Fondamenti di Controlli Automatici - A.A. 2013/14
23 luglio 2014 - Quiz di Teoria

Cognome	
Nome	
Matricola	
Corso	

Per ciascuno dei test a soluzione multipla segnare con una crocetta tutte le affermazioni che si ritengono giuste. In ogni quiz almeno una affermazione è corretta.

La prova di teoria si ritiene superata se vengono totalizzati almeno 5 punti su 10; diversamente il compito verrà ritenuto insufficiente a prescindere dal risultato della seconda parte della prova (esercizi).

1. I due poli di un sistema del secondo ordine sono univocamente determinati se vengono assegnate le seguenti specifiche

   ○ coefficiente di smorzamento δ e tempo di assestamento T_a
   ○ picco di risonanza M_R e pulsazione di risonanza ω_R
   ○ massima sovraelongazione S e picco di risonanza M_R

2. La funzione di trasferimento $G(s) = \frac{Y(s)}{X(s)} = \dfrac{3s^2+8s+1}{s^3+3s^2+4}$ corrisponde all'equazione differenziale:

   ○ $4y(t) + 3\ddot{y}(t) + \dddot{y}(t) = x(t) + 8\dot{x}(t) + 3\ddot{x}(t)$
   ○ $4x(t) + 3\ddot{x}(t) + \dddot{x}(t) = y(t) + 8\dot{y}(t) + 3\ddot{y}(t)$
   ○ $4\dot{y}(t) + 3\ddot{y}(t) + \dddot{y}(t) = x(t) + 8\dot{x}(t) + 3\ddot{x}(t)$
   ○ nessuna delle precedenti

3. La risposta a regime $y(t)$ del sistema $G(s) = \dfrac{6}{s+2}$ quando in ingresso è presente il segnale $x(t) = 2\sin(2t)$ è:

   ○ $y(t) \simeq 2\sqrt{3}\sin\left(2t - \frac{\pi}{4}\right)$
   ○ $y(t) \simeq 3\sqrt{2}\sin\left(2t - \frac{\pi}{4}\right)$
   ○ $y(t) \simeq 2\sqrt{3}\sin\left(2t + \frac{\pi}{4}\right)$
   ○ $y(t) \simeq 3\sqrt{2}\sin\left(2t + \frac{\pi}{4}\right)$

4. La derivata iniziale della risposta al gradino unitario del sistema $G(s) = \frac{s+5}{s^2+25s}$ è pari a:

   ○ 1
   ○ 0
   ○ ∞
   ○ 1/5

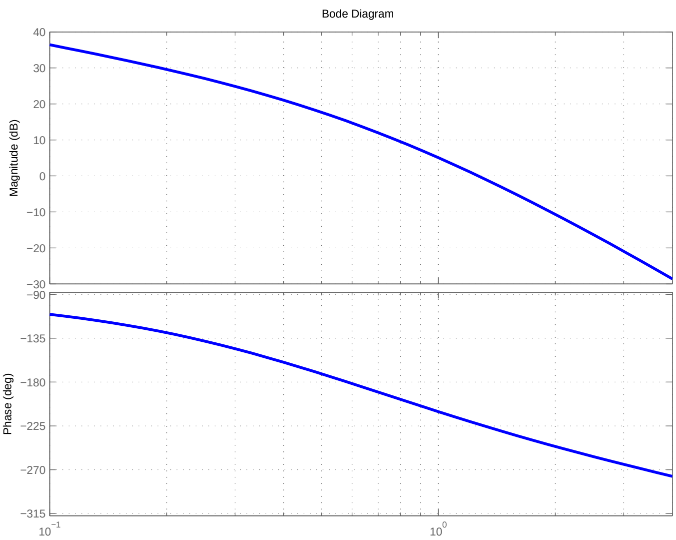
5. Per l'applicazione del criterio di Nyquist a un sistema in retroazione:

   ○ non occorre alcuna informazione sulla stabilità ad anello aperto
   ○ occorre sapere se il sistema ad anello aperto è stabile o instabile
   ○ occorre conoscere il numero dei poli a parte reale nulla e positiva
   ○ occorre conoscere il numero degli zeri a parte reale nulla e positiva

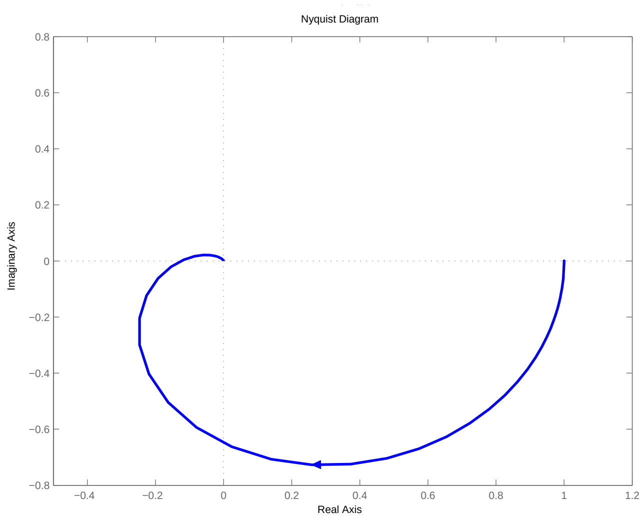
6. Se la funzione d'anello $L(s)$ di un sistema retroazionato presenta un polo doppio nell'origine:
   - ◯ l'errore a regime per ingresso a gradino è nullo
   - ◯ l'errore a regime per ingresso a rampa è nullo
   - ◯ l'errore a regime per ingresso a rampa è diverso da zero e costante
   - ◯ l'errore a regime per ingresso a parabola è infinito

7. Sia $\mathcal{L}[f(t)] = F(s)$ la trasformata di Laplace della funzione $f(t)$. Vale la relazione:
   - ◯ $\mathcal{L}\left[\frac{df}{dt}\right] = \frac{1}{s}F(s) - f(0^-)$
   - ◯ $\mathcal{L}\left[\frac{df}{dt}\right] = sF(s)$
   - ◯ $\mathcal{L}\left[\frac{df}{dt}\right] = sF(s) - f(0^-)$
   - ◯ $\mathcal{L}\left[\frac{df}{dt}\right] = \frac{1}{s}F(s)$

8. Si consideri un'equazione caratteristica nella quale compaiono solamente le potenze pari di s. Utilizzando il criterio di Routh è possibile affermare che l'equazione caratteristica:
   - ◯ ha un polo nell'origine
   - ◯ ha tutti le radici a parte reale positiva
   - ◯ ha soluzioni simmetriche rispetto all'origine
   - ◯ ha lo stesso numero di radici a parte reale strettamente positiva e strettamente negativa



9. Si faccia riferimento ai diagrammi di Bode riportati a fianco relativi a un sistema $G(s)$ a fase minima. Il margine di ampiezza M_α e il margine di fase M_φ sono:
   - ◯ $M_\alpha \simeq -15$ dB e $M_\varphi \simeq -43°$
   - ◯ $M_\alpha \simeq 15$ dB e $M_\varphi \simeq 43°$
   - ◯ $M_\alpha \simeq 15$ dB e $M_\varphi \simeq -43°$
   - ◯ $M_\alpha \simeq -15$ dB e $M_\varphi \simeq 43°$



10. Sia dato il diagramma di Nyquist (per pulsazioni positive) della funzione $G(s) = \frac{8}{(s+2)^3}$. In base al criterio di Nyquist è possibile affermare che il sistema retroazionato $KG(s)$ è stabile per i seguenti valori di K
    - ◯ $K < K_1 \cup K > K_2$, dove $K_1 < 0$ e$K_2 > 0$
    - ◯ $K_1 < K < K_2$, dove $K_1 < 0$ e $K_2 > 0$
    - ◯ $0 < K < K_1$, dove $K_1 > 0$
    - ◯ $K > K_1$, dove $K_1 > 0$

Fondamenti di Controlli Automatici - A.A. 2013/14

23 luglio 2014 - Esercizi

Cognome	
Nome	
Matricola	
Corso	

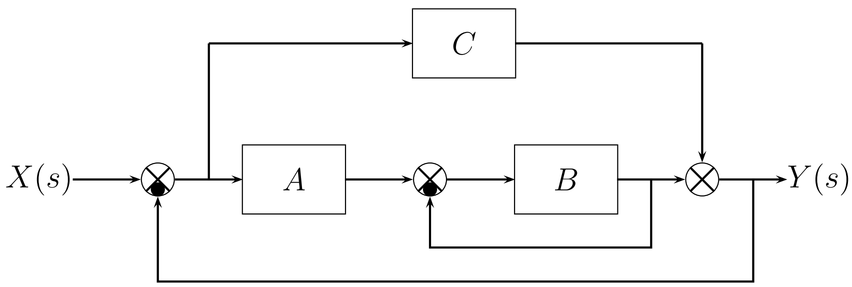
a) Determinare la trasformata di Laplace $X_i(s)$ dei seguenti segnali temporali $x_i(t)$:

$$x_1(t) = 5\left(t^3 e^{2t} + \delta(t)\right), \qquad x_2(t) = 4 + 3e^{-t}\sin(2t)$$

b) Calcolare la risposta impulsiva $g_i(t)$ delle seguenti funzioni di trasferimento $G_i(s)$:

$$G_1(s) = \frac{3s^2 + 22s + 16}{s(s+2)(s+4)}, \qquad G_2(s) = \frac{s-4}{(s+1)^2(s+3)}$$

c) Dato il seguente schema a blocchi:

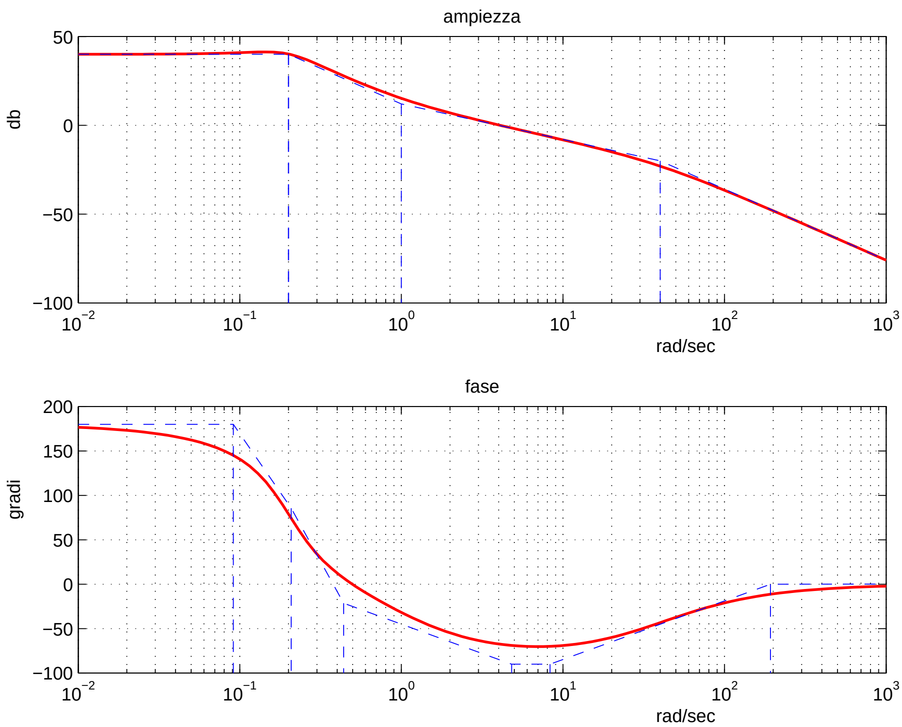


utilizzando la formula di Mason calcolare la funzione di trasferimento $G(s)$ che lega l'ingresso $X(s)$ all'uscita $Y(s)$:

$$G(s) = \frac{Y(s)}{X(s)} =$$

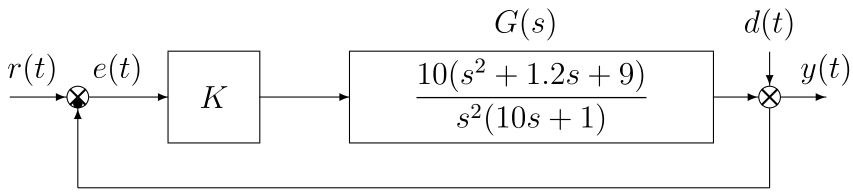
d) Sia data la funzione di trasferimento $G(s) = \dfrac{52(6s+26)}{(s+5)(s^2+s+1.25)(s^2+20s+104)}$.
Disegnare l'andamento qualitativo della risposta $y(t)$ a un gradino in ingresso di ampiezza 10, $x(t) = 10$. Calcolare il valore a regime y_∞ dell'uscita $y(t)$ del sistema, stimare qualitativamente il tempo di assestamento T_a del sistema e il periodo T_ω dell'eventuale oscillazione smorzata.

e) Facendo riferimento ai diagrammi di Bode della funzione $G(s)$ mostrati in figura



si ricavi l'espressione analitica della funzione $G(s)$.

f) Sia dato il seguente sistema retroazionato:



f.1) Determinare per quali valori del parametro K il sistema retroazionato è asintoticamente stabile.

f.2) Posto $K = 0.01$ disegnare qualitativamente il diagramma di Nyquist completo della funzione d'anello $KG(s)$. Calcolare esattamente la posizione σ_0 di un eventuale asintoto, le eventuali intersezioni con l'asse reale e i corrispondenti valori delle pulsazioni.

f.3) Posto $K = 10$, calcolare l'errore a regime $e(\infty)$ quando sul sistema retroazionato agiscono contemporaneamente il segnale $r(t) = 5t + 2\cos t$ e il disturbo $d(t) = 0$.

f.4) Posto $K = 0.01$, tracciare (nello schema fornito in allegato) i diagrammi di Bode delle ampiezze e delle fasi del guadagno di anello $K\,G(s)$.

g) **Non è richiesto lo svolgimento di questo esercizio agli iscritti ad Ingegneria Ambientale o a corsi per i quali l'esame è inferiore a 6 CFU.**

Con riferimento al sistema descritto nell'esercizio f), tracciare qualitativamente il luogo delle radici del sistema retroazionato per valori positivi del parametro K. Determinare esattamente gli asintoti, il centro degli asintoti, le intersezioni con l'asse immaginario e i corrispondenti valori del guadagno K. Determinare gli eventuali punti di diramazione solo qualitativamente.

Cognome	
Nome	
Matricola	
Corso	

Fondamenti di Controlli Automatici - A.A. 2013/14

23 luglio 2014 - Quiz di Teoria

Per ciascuno dei test a soluzione multipla segnare con una crocetta tutte le affermazioni che si ritengono giuste. In ogni quiz almeno una affermazione è corretta.

La prova di teoria si ritiene superata se vengono totalizzati almeno 5 punti su 10; diversamente il compito verrà ritenuto insufficiente a prescindere dal risultato della seconda parte della prova (esercizi).

1. I due poli di un sistema del secondo ordine sono univocamente determinati se vengono assegnate le seguenti specifiche

   ⊗ coefficiente di smorzamento δ e tempo di assestamento T_a

   ⊗ picco di risonanza M_R e pulsazione di risonanza ω_R

   ○ massima sovraelongazione S e picco di risonanza M_R

2. La funzione di trasferimento $G(s) = \frac{Y(s)}{X(s)} = \dfrac{3s^2+8s+1}{s^3+3s^2+4}$ corrisponde all'equazione differenziale:

   ⊗ $4y(t) + 3\ddot{y}(t) + \dddot{y}(t) = x(t) + 8\dot{x}(t) + 3\ddot{x}(t)$

   ○ $4x(t) + 3\ddot{x}(t) + \dddot{x}(t) = y(t) + 8\dot{y}(t) + 3\ddot{y}(t)$

   ○ $4\dot{y}(t) + 3\ddot{y}(t) + \dddot{y}(t) = x(t) + 8\dot{x}(t) + 3\ddot{x}(t)$

   ○ nessuna delle precedenti

3. La risposta a regime $y(t)$ del sistema $G(s) = \dfrac{6}{s+2}$ quando in ingresso è presente il segnale $x(t) = 2\sin(2t)$ è:

   ○ $y(t) \simeq 2\sqrt{3}\sin\left(2t - \frac{\pi}{4}\right)$

   ⊗ $y(t) \simeq 3\sqrt{2}\sin\left(2t - \frac{\pi}{4}\right)$

   ○ $y(t) \simeq 2\sqrt{3}\sin\left(2t + \frac{\pi}{4}\right)$

   ○ $y(t) \simeq 3\sqrt{2}\sin\left(2t + \frac{\pi}{4}\right)$

4. La derivata iniziale della risposta al gradino unitario del sistema $G(s) = \frac{s+5}{s^2+25s}$ è pari a:

   ⊗ 1

   ○ 0

   ○ ∞

   ○ 1/5

5. Per l'applicazione del criterio di Nyquist a un sistema in retroazione:

   ○ non occorre alcuna informazione sulla stabilità ad anello aperto

   ○ occorre sapere se il sistema ad anello aperto è stabile o instabile

   ⊗ occorre conoscere il numero dei poli a parte reale nulla e positiva

   ○ occorre conoscere il numero degli zeri a parte reale nulla e positiva

6. Se la funzione d'anello $L(s)$ di un sistema retroazionato presenta un polo doppio nell'origine:

⊗ l'errore a regime per ingresso a gradino è nullo
⊗ l'errore a regime per ingresso a rampa è nullo
○ l'errore a regime per ingresso a rampa è diverso da zero e costante
○ l'errore a regime per ingresso a parabola è infinito

7. Sia $\mathcal{L}[f(t)] = F(s)$ la trasformata di Laplace della funzione $f(t)$. Vale la relazione:

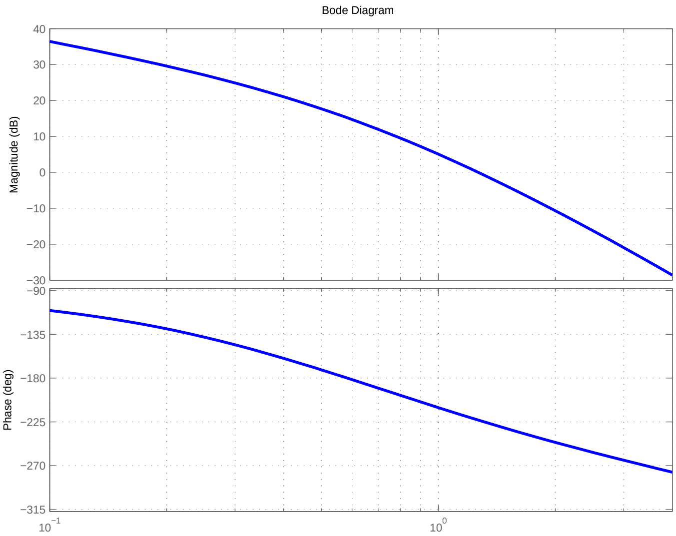
○ $\mathcal{L}\left[\frac{df}{dt}\right] = \frac{1}{s}F(s) - f(0^-)$
○ $\mathcal{L}\left[\frac{df}{dt}\right] = sF(s)$
⊗ $\mathcal{L}\left[\frac{df}{dt}\right] = sF(s) - f(0^-)$
○ $\mathcal{L}\left[\frac{df}{dt}\right] = \frac{1}{s}F(s)$

8. Si consideri un'equazione caratteristica nella quale compaiono solamente le potenze pari di s. Utilizzando il criterio di Routh è possibile affermare che l'equazione caratteristica:

○ ha un polo nell'origine
○ ha tutti le radici a parte reale positiva
⊗ ha soluzioni simmetriche rispetto all'origine
⊗ ha lo stesso numero di radici a parte reale strettamente positiva e strettamente negativa

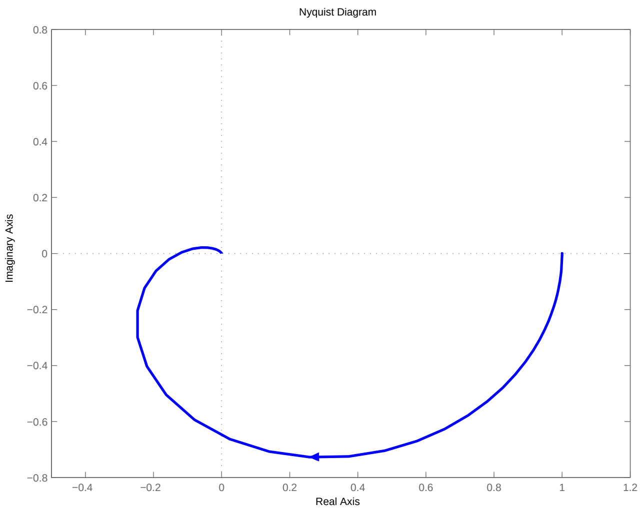
9. Si faccia riferimento ai diagrammi di Bode riportati a fianco relativi a un sistema $G(s)$ a fase minima. Il margine di ampiezza M_α e il margine di fase M_φ sono:

⊗ $M_\alpha \simeq -15$ dB e $M_\varphi \simeq -43°$
○ $M_\alpha \simeq 15$ dB e $M_\varphi \simeq 43°$
○ $M_\alpha \simeq 15$ dB e $M_\varphi \simeq -43°$
○ $M_\alpha \simeq -15$ dB e $M_\varphi \simeq 43°$



10. Sia dato il diagramma di Nyquist (per pulsazioni positive) della funzione $G(s) = \frac{8}{(s+2)^3}$. In base al criterio di Nyquist è possibile affermare che il sistema retroazionato $KG(s)$ è stabile per i seguenti valori di K

○ $K < K_1 \cup K > K_2$, dove $K_1 < 0$ e$K_2 > 0$
⊗ $K_1 < K < K_2$, dove $K_1 < 0$ e $K_2 > 0$
○ $0 < K < K_1$, dove $K_1 > 0$
○ $K > K_1$, dove $K_1 > 0$



Fondamenti di Controlli Automatici - A.A. 2013/14

23 luglio 2014 - Esercizi

Cognome	
Nome	
Matricola	
Corso	

a) Determinare la trasformata di Laplace $X_i(s)$ dei seguenti segnali temporali $x_i(t)$:

$$x_1(t) = 5\left(t^3 e^{2t} + \delta(t)\right), \qquad x_2(t) = 4 + 3e^{-t}\sin(2t)$$

Soluzione:

$$X_1(s) = 5\frac{3!}{(s-2)^4} + 5, \qquad X_2(s) = \frac{4}{s} + 3\frac{2}{(s+1)^2 + 2^2}$$

b) Calcolare la risposta impulsiva $g_i(t)$ delle seguenti funzioni di trasferimento $G_i(s)$:

$$G_1(s) = \frac{3s^2 + 22s + 16}{s(s+2)(s+4)}, \qquad G_2(s) = \frac{s-4}{(s+1)^2(s+3)}$$

Soluzione:
La funzione $G_1(s)$ può essere riscritta come

$$G_1(s) = \frac{2}{s} + \frac{4}{s+2} - \frac{3}{s+4}$$

pertanto la sua risposta impulsiva risulta

$$g_1(t) = 2 + 4e^{-2t} - 3e^{-4t}.$$

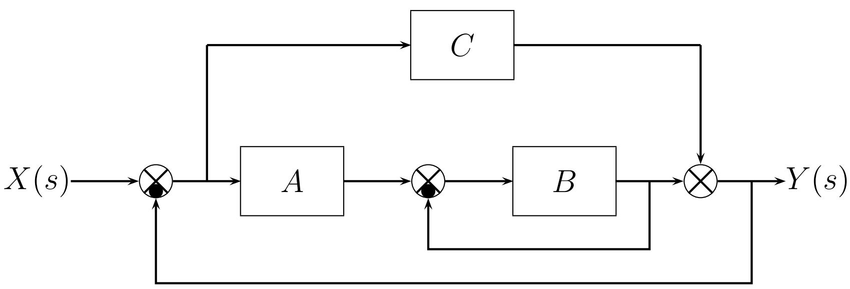
La funzione $G_2(s)$ può essere riscritta come

$$G_2(s) = -\frac{5}{2(s+1)^2} + \frac{7}{4(s+1)} - \frac{7}{4(s+3)}$$

pertanto la sua risposta impulsiva risulta

$$g_2(t) = -\frac{5}{2}te^{-t} + \frac{7}{4}e^{-t} - \frac{7}{4}e^{-3t}$$

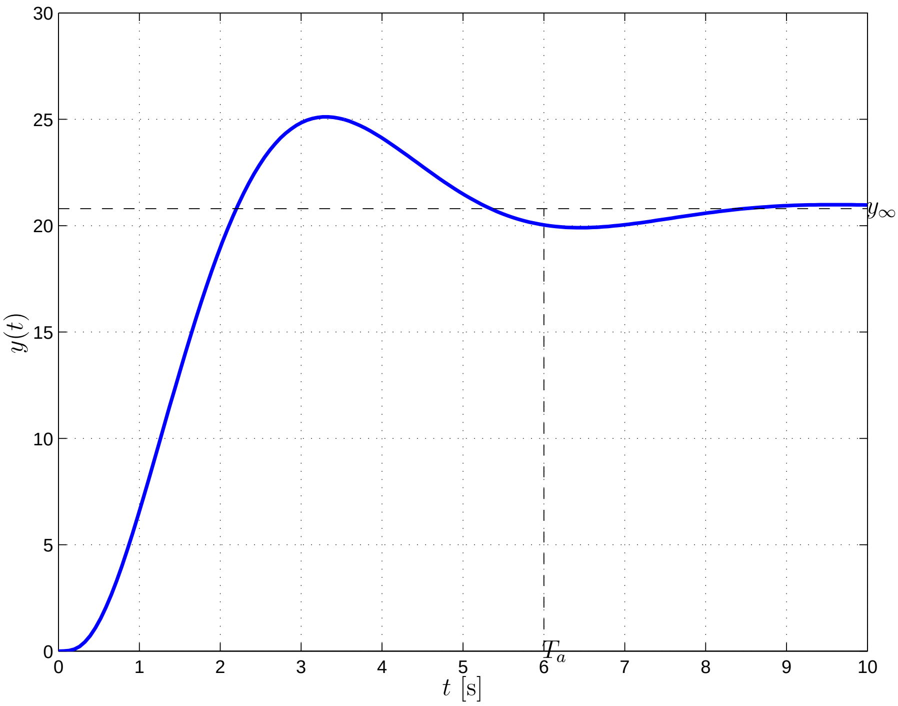
c) Dato il seguente schema a blocchi:



utilizzando la formula di Mason calcolare la funzione di trasferimento $G(s)$ che lega l'ingresso $X(s)$ all'uscita $Y(s)$:

$$G(s) = \frac{Y(s)}{X(s)} = \frac{AB + C(1+B)}{1 + AB + B + C + BC}$$

d) Sia data la funzione di trasferimento $G(s) = \dfrac{52(6s+26)}{(s+5)(s^2+s+1.25)(s^2+20s+104)}$.
Disegnare l'andamento qualitativo della risposta $y(t)$ a un gradino in ingresso di ampiezza 10, $x(t) = 10$. Calcolare il valore a regime y_∞ dell'uscita $y(t)$ del sistema, stimare qualitativamente il tempo di assestamento T_a del sistema e il periodo T_ω dell'eventuale oscillazione smorzata.
Soluzione: Il sistema ha una coppia di poli complessi coniugati dominanti $p_{1,2} = -0.5 \pm j1$ pertanto la risposta al gradino sarà di tipo oscillatorio smorzato. In figura è riportata la risposta del sistema.



Il valore a regime dell'uscita per un gradino in ingresso di ampiezza $A = 10$ risulta

$$y_\infty = A\,G(0) = 10 \cdot 2.08 = 20.8$$

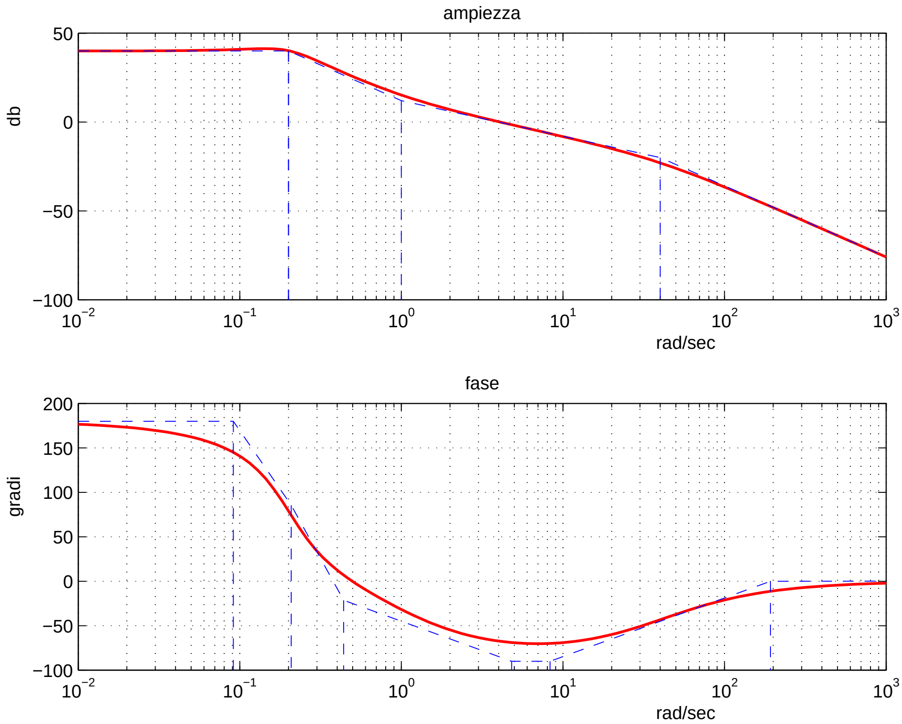
La parte reale tempo dei poli dominanti è $\sigma = -1/2$ per cui il tempo di assestamento T_a è

$$T_a = \frac{3}{|\sigma|} = 6 \text{ s},$$

mentre il periodo dell'oscillazione T_ω è dato da

$$T_\omega = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{2\pi}{1} = 2\pi \text{ s}$$

e) Facendo riferimento ai diagrammi di Bode della funzione $G(s)$ mostrati in figura

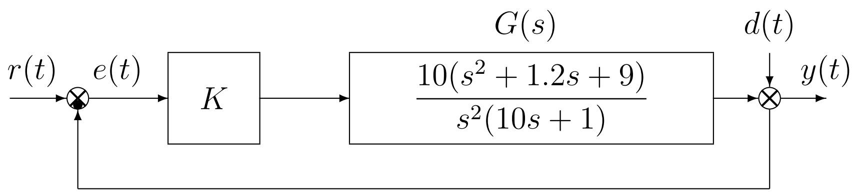


si ricavi l'espressione analitica della funzione $G(s)$.

<u>Soluzione</u>

$$G(s) = \frac{-160(s-1)}{(s-40)(s^2+0.2s+0.04)}$$

f) Sia dato il seguente sistema retroazionato:



f.1) Determinare per quali valori del parametro K il sistema retroazionato è asintoticamente stabile.

<u>Soluzione</u>

L'equazione caratteristica del sistema retroazionato è

$$1 + K\frac{10(s^2+1.2s+9)}{s^2(10s+1)} = 0 \qquad \rightarrow \qquad 10s^3 + (10K+1)s^2 + 12Ks + 90K = 0$$

La corrispondente tabella di Routh è la seguente

$$\begin{array}{c|cc ll} 3 & 10 & 12K & & \\ 2 & 10K+1 & 90K & \rightarrow & K > -0.1 \\ 1 & 24K(5K-37) & & \rightarrow & K < 0 \cup K > 7.4 \\ 0 & 90K & & \rightarrow & K > 0 \end{array}$$

Quindi il sistema retroazionato è asintoticamente stabile per:

$$K > 7.4 = K^*$$

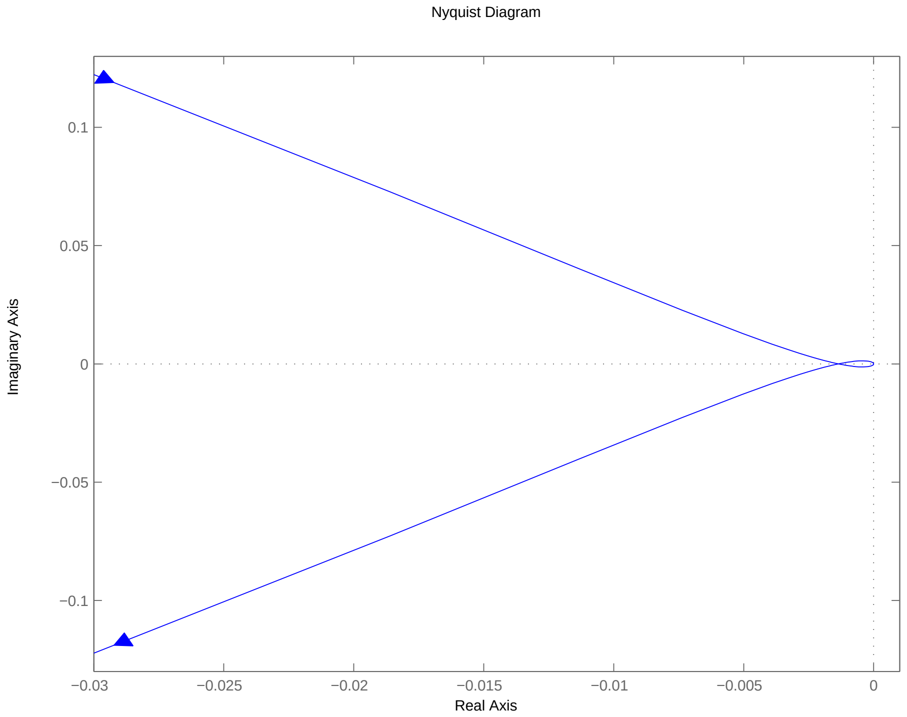
La pulsazione ω^* corrispondente al valore limite K^* è:

$$\omega^\star = \sqrt{\frac{12K^*}{10}} = 2.98 \text{ rad/s}$$

f.2) Posto $K = 0.01$ disegnare qualitativamente il diagramma di Nyquist completo della funzione d'anello $KG(s)$. Calcolare esattamente la posizione σ_0 di un eventuale asintoto, le eventuali intersezioni con l'asse reale e i corrispondenti valori delle pulsazioni.

Soluzione:

Il diagramma di Nyquist della funzione $G(s)$ è riportato in figura.



La funzione approssimante per $\omega \to 0$ è

$$G_0(s) = \frac{0.9}{s^2}$$

pertanto il diagramma parte all'infinito con fase iniziale $\varphi_0 = -\pi$.
La funzione approssimante per $\omega \to \infty$ è

$$G_\infty(s) = \frac{0.01}{s}$$

e quindi il diagramma giunge nell'origine con fase finale $\varphi_\infty = -\frac{\pi}{2}$.
Il parametro Δ_τ vale

$$\Delta_\tau = \frac{1.2}{9} - 10 = -9.87 < 0$$

pertanto il diagramma parte in ritardo rispetto alla fase iniziale φ_0.
Il sistema è di tipo 2 pertanto non esistono asintoti.
Il parametro Δ_p vale

$$\Delta_p = -1.2 + \frac{1}{10} = -1.1 < 0$$

pertanto il diagramma arriva in ritardo rispetto alla fase finale φ_∞.
Lo sfasamento complessivo è

$$\Delta\varphi = \pi - \frac{\pi}{2} = +\frac{\pi}{2}$$

Esiste un'unica intersezione con l'asse reale che, in virtù dell'analisi svolta con Routh al primo punto, risulta all'ascissa

$$\sigma^* = -K/K^* = -0.01/7.4 = -0.0014$$

La corrispondente pulsazione è $\omega^* = 2.98$.

f.3) Posto $K = 10$, calcolare l'errore a regime $e(\infty)$ quando sul sistema retroazionato agiscono contemporaneamente il segnale $r(t) = 5t + 2\cos t$ e il disturbo $d(t) = 0$.

Soluzione:

Dato che il sistema è lineare e soggetto quindi alla sovrapposizione degli effetti, l'errore $E(s)$, espresso mediante la trasformata di Laplace, risulterà:

$$E(s) = E_r(s) + E_d(s)$$

dove $E_r(s)$ è l'errore dovuto al riferimento mentre $E_d(s)$ è l'errore dovuto al disturbo. Essendo il disturbo nullo, il contributo di questo sull'errore sarà nullo. Si consideri il segnale di riferimento espresso come $r(t) = r_1(t) + r_2(t)$ dove $r_1(t) = 5t$ e $r_2(t) = 2\cos t$. L'errore $e_r(\infty)$ dovuto al riferimento può essere quindi espresso come $e_r(\infty) = e_{r1}(\infty) + e_{r2}(\infty)$ dove $e_{r1}(\infty)$ è il contributo dato dal segnale $r_1(t)$ e $e_{r2}(\infty)$ è il contributo dato dal segnale $r_2(t)$. Dato che il sistema considerato è di tipo 2 e il segnale $r_1(t)$ è a rampa, allora $e_{r1}(\infty) = 0$. Essendo $r_2(t)$ un segnale sinusoidale, per trovarne la risposta a regime si sfrutta il concetto di risposta armonica, per cui $e_{r2}(\infty) = 2|F_r(j1)|\cos(t + \arg\{F_r(j1)\})$ dove F_r è la funzione di trasferimento tra l'ingresso $r(t)$ e l'uscita $e(t)$:

$$F_r = \frac{1}{1 + KG(s)} = \frac{s^3 + 0.1s^2}{s^3 + 10.1s^2 + 12s + 90}$$

Si ha $|F_r(j1)| = 0.0125$ e $\arg\{F_r(j1)\} \simeq 256^o$. In conclusione

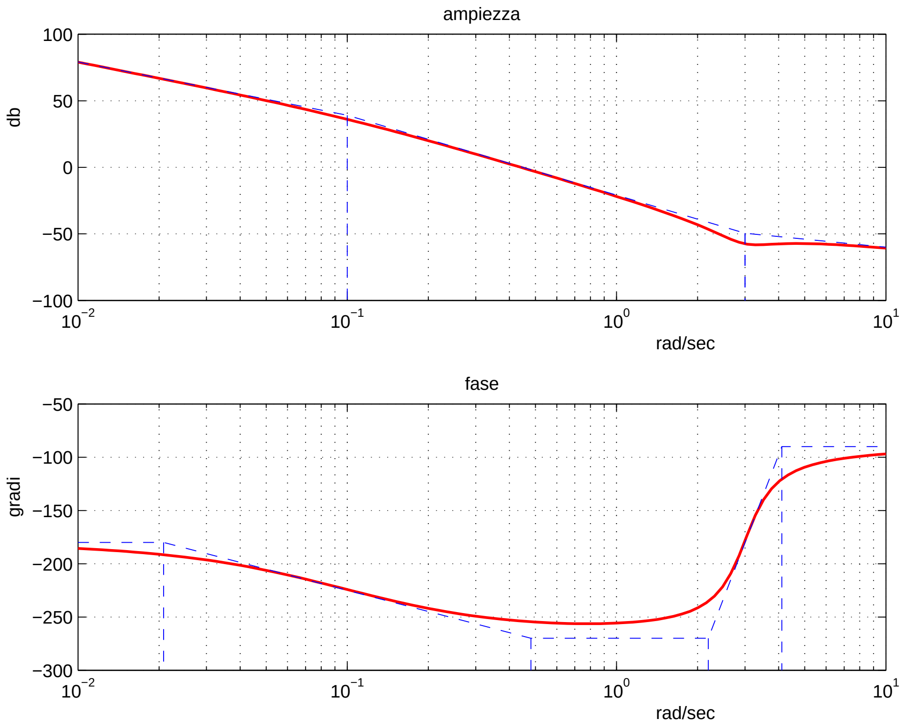
$$e(\infty) = e_{r2}(\infty) = 0.025\cos(t + 256^o)$$

f.4) Posto $K = 0.01$, tracciare (nello schema fornito in allegato) i diagrammi di Bode delle ampiezze e delle fasi del guadagno di anello $K\,G(s)$.

Soluzione:

In figura sono riportati i diagrammi di Bode del sistema. Sul diagramma asintotico delle ampiezze il guadagno β in corrispondenza della pulsazione $\omega = 0.1$ è $\beta = \left|\frac{0.9}{0.1^2}\right| = 90 = 39$ dB.

Il coefficiente di smorzamento della coppia di zeri complessi coniugati è $\delta = 0.2$ pertanto si avrà $M_{\omega_n} = \frac{1}{2\delta} = 2.5 \simeq 8$ dB.



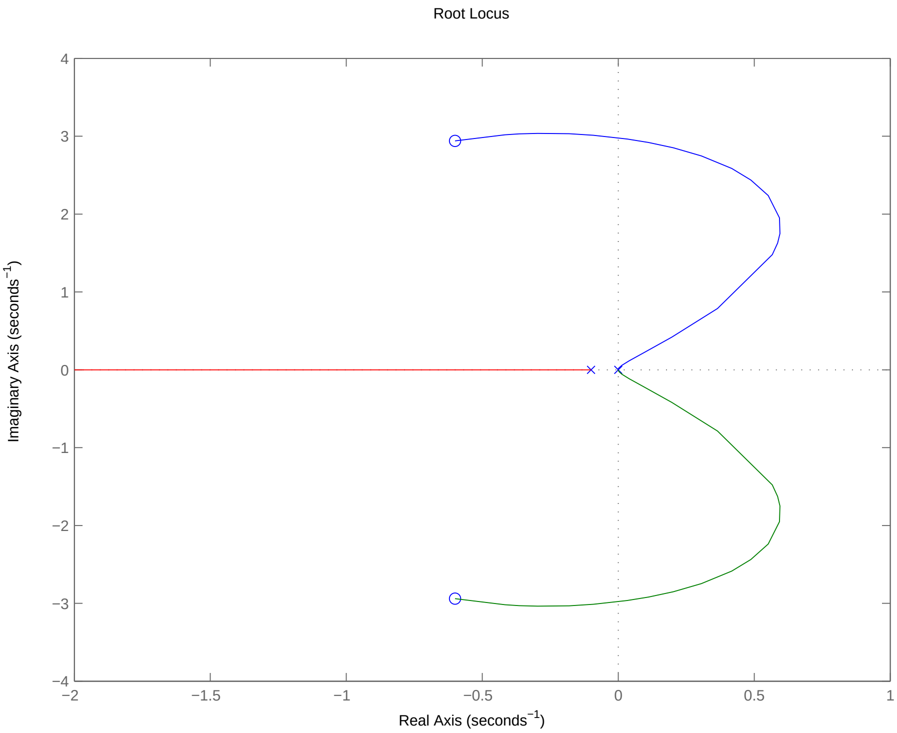
g) **Non è richiesto lo svolgimento di questo esercizio agli iscritti ad Ingegneria Ambientale o a corsi per i quali l'esame è inferiore a 6 CFU.**

Con riferimento al sistema descritto nell'esercizio f), tracciare qualitativamente il luogo delle radici del sistema retroazionato per valori positivi del parametro K. Determinare esattamente gli asintoti, il centro degli asintoti, le intersezioni con l'asse immaginario e i corrispondenti valori del guadagno K. Determinare gli eventuali punti di diramazione solo qualitativamente.

Soluzione: Essendo 1 il grado relativo del sistema, esise 1 solo asintoto che giace sull'asse reale, in particolare sul semiasse reale negativo essendo $K > 0$. Si può ugualmente calcolare il centro di ascissa

$$\sigma_a = \frac{1}{1}(-0.1 + 1.2) = 1.1$$

Il luogo delle radici finale è riportato nella seguente figura.



Dall'analisi svolta mediante il criterio di Routh, risulta che il luogo delle radici attraversa l'asse immaginario in corrispondenza di $\pm j\omega^* = \pm j2.98$ per $K = K^* = 7.4$.

Fondamenti di Controlli Automatici

Diagrammi di Bode

Cognome	
Nome	
Matricola	
Corso