K_\tau\,\Delta_a = -6.56$.

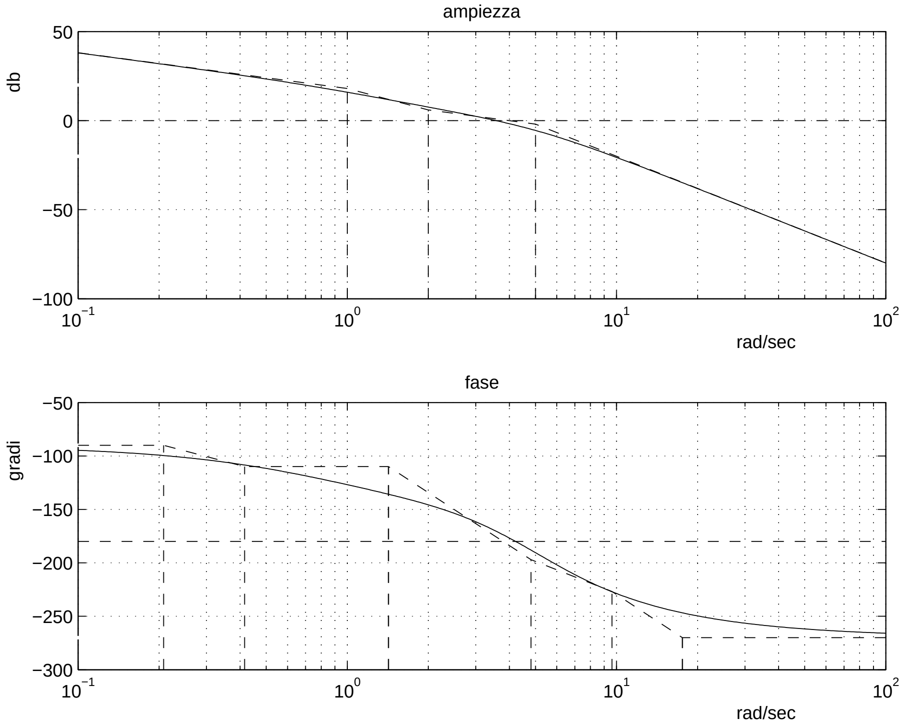
Esiste un'unica intersezione σ^* con l'asse reale. Tale intersezione si determina facilmente dall'analisi di Routh svolta al punto d.1:

$$\sigma^* = -\frac{1}{K^*} = -0.74$$

Il corrispondente valore di ω^* è 4.22 mentre il margine di ampiezza è $M_a = \frac{1}{|\sigma^*|} = 1.35$.

e) Si faccia riferimento al sistema retroazionato dell'esercizio precedente e si ponga $K = 100$:

e.1) Tracciare qualitativamente i diagrammi di Bode delle ampiezze e della fasi del guadagno di anello $K\,G(s)$;



e.2) Fornire una stima della larghezza di banda del sistema retroazionato;

Soluzione: La banda passante del sistema pu essere determinata dal punto di incrocio del diagramma di Bode delle ampiezze con l'asse 0 db. Una stima della banda passante del sistema è quindi $\omega_T = 3.6\, rad/s$.

e.3) Fornire una stima della risposta "a regime" $y_\infty(t)$ del sistema retroazionato quando il disturbo $d(t) = 0$ e in ingresso è presente il segnale $r(t) = 4 + 3\,\cos(0.02\,t)$.

Soluzione: Essendo il sistema retroazionato di tipo passa-basso ed essendo la pulsazione del segnale di ingresso $\omega_r << \omega_T$, l'uscita risulta uguale all'ingresso, percui $y(t) = 4 + 3\,\cos(0.02\,t)$.

f) **Non è richiesto lo svolgimento di questo esercizio agli iscritti ad Ingegneria Ambientale.**

Si faccia riferimento al sistema descritto nell'esercizio d):

f.1) Tracciare qualitativamente il luogo delle radici del sistema retroazionato per valori positivi del parametro K. Determinare qualitativamente i punti di diramazione. Soluzione: vedi figura 4.

f.2) Determinare il centro degli asintoti, gli angoli che gli asintoti formano rispetto all'asse reale positivo, le intersezioni del luogo delle radici con l'asse immaginario e i corrispondenti valori del parametro K.

Soluzione:

$$\sigma = -2.333$$
$$\phi = 60,\ 180,\ 300$$
$$s^* = 4.22\,i$$
$$K^* = 135.3$$

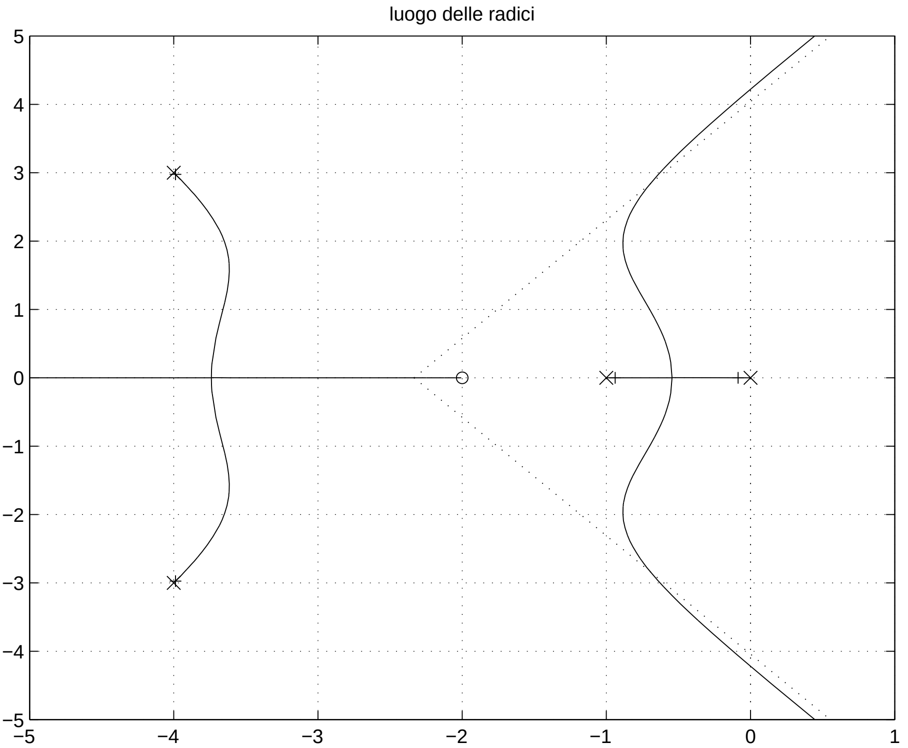


Figura 2: Luogo della radici di $G(s)$.

Fondamenti di Controlli Automatici - A.A. 2006/07

03 Aprile 2007 - Domande Teoriche

Compito A Nr.

Nome:	
Nr. Mat.	
Firma:	

Per ciascuno dei test a soluzione multipla segnare con una crocetta tutte le affermazioni che si ritengono giuste.

1. Per $\omega \in [-\infty, \infty]$, il diagramma di Nyquist "completo" di un sistema $G(s)$ di tipo 2 deve essere chiuso all'infinito:

   ○ con una semicirconferenza percorsa in senso orario;
   ○ con una semicirconferenza percorsa in senso antiorario;
   ⊗ con una circonferenza percorsa in senso orario;
   ○ con una circonferenza percorsa in senso antiorario.

2. Fornire una stima del tempo di assestamento (al 5% del valore finale) del sistema $G(s) = \frac{10}{3s+1}$ chiuso in retroazione negativa con guadagno $K = 10$:

$$T_a = 0.09$$

3. Per $\omega > 0$, il diagramma di Bode reale delle fasi della funzione $G(s) = \frac{1}{1+\tau s}$ coincide con il diagramma "asintotico" di Bode:

   ○ in nessun punto al finito;
   ⊗ in un solo punto al finito $\omega_n = 1/\tau$;
   ○ nei tre punti al finito $\omega_n = 1/\tau$, $\omega_a = \omega_n/4.81$, $\omega_b = 4.81\,\omega_n$.

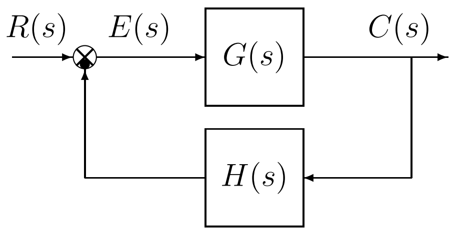
4. Il teorema del valore iniziale applicato alla funzione $F(s) = \mathcal{L}[f(t)]$ afferma che:

$$\lim_{t\to 0^+} f(t) = \lim_{s\to\infty} s\,F(s)$$

5. Dato il sistema lineare $G(s) = \frac{s+1}{(s+3)(s+6)}$, il valore finale ($T \to \infty$) della risposta $h(t)$ ad un gradino di ampiezza 2 vale;

   ○ $h(\infty) = 0$
   ○ $h(\infty) = 2$
   ⊗ $h(\infty) = \frac{1}{9}$
   ○ $h(\infty) = \infty$

6. Si consideri il sistema retroazionato riportato di fianco. Scrivere il legame che lega la variazione relativa del sistema $H(s)$ alla variazione relativa del sistema retroazionato $G_0(s)$ quando varia un parametro β interno alla funzione di trasferimento $H(s)$:



$$\frac{\Delta G_0(s)}{G_0(s)} = \frac{-G(s)H(s)}{1+G(s)H(s)}\,\frac{\Delta H(s)}{H(s)}$$

7. Il margine di ampiezza M_A del sistema $G(s) = \frac{1}{(1+\tau_1 s)\,(1+\tau_2 s)\,(1+\tau_3 s)}$ con $\tau_1 > 0$, $\tau_2 > 0$, $\tau_3 > 0$ è;

   ⊗ sempre maggiore di 1;
   ○ sempre minore di 1;
   ○ può essere unitario.

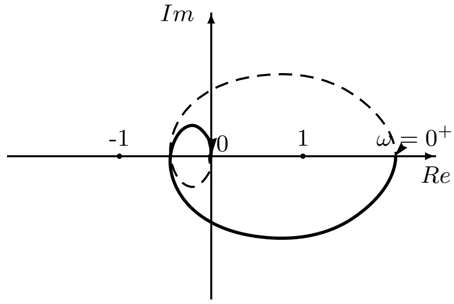
8. Scrivere la funzione di trasferimento $G(s)$ corrispondente alla seguente equazione differenziale:

$$3\,\ddot{y}(t) + 2\dot{y}(t) + 4\,y(t) = 2\,\ddot{x}(t) + 3\,\dot{x}(t) + 4\,x(t) \qquad \rightarrow \qquad G(s) = \frac{Y(s)}{X(s)} = \frac{2\,s+4}{s^3+2\,s^2+s+3}$$

9. Dato il seguente diagramma di Nyquist di una funzione $G(s)$ con tutti i poli a parte reale negativa, disegnate il diagramma polare completo.

Utilizzando il criterio di Nyquist è possibile affermare che il sistema retroazionato $K\,G(s)$ è asintoticamente stabile per i seguenti valori di K:

- ⊗ $K_1^* < K < K_2^*$, $K_1^* > -1$, $K_2^* > 1$;
- ○ $K_1^* < K < K_2^*$, $K_1^* < -1$, $K_2^* > 1$;
- ○ $K_1^* < K < K_2^*$, $K_1^* > -1$, $K_2^* < 1$;
- ○ $K_1^* < K < K_2^*$, $K_1^* < -1$, $K_2^* < 1$;



10. Il margine di fase del sistema $G(s) = 1/s$:

- ○ è $-\frac{\pi}{2}$;
- ⊗ è $\frac{\pi}{2}$;
- ○ è nullo;
- ○ non è definibile.

11. Il segnale $x(t) = 3\,\sin(6\,t)$ viene posto in ingresso ad un sistema descritto dalla funzione di trasferimento $G(s) = \frac{1}{s+8}$. L'ampiezza A del segnale d'uscita vale:

$$A = \frac{3}{10}$$

12. In un sistema del secondo ordine a poli complessi coniugati, il tempo di assestamento T_a rimane costante al variare della posizione dei poli:

- ⊗ su di una retta parallela all'asse immaginario;
- ○ su di una circonferenza con centro nell'origine;
- ○ su due semirette uscenti dall'origine;
- ○ su di un'ellisse con fuoco nell'origine.

Non è richiesto lo svolgimento delle seguenti domande agli iscritti ad Ingegneria Ambientale.

13. In un sistema con $K_\tau > 0$, per valori del guadagno di retroazione $K > 0$ un punto dell'asse reale appartiene al luogo delle radici se lascia alla sua destra:

- ○ un numero totale dispari di poli;
- ○ un numero totale pari di poli;
- ⊗ un numero totale dispari di zeri e poli;
- ○ un numero totale pari di zeri e poli.

14. Il metodo del contorno delle radici studia le curve descritte dalle radici dell'equazione caratteristica al variare:

- ○ di un qualunque parametro che compare nell'equazione caratteristica;
- ⊗ di un qualunque parametro che entra linearmente nell'equazione caratteristica;
- ○ delle sole costanti di tempo relative ad un polo o ad uno zero.

Fondamenti di Controlli Automatici - A.A. 2006/07

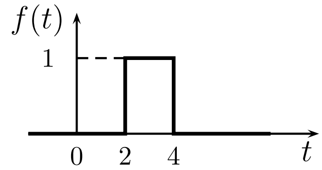
03 Aprile 2007 - Esercizi

Compito B Nr.

Nome:	
Nr. Mat.	
Firma:	

a) Determinare la trasformata di Laplace $X_i(s)$ dei seguenti segnali temporali $x_i(t)$:

$$x_1(t) = 2\,\sin(5\,t)e^{-t}, \qquad x_2(t) = \tfrac{1}{3}\,t^2\,e^{2\,t} + \cos(2\,\pi\,t),$$



Soluzione:

$$X_1(s) = \frac{10}{(s+1)^2+25}, \qquad X_2(s) = \frac{2}{3\,(s-2)^3} + \frac{s}{s^2+4\,\pi^2}, \qquad X_3(s) = \frac{1}{s}\left[e^{-2s} - e^{-4s}\right]$$

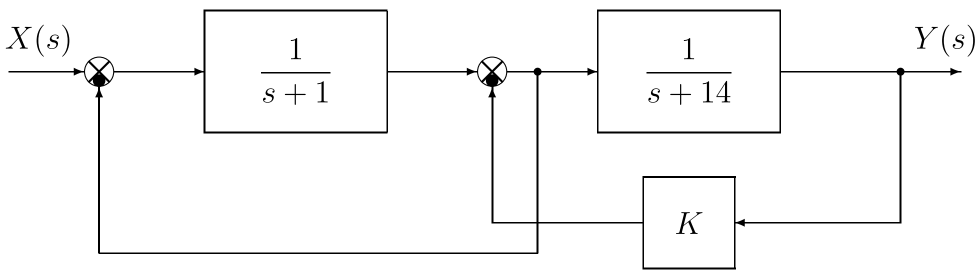
b) Calcolare la risposta impulsiva $g_i(t)$ delle seguenti funzioni di trasferimento $G_i(s)$:

$$G_1(s) = -\frac{3}{(s+2)^3}, \qquad G_2(s) = \frac{s+2}{(s-2)\,(s+3)\,(s+4)}, \qquad G_3(s) = \frac{1}{(s-2)\,(s+1)^2}$$

Soluzione:

$$g_1(t) = -\frac{3}{2}\,t^2\,e^{-2\,t}, \qquad g_2(t) = \frac{2}{15}\,e^{2\,t} + \frac{1}{5}\,e^{-3\,t} - \frac{1}{3}\,e^{-4\,t}, \qquad g_3(t) = \frac{1}{9}\,e^{2\,t} - \frac{1}{9}\,e^{-t} - \frac{1}{3}\,t\,e^{-t}$$

c) Si consideri il seguente schema a blocchi:



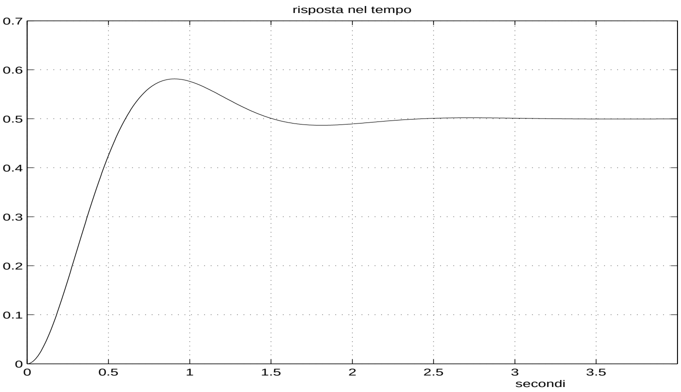
c.1) Posto $K = -12$, utilizzando la formula di Mason calcolare la funzione di trasferimento $G(s)$ che lega l'ingresso $X(s)$ all'uscita $Y(s)$:

$$G(s) = \frac{Y(s)}{X(s)} = \frac{1}{s^2+4\,s+16}$$

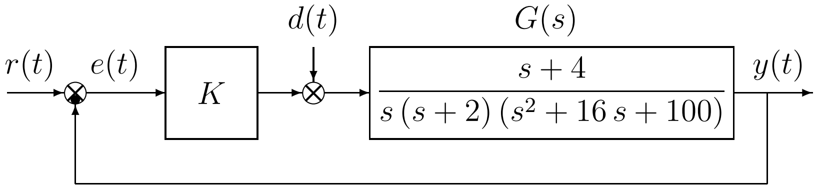
c.2) Relativamente alla funzione di trasferimento $G(s)$ calcolare: 1) la parte reale σ e 2) la parte immaginaria ω dei poli dominanti del sistema; 3) la pulsazione naturale ω_n e 4) il coefficiente di smorzamento δ dei poli dominanti del sistema; 5) il guadagno statico K_0; 6) il tempo di assestamento T_a del sistema $G(s)$ alla risposta al gradino:

1) $\sigma = -2$	3) $\omega_n = 4$	5) $K_0 = \frac{1}{16}$
2) $\omega = 3.5$	4) $\delta = 0.5$	6) $T_a = 1.5$

c.3) Sul disegno a quadretti riportato a fianco disegnare l'andamento qualitativo della risposta $y(t)$ della funzione di trasferimento $G(s)$ al gradino in ingesso $x(t) = 8$.
Per quanto è possibile, disegnare l'andamento temporale in modo congruente con il valore dei parametri numerici determinati al punto c.2).



d) Sia dato il seguente sistema retroazionato:



d.1) Determinare per quali valori del parametro K il sistema retroazionato è asintoticamente stabile.

Soluzione: l'equazione caratteristica del sistema retroazionato è

$$1 + \frac{K\,(s+4)}{s\,(s+2)\,(s^2+16\,s+100)} = 0 \qquad \rightarrow \qquad s^4 + 17\,s^3 + 116\,s^2 + (100+K)\,s + 4\,K = 0$$

La corrispondente tabella di Routh è la seguente

$$\begin{array}{c|ccc} 4 & 1 & 132 & 4\,K \\ 3 & 18 & 200+K & \\ 2 & 2176-K & 72\,K & \\ 1 & (2176-K)(200+K) - 1296\,K & & \\ 0 & 72\,K & & \end{array}$$

Dalla riga 2 e dalla riga 0 si ricavano i seguenti vincoli:

$$K > 0, \qquad\qquad K < 1082$$

La pulsazione ω^* corrispondente al valore limite $K^* = 1082$ è:

$$\omega^* = \sqrt{\frac{100+K^*}{17}} = 8.34$$

d.2) Posto $r(t) = 0$, si determini il valore del parametro K tale da garantire che in presenza del disturbo costante $d(t) = d_0$, il valore a regime dell'uscita $y(t)$ sia $y_\infty = 0.02\,d_0$.

Soluzione: Il valore a regime dell'uscita corrispondente all'applicazione del disturbo costante $d(t) = d_0$ è

$$y_\infty = \frac{G(0)\,d_0}{1 + K\,G(0)} = \frac{d_0}{K} = 0.02\,d_0$$

Il sistema $G(s)$è di tipo 1 e quindi il suo guadagno statico infinito $G(0) = \infty$. Il valore di uscita richiesto si ha per $K = 50$.

d.3) Posto $d(t) = 0$, calcolare, in funzione del parametro K, l'errore a regime $e_\infty(t)$ corrispondente all'applicazione del segnale di ingresso a rampa $r(t) = 2\,t$.

Soluzione: L'errore a regime $e_\infty = \frac{2}{K_v}$ con $K_v = \frac{K}{50}$. Si ottiene quindi che:

$$e_\infty = \frac{100}{K}.$$

d.4) Posto $K = 100$, disegnare qualitativamente il diagramma di Nyquist "completo" del guadagno d'anello $K\,G(s)$. Calcolare esattamente la posizione σ_a dell'asintoto verticale, le eventuali intersezioni σ_i^* con l'asse reale e i corrispondenti valori delle pulsazioni ω_i^*. Determinare inoltre il margine di ampiezza M_α.

Soluzione: Il diagramma di Nyquist della funzione $G(s)$ per $\omega \in [0,\ \infty]$ è mostrato in Fig. 3.

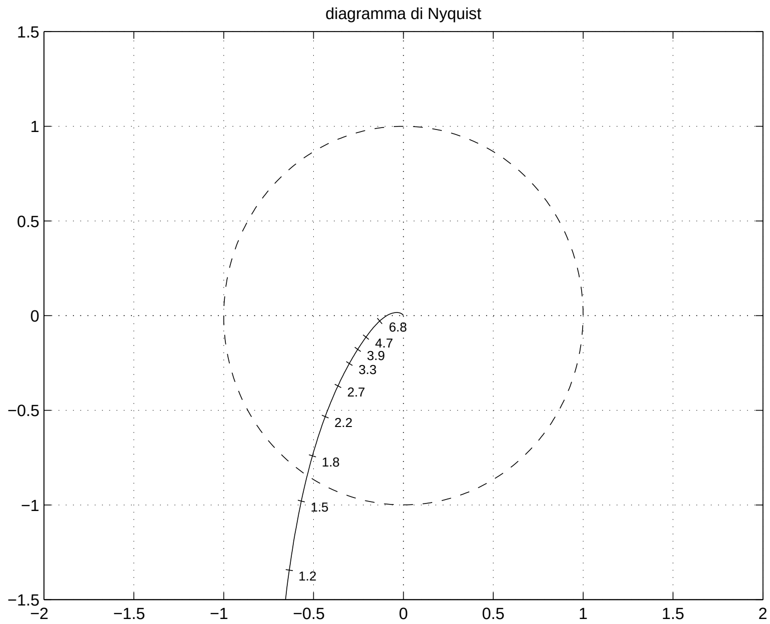


Figura 3: Diagramma di Nyquist della funzione $G(s)$ per $\omega \in [0,\ \infty]$.

Il sistema é di tipo 1 per cui esiste un asintoto verticale in $K_\tau\,\Delta_a = -0.82$.

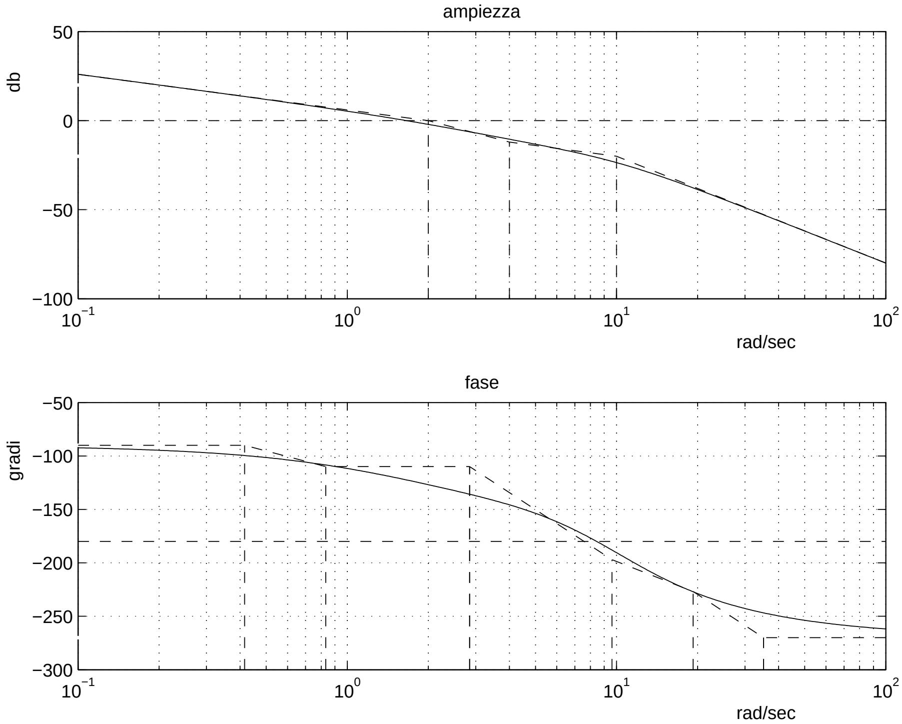
Esiste un'unica intersezione σ^* con l'asse reale. Tale intersezione si determina facilmente dall'analisi di Routh svolta al punto d.1:

$$\sigma^* = -\frac{1}{K^*} = -0.09$$

Il corrispondente valore di ω^* è 8.34 mentre il margine di ampiezza è $M_a = \frac{1}{|\sigma^*|} = 10.82$.

e) Si faccia riferimento al sistema retroazionato dell'esercizio precedente e si ponga $K = 100$:

e.1) Tracciare qualitativamente i diagrammi di Bode delle ampiezze e della fasi del guadagno di anello $K\,G(s)$;



e.2) Fornire una stima della larghezza di banda del sistema retroazionato;

<u>Soluzione</u>: La banda passante del sistema pu essere determinata dal punto di incrocio del diagramma di Bode delle ampiezze con l'asse 0 db. Una stima della banda passante del sistema è quindi $\omega_T = 1.8\, rad/s$.

e.3) Fornire una stima della risposta "a regime" $y_\infty(t)$ del sistema retroazionato quando il disturbo $d(t) = 0$ e in ingresso è presente il segnale $r(t) = 5 + \cos(0.01\, t)$.

<u>Soluzione</u>: Essendo il sistema retroazionato di tipo passa-basso ed essendo la pulsazione del segnale di ingresso $\omega_r << \omega_T$, l'uscita risulta uguale all'ingresso, percui $y(t) = 5 + \cos(0.01\, t)$.

f) **Non è richiesto lo svolgimento di questo esercizio agli iscritti ad Ingegneria Ambientale.**

Si faccia riferimento al sistema descritto nell'esercizio d):

f.1) Tracciare qualitativamente il luogo delle radici del sistema retroazionato per valori positivi del parametro K. Determinare qualitativamente i punti di diramazione. <u>Soluzione</u>: vedi figura 4.

f.2) Determinare il centro degli asintoti, gli angoli che gli asintoti formano rispetto all'asse reale positivo, le intersezioni del luogo delle radici con l'asse immaginario e i corrispondenti valori del parametro K.

<u>Soluzione</u>:

$$\sigma = -4.667$$
$$\phi = 60,\ 180,\ 300$$
$$s^* = 8.34\, i$$
$$K^* = 1082$$

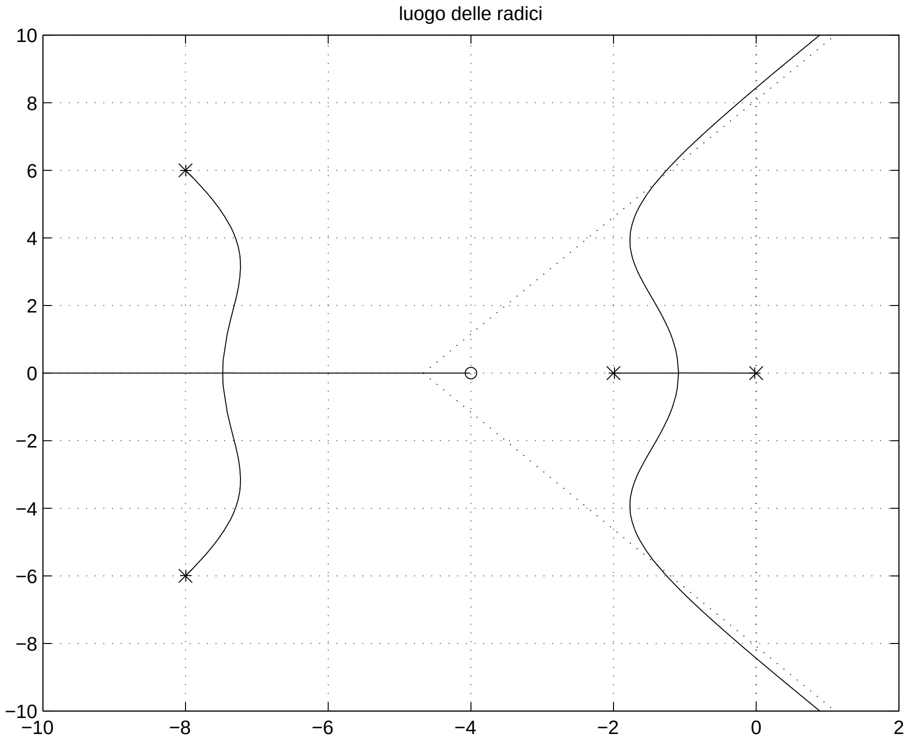


Figura 4: Luogo della radici di $G(s)$.

Fondamenti di Controlli Automatici - A.A. 2006/07

03 Aprile 2007 - Domande Teoriche

Compito B Nr.

Nome:	
Nr. Mat.	
Firma:	

Per ciascuno dei test a soluzione multipla segnare con una crocetta tutte le affermazioni che si ritengono giuste.

1. Per $\omega \in [-\infty, \infty]$, il diagramma di Nyquist "completo" di un sistema $G(s)$ di tipo 2 deve essere chiuso all'infinito:

   ○ con una circonferenza percorsa in senso antiorario;
   ⊗ con una circonferenza percorsa in senso orario;
   ○ con una semicirconferenza percorsa in senso antiorario;
   ○ con una semicirconferenza percorsa in senso orario.

2. Fornire una stima del tempo di assestamento (al 5% del valore finale) del sistema $G(s) = \frac{1}{6s+1}$ chiuso in retroazione negativa con guadagno $K = 100$:

$$T_a = 0.18$$

3. Per $\omega > 0$, il diagramma di Bode reale delle fasi della funzione $G(s) = \frac{1}{1+\tau s}$ coincide con il diagramma "asintotico" di Bode:

   ○ nei tre punti al finito $\omega_n = 1/\tau$, $\omega_a = \omega_n/4.81$, $\omega_b = 4.81\,\omega_n$.
   ○ in nessun punto al finito;
   ⊗ in un solo punto al finito $\omega_n = 1/\tau$;

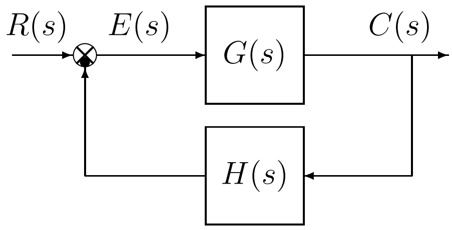
4. Il teorema del valore finale applicato alla funzione $F(s) = \mathcal{L}[f(t)]$ afferma che:

$$\lim_{t\to\infty} f(t) = \lim_{s\to 0^+} s\,F(s)$$

5. Dato il sistema lineare $G(s) = \frac{s+2}{(s+3)(s+4)}$, il valore finale ($T \to \infty$) della risposta $h(t)$ ad un gradino di ampiezza 2 vale;

   ○ $h(\infty) = \infty$
   ⊗ $h(\infty) = \frac{1}{3}$
   ○ $h(\infty) = 1$
   ○ $h(\infty) = 0$

6. Si consideri il sistema retroazionato riportato di fianco. Scrivere il legame che lega la variazione relativa del sistema $G(s)$ alla variazione relativa del sistema retroazionato $G_0(s)$ quando varia un parametro α interno alla funzione di trasferimento $G(s)$:



$$\frac{\Delta G_0(s)}{G_0(s)} = \frac{1}{1+G(s)H(s)}\,\frac{\Delta G(s)}{G(s)}$$

7. Il margine di ampiezza M_A del sistema $G(s) = \frac{1}{(1+\tau_1 s)(1+\tau_2 s)(1+\tau_3 s)}$ con $\tau_1 > 0$, $\tau_2 > 0$, $\tau_3 > 0$ è;

   ○ sempre minore di 1;
   ⊗ sempre maggiore di 1;
   ○ può essere unitario.

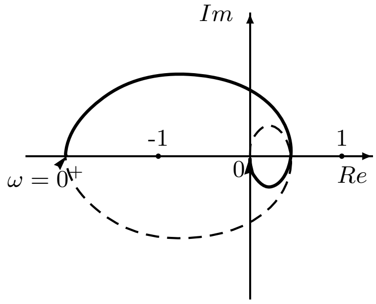
8. Scrivere la funzione di trasferimento $G(s)$ corrispondente alla seguente equazione differenziale:

$$2\,\ddot{x}(t) + 4\,\dot{x}(t) + x(t) = \ddot{u}(t) + 2\,\dot{u}(t) + 3\,u(t) \qquad \rightarrow \qquad G(s) = \frac{X(s)}{U(s)} = \frac{2\,s+3}{s^3+3\,s^2+4\,s+1}$$

9. Dato il seguente diagramma di Nyquist di una funzione $G(s)$ con tutti i poli a parte reale negativa, disegnate il diagramma polare completo.

Utilizzando il criterio di Nyquist è possibile affermare che il sistema retroazionato $K\,G(s)$ è asintoticamente stabile per i seguenti valori di K:

- ○ $K_1^* < K < K_2^*$, $K_1^* > -1$, $K_2^* > 1$;
- ○ $K_1^* < K < K_2^*$, $K_1^* < -1$, $K_2^* > 1$;
- ○ $K_1^* < K < K_2^*$, $K_1^* > -1$, $K_2^* < 1$;
- ⊗ $K_1^* < K < K_2^*$, $K_1^* < -1$, $K_2^* < 1$;



10. Il margine di fase del sistema $G(s) = 1/s$:

- ○ è nullo;
- ○ è $-\frac{\pi}{2}$;
- ⊗ è $\frac{\pi}{2}$;
- ○ non è definibile.

11. Il segnale $x(t) = 2\,\sin(3\,t)$ viene posto in ingresso ad un sistema descritto dalla funzione di trasferimento $G(s) = \frac{1}{s+4}$. L'ampiezza A del segnale d'uscita vale:

$$A = \frac{2}{5}$$

12. In un sistema del secondo ordine a poli complessi coniugati, il tempo di assestamento T_a rimane costante al variare della posizione dei poli:

- ○ su di una circonferenza con centro nell'origine;
- ○ su due semirette uscenti dall'origine;
- ⊗ su di una retta parallela all'asse immaginario;
- ○ su di un'ellisse con fuoco nell'origine.

Non è richiesto lo svolgimento delle seguenti domande agli iscritti ad Ingegneria Ambientale.

13. In un sistema con $K_\tau > 0$, per valori del guadagno di retroazione $K > 0$ un punto dell'asse reale appartiene al luogo delle radici se lascia alla sua destra:

- ⊗ un numero totale dispari di zeri e poli;
- ○ un numero totale pari di zeri e poli.
- ○ un numero totale dispari di poli;
- ○ un numero totale pari di poli;

14. Il metodo del contorno delle radici studia le curve descritte dalle radici dell'equazione caratteristica al variare:

- ⊗ di un qualunque parametro che entra linearmente nell'equazione caratteristica;
- ○ di un qualunque parametro che compare nell'equazione caratteristica;
- ○ delle sole costanti di tempo relative ad un polo o ad uno zero.