

Fondamenti di Controlli Automatici -
A.A. 2012/13
11 giugno 2014 - Quiz di Teoria

| | |
|-----------|--|
| Cognome | |
| Nome | |
| Matricola | |
| Corso | |

Per ciascuno dei test a soluzione multipla segnare con una crocetta tutte le affermazioni che si ritengono giuste. In ogni quiz almeno una affermazione è corretta.

La prova di teoria si ritiene superata se vengono totalizzati almeno 5 punti su 10; diversamente il compito verrà ritenuto insufficiente a prescindere dal risultato della seconda parte della prova (esercizi).

1. La funzione di trasferimento $G(s) = \frac{Y(s)}{X(s)} = \frac{2s^2 + 5s + 1}{s^3 + 4s^2 + 2}$ corrisponde all'equazione differenziale:

- $2x(t) + 4\ddot{x}(t) + \ddot{\ddot{x}}(t) = y(t) + 5\dot{y}(t) + 2\ddot{y}(t)$
- $2y(t) + 4\dot{y}(t) + \ddot{y}(t) = x(t) + 5\dot{x}(t) + 2\ddot{x}(t)$
- $2\dot{y}(t) + 4\ddot{y}(t) + \ddot{\ddot{y}}(t) = x(t) + 5\dot{x}(t) + 2\ddot{x}(t)$
- nessuna delle precedenti

2. La risposta a regime $y(t)$ del sistema $G(s) = \frac{6}{s+3}$ quando in ingresso è presente il segnale $x(t) = 4 \sin(3t)$ è:

- $y(t) \simeq 2\sqrt{2} \sin(3t + \frac{\pi}{4})$
- $y(t) \simeq 4\sqrt{2} \sin(3t + \frac{\pi}{4})$
- $y(t) \simeq 2\sqrt{2} \sin(3t - \frac{\pi}{4})$
- $y(t) \simeq 4\sqrt{2} \sin(3t - \frac{\pi}{4})$

3. Sia $F(s)$ la trasformata di Laplace della funzione del tempo $f(t)$, $\mathcal{L}[f(t)] = F(s)$ (con $f(t)$ nulla per $t < 0$). La proprietà di traslazione nel tempo delle trasformate di Laplace afferma che:

- $\mathcal{L}[f(t - t_0)] = e^{t_0} F(s)$
- $\mathcal{L}[f(t - t_0)] = e^{-t_0 s} F(s)$
- $\mathcal{L}[f(t - t_0)] = e^{-s} F(s)$
- $\mathcal{L}[f(t - t_0)] = e^{s/t_0} F(s)$

4. Un sistema di tipo 2:

- ha un errore a regime costante e non nullo nella risposta al gradino
- ha un errore a regime nullo nella risposta al gradino
- ha un errore a regime nullo nella risposta alla rampa
- ha un errore a regime costante e non nullo nella risposta alla rampa

5. La massima sovraelongazione percentuale $S\%$ in un sistema del 2° ordine è:

- $S\% = 100 e^{\frac{\pi\delta}{\sqrt{1-\delta^2}}}$
- $S\% = 100 e^{-\frac{\pi\delta}{\sqrt{1-\delta^2}}}$
- $S\% = 100 e^{\frac{\pi\sqrt{1-\delta^2}}{\delta}}$
- $S\% = 100 e^{-\frac{\pi\sqrt{1-\delta^2}}{\delta}}$

6. Nella scomposizione in fratti semplici, qual è la posizione $p_{1,2} = \sigma \pm j\omega$ e il grado di molteplicità ν della coppia di poli complessi coniugati corrispondente all'andamento temporale $g(t) = 4t^2 e^{3t} \sin(5t)$?

- $p_{1,2} = 5 \pm j3$ e $\nu = 3$
- $p_{1,2} = 3 \pm j5$ e $\nu = 3$
- $p_{1,2} = 3 \pm j5$ e $\nu = 2$
- $p_{1,2} = 5 \pm j3$ e $\nu = 2$

7. Il valore finale della risposta all'impulso del sistema $G(s) = \frac{2(s+2)}{s(5s+1)(s+8)}$ è:

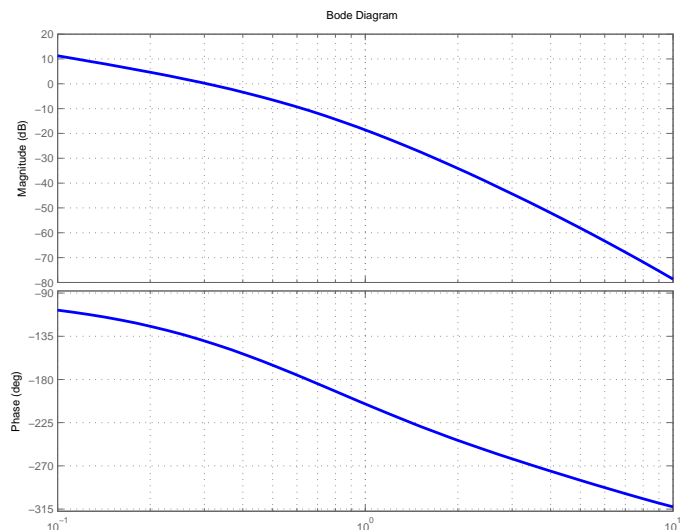
- $y_\infty = \frac{1}{2}$
- $y_\infty = \frac{2}{5}$
- $y_\infty = \frac{1}{4}$
- $y_\infty = 0$

8. Posto $a_0 \neq 0$, l'equazione ausiliaria che si ottiene dalla tabella di Routh quando tutti gli elementi di una riga si annullano:

- è composta solo da termini di grado pari in s
- è composta solo da termini di grado dispari in s
- ha radici simmetriche rispetto all'asse immaginario
- ha radici simmetriche rispetto all'asse reale

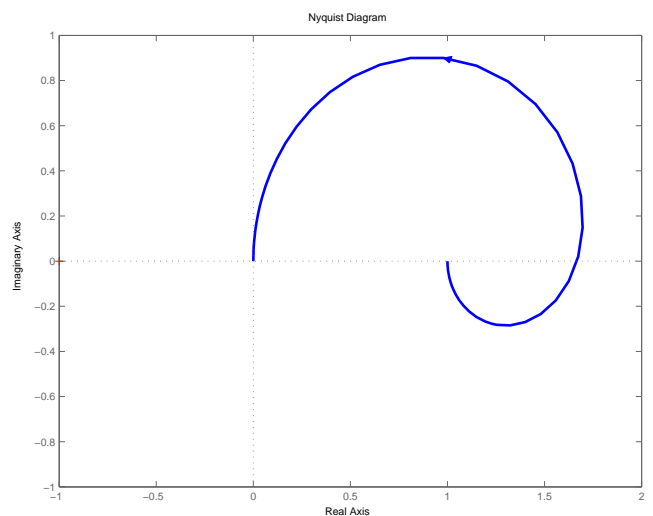
9. Si faccia riferimento ai diagrammi di Bode riportati a fianco relativi a un sistema $G(s)$ a fase minima. Il margine di ampiezza M_α e il margine di fase M_φ sono:

- $M_\alpha \simeq -10$ dB e $M_\varphi \simeq -44^\circ$
- $M_\alpha \simeq 10$ dB e $M_\varphi \simeq 44^\circ$
- $M_\alpha \simeq 10$ dB e $M_\varphi \simeq -44^\circ$
- $M_\alpha \simeq -10$ dB e $M_\varphi \simeq 44^\circ$



10. Sia dato il diagramma di Nyquist (per pulsazioni positive) della funzione $G(s) = \frac{60(3-s)}{(s-6)(s-30)}$. In base al criterio di Nyquist è possibile affermare che il sistema retroazionato $KG(s)$ è stabile per i seguenti valori di K

- $-\infty < K_1^* < K < 0$
- $K_1^* < K < K_2^* < 0$
- $-\infty < K < K_2^* < 0$
- nessuno dei precedenti



| | |
|-----------|--|
| Cognome | |
| Nome | |
| Matricola | |
| Corso | |

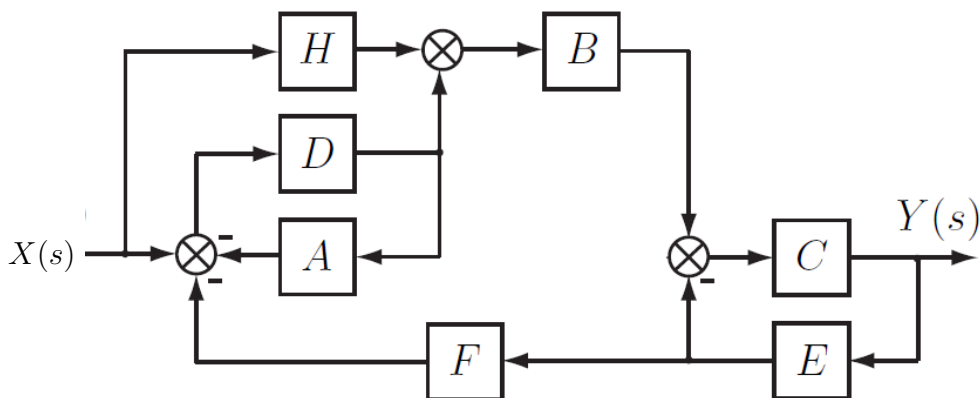
a) Determinare la trasformata di Laplace $X_i(s)$ dei seguenti segnali temporali $x_i(t)$:

$$x_1(t) = (3e^{-t} + 4) \cos(5t), \quad x_2(t) = \frac{1}{2} + 5e^{-2t} t^3$$

b) Calcolare la risposta impulsiva $g_i(t)$ delle seguenti funzioni di trasferimento $G_i(s)$:

$$G_1(s) = \frac{11s^2 + 51s + 30}{s^3 + 8s^2 + 15s}, \quad G_2(s) = 2 + \frac{24}{(s-1)^2 + 9}$$

c) Dato il seguente schema a blocchi:



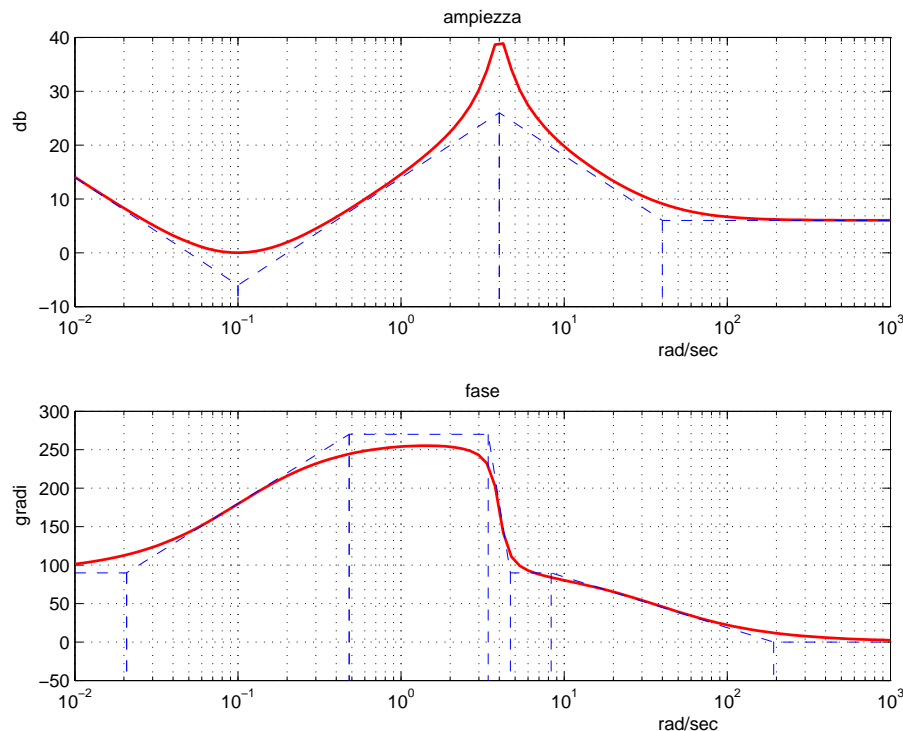
utilizzando la formula di Mason calcolare la funzione di trasferimento $G(s)$ che lega l'ingresso $X(s)$ all'uscita $Y(s)$:

$$G(s) = \frac{Y(s)}{X(s)} =$$

d) Sia data la funzione di trasferimento $G(s) = \frac{2(s+4)}{(1+0.05s)(s+10)(s^2+4s+25)}$.

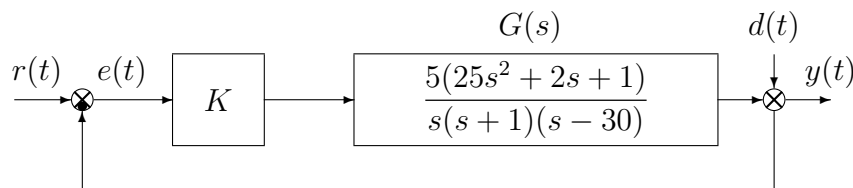
Disegnare l'andamento qualitativo della risposta $y(t)$ a un gradino in ingresso di ampiezza 100, $x(t) = 100$. Calcolare il valore a regime y_∞ dell'uscita $y(t)$ del sistema, stimare qualitativamente il tempo di assestamento T_a del sistema e il periodo T_w dell'eventuale oscillazione smorzata.

e) Facendo riferimento ai diagrammi di Bode della funzione $G(s)$ mostrati in figura



si ricavi l'espressione analitica della funzione $G(s)$.

f) Sia dato il seguente sistema retroazionato:



- f.1) Determinare per quali valori del parametro K il sistema retroazionato è asintoticamente stabile.
- f.2) Posto $K = 1$ disegnare qualitativamente il diagramma di Nyquist completo della funzione d'anello $KG(s)$. Calcolare esattamente la posizione σ_0 di un eventuale asintoto, le eventuali intersezioni con l'asse reale e i corrispondenti valori delle pulsazioni.
- f.3) Posto $K = 4$, calcolare l'errore a regime $e(\infty)$ quando sul sistema retroazionato agiscono contemporaneamente il segnale $r(t) = 2$ e il disturbo $d(t) = 10 \sin(t + \frac{\pi}{3})$.
- f.4) Posto $K = 10$, tracciare (nello schema fornito in allegato) i diagrammi di Bode delle ampiezze e delle fasi del guadagno di anello $KG(s)$.

g) **Non è richiesto lo svolgimento di questo esercizio agli iscritti ad Ingegneria Ambientale o a corsi per i quali l'esame è inferiore a 6 CFU.**

Con riferimento al sistema descritto nell'esercizio f), tracciare qualitativamente il luogo delle radici del sistema retroazionato per valori positivi del parametro K . Determinare esattamente gli asintoti, il centro degli asintoti, le intersezioni con l'asse immaginario e i corrispondenti valori del guadagno K . Determinare gli eventuali punti di diramazione solo qualitativamente.

Fondamenti di Controlli Automatici -
A.A. 2012/13
11 giugno 2014 - Quiz di Teoria

| | |
|-----------|--|
| Cognome | |
| Nome | |
| Matricola | |
| Corso | |

Per ciascuno dei test a soluzione multipla segnare con una crocetta tutte le affermazioni che si ritengono giuste. In ogni quiz almeno una affermazione è corretta.

La prova di teoria si ritiene superata se vengono totalizzati almeno 5 punti su 10; diversamente il compito verrà ritenuto insufficiente a prescindere dal risultato della seconda parte della prova (esercizi).

- La funzione di trasferimento $G(s) = \frac{Y(s)}{X(s)} = \frac{2s^2 + 5s + 1}{s^3 + 4s^2 + 2}$ corrisponde all'equazione differenziale:
 - $2x(t) + 4\ddot{x}(t) + \ddot{\ddot{x}}(t) = y(t) + 5\dot{y}(t) + 2\ddot{y}(t)$
 - $2y(t) + 4\ddot{y}(t) + \ddot{\ddot{y}}(t) = x(t) + 5\dot{x}(t) + 2\ddot{x}(t)$
 - $2\dot{y}(t) + 4\ddot{y}(t) + \ddot{\ddot{y}}(t) = x(t) + 5\dot{x}(t) + 2\ddot{x}(t)$
 - nessuna delle precedenti
- La risposta a regime $y(t)$ del sistema $G(s) = \frac{6}{s+3}$ quando in ingresso è presente il segnale $x(t) = 4 \sin(3t)$ è:
 - $y(t) \simeq 2\sqrt{2} \sin(3t + \frac{\pi}{4})$
 - $y(t) \simeq 4\sqrt{2} \sin(3t + \frac{\pi}{4})$
 - $y(t) \simeq 2\sqrt{2} \sin(3t - \frac{\pi}{4})$
 - $y(t) \simeq 4\sqrt{2} \sin(3t - \frac{\pi}{4})$
- Sia $F(s)$ la trasformata di Laplace della funzione del tempo $f(t)$, $\mathcal{L}[f(t)] = F(s)$ (con $f(t)$ nulla per $t < 0$). La proprietà di traslazione nel tempo delle trasformate di Laplace afferma che:
 - $\mathcal{L}[f(t - t_0)] = e^{t_0} F(s)$
 - $\mathcal{L}[f(t - t_0)] = e^{-t_0 s} F(s)$
 - $\mathcal{L}[f(t - t_0)] = e^{-s} F(s)$
 - $\mathcal{L}[f(t - t_0)] = e^{s/t_0} F(s)$
- Un sistema di tipo 2:
 - ha un errore a regime costante e non nullo nella risposta al gradino
 - ha un errore a regime nullo nella risposta al gradino
 - ha un errore a regime nullo nella risposta alla rampa
 - ha un errore a regime costante e non nullo nella risposta alla rampa
- La massima sovraelongazione percentuale $S\%$ in un sistema del 2° ordine è:
 - $S\% = 100 e^{\frac{\pi\delta}{\sqrt{1-\delta^2}}}$
 - $S\% = 100 e^{-\frac{\pi\delta}{\sqrt{1-\delta^2}}}$
 - $S\% = 100 e^{\frac{\pi\sqrt{1-\delta^2}}{\delta}}$
 - $S\% = 100 e^{-\frac{\pi\sqrt{1-\delta^2}}{\delta}}$

6. Nella scomposizione in fratti semplici, qual è la posizione $p_{1,2} = \sigma \pm j\omega$ e il grado di molteplicità ν della coppia di poli complessi coniugati corrispondente all'andamento temporale $g(t) = 4t^2 e^{3t} \sin(5t)$?

- $p_{1,2} = 5 \pm j3$ e $\nu = 3$
- $p_{1,2} = 3 \pm j5$ e $\nu = 3$
- $p_{1,2} = 3 \pm j5$ e $\nu = 2$
- $p_{1,2} = 5 \pm j3$ e $\nu = 2$

7. Il valore finale della risposta all'impulso del sistema $G(s) = \frac{2(s+2)}{s(5s+1)(s+8)}$ è:

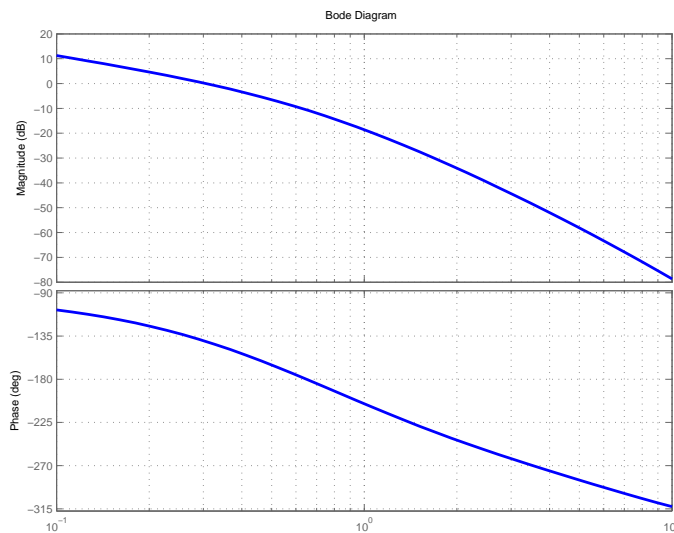
- $y_\infty = \frac{1}{2}$
- $y_\infty = \frac{2}{5}$
- $y_\infty = \frac{1}{4}$
- $y_\infty = 0$

8. Posto $a_0 \neq 0$, l'equazione ausiliaria che si ottiene dalla tabella di Routh quando tutti gli elementi di una riga si annullano:

- è composta solo da termini di grado pari in s
- è composta solo da termini di grado dispari in s
- ha radici simmetriche rispetto all'asse immaginario
- ha radici simmetriche rispetto all'asse reale

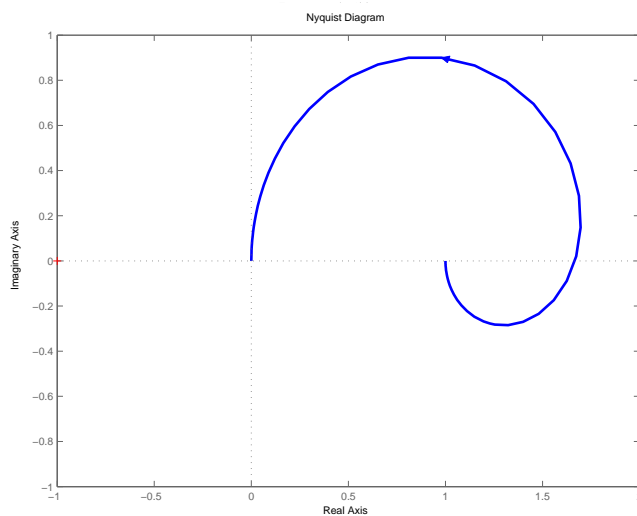
9. Si faccia riferimento ai diagrammi di Bode riportati a fianco relativi a un sistema $G(s)$ a fase minima. Il margine di ampiezza M_α e il margine di fase M_φ sono:

- $M_\alpha \simeq -10$ dB e $M_\varphi \simeq -44^\circ$
- $M_\alpha \simeq 10$ dB e $M_\varphi \simeq 44^\circ$
- $M_\alpha \simeq 10$ dB e $M_\varphi \simeq -44^\circ$
- $M_\alpha \simeq -10$ dB e $M_\varphi \simeq 44^\circ$



10. Sia dato il diagramma di Nyquist (per pulsazioni positive) della funzione $G(s) = \frac{60(3-s)}{(s-6)(s-30)}$. In base al criterio di Nyquist è possibile affermare che il sistema retroazionato $KG(s)$ è stabile per i seguenti valori di K

- $-\infty < K_1^* < K < 0$
- $K_1^* < K < K_2^* < 0$
- $-\infty < K < K_2^* < 0$
- nessuno dei precedenti



| | |
|-----------|--|
| Cognome | |
| Nome | |
| Matricola | |
| Corso | |

a) Determinare la trasformata di Laplace $X_i(s)$ dei seguenti segnali temporali $x_i(t)$:

$$x_1(t) = (3e^{-t} + 4) \cos(5t), \quad x_2(t) = \frac{1}{2} + 5e^{-2t} t^3$$

Soluzione:

$$X_1(s) = 3 \frac{s+1}{(s+1)^2 + 25} + \frac{4s}{s^2 + 25}, \quad X_2(s) = \frac{1}{2s} + \frac{30}{(s+2)^4}$$

b) Calcolare la risposta impulsiva $g_i(t)$ delle seguenti funzioni di trasferimento $G_i(s)$:

$$G_1(s) = \frac{11s^2 + 51s + 30}{s^3 + 8s^2 + 15s}, \quad G_2(s) = 2 + \frac{24}{(s-1)^2 + 9}$$

Soluzione:

La funzione $G_1(s)$ può essere riscritta come

$$G_1(s) = \frac{4}{s+3} + \frac{5}{s+5} + \frac{2}{s}$$

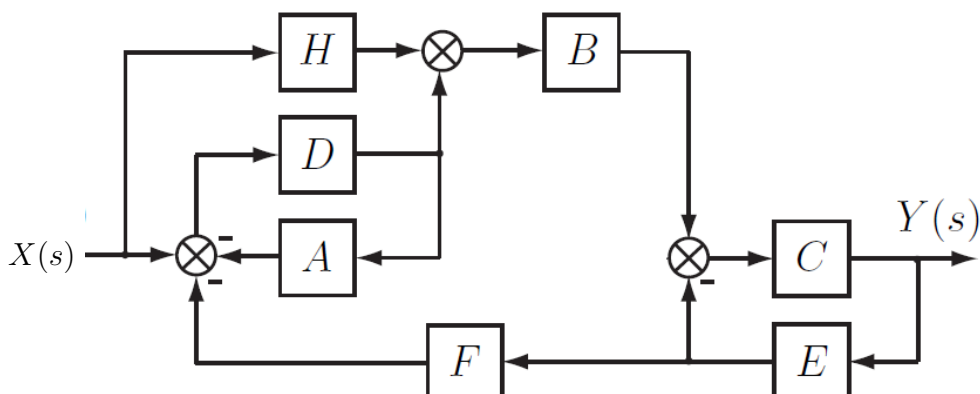
pertanto la sua risposta impulsiva risulta

$$g_1(t) = 4e^{-3t} + 5e^{-5t} + 2.$$

La risposta impulsiva della funzione $G_2(s)$ risulta

$$g_2(t) = 2\delta(t) + 8e^t \sin(3t)$$

c) Dato il seguente schema a blocchi:

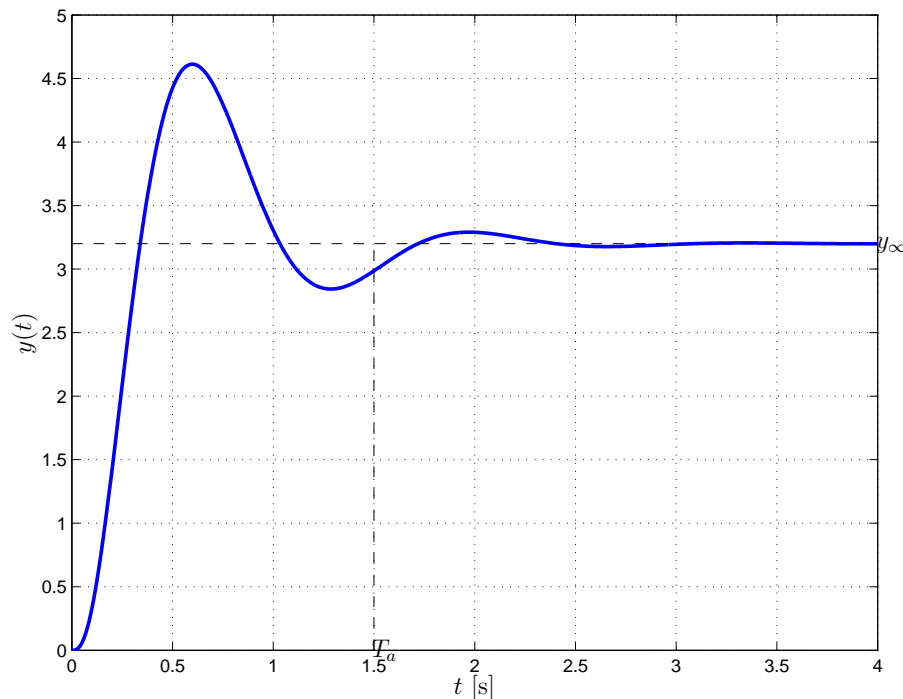


utilizzando la formula di Mason calcolare la funzione di trasferimento $G(s)$ che lega l'ingresso $X(s)$ all'uscita $Y(s)$:

$$G(s) = \frac{Y(s)}{X(s)} = \frac{HBC(1 + DA) + DBC}{1 + AD + CE + DBCEF + ADCE}$$

d) Sia data la funzione di trasferimento $G(s) = \frac{2(s+4)}{(1+0.05s)(s+10)(s^2+4s+25)}$.

Disegnare l'andamento qualitativo della risposta $y(t)$ a un gradino in ingresso di ampiezza 100, $x(t) = 100$. Calcolare il valore a regime y_∞ dell'uscita $y(t)$ del sistema, stimare qualitativamente il tempo di assestamento T_a del sistema e il periodo T_ω dell'eventuale oscillazione smorzata. Soluzione: Il sistema ha una coppia di poli complessi coniugati dominanti $p_{1,2} = -2 \pm j4.58$ pertanto la risposta al gradino sarà di tipo oscillatorio smorzato. In figura è riportata la risposta del sistema.



Il valore a regime dell'uscita per un gradino in ingresso di ampiezza $A = 100$ risulta

$$y_\infty = A G(0) = 100 \cdot 0.032 = 3.2$$

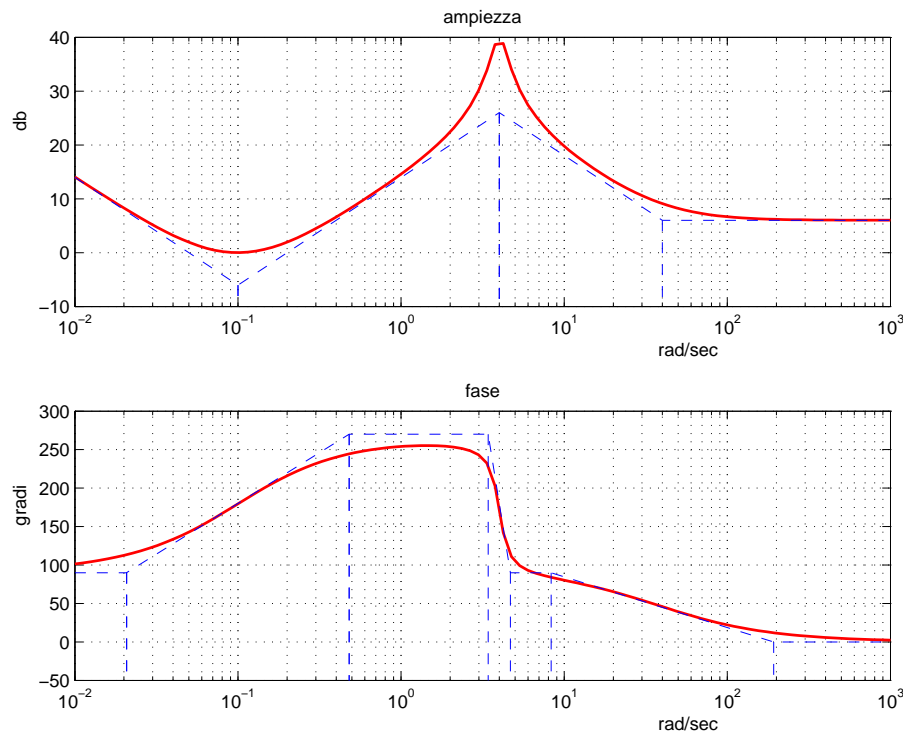
La costante di tempo dei poli dominanti è $\tau = 1/2$ per cui il tempo di assestamento T_a è

$$T_a = 3\tau = 1.5 \text{ s},$$

mentre il periodo dell'oscillazione T_ω è dato da

$$T_\omega = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{2\pi}{4.58} = 1.37 \text{ s}$$

e) Facendo riferimento ai diagrammi di Bode della funzione $G(s)$ mostrati in figura

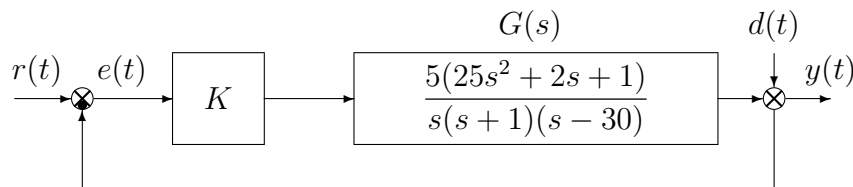


si ricavi l'espressione analitica della funzione $G(s)$.

Soluzione

$$G(s) = \frac{2(s + 0.1)^2(s - 40)}{s(s^2 + 0.8s + 4^2)}$$

f) Sia dato il seguente sistema retroazionato:



f.1) Determinare per quali valori del parametro K il sistema retroazionato è asintoticamente stabile.

Soluzione:

l'equazione caratteristica del sistema retroazionato è

$$1 + K \frac{5(25s^2 + 2s + 1)}{s(s + 1)(s - 30)} = 0 \quad \rightarrow \quad s^3 + (125K - 29)s^2 + (10K - 30)s + 5K = 0$$

La corrispondente tabella di Routh è la seguente

| | | | |
|---|--------------------------|----------|---------------------------------------|
| 3 | 1 | 10K - 30 | |
| 2 | 125K - 29 | 5K | $\rightarrow K > 0.232$ |
| 1 | $5(174 - 809K + 250K^2)$ | | $\rightarrow K < 0.23 \cup K > 3.004$ |
| 0 | 5K | | $\rightarrow K > 0$ |

Quindi il sistema retroazionato è asintoticamente stabile per:

$$K > 3.004 = K^*$$

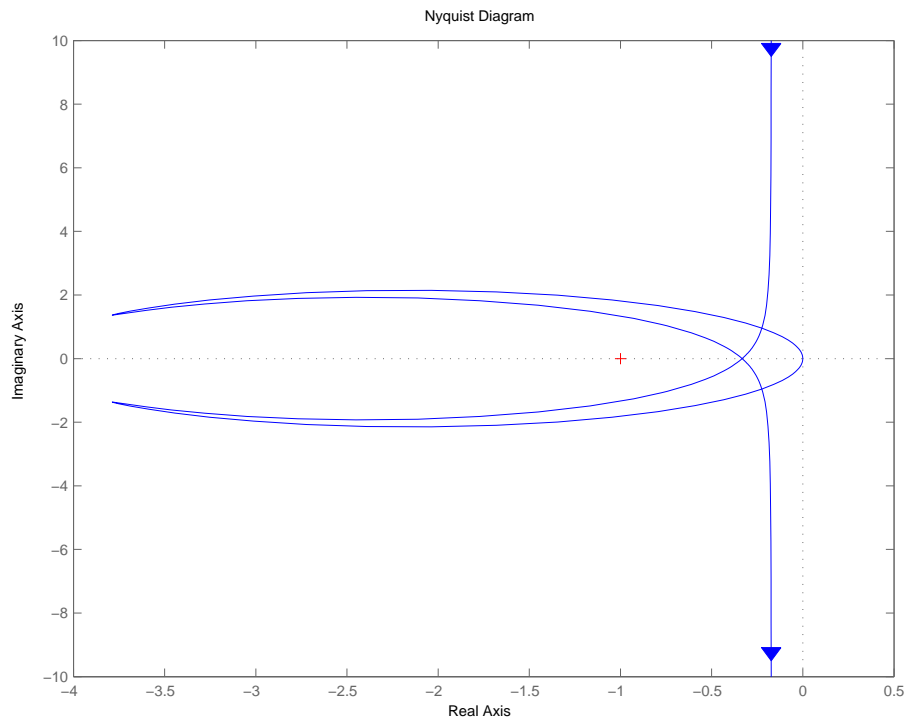
La pulsazione ω^* corrispondente al valore limite K^* è:

$$\omega^* = \sqrt{\frac{10K^* - 30}{1}} = 0.2 \text{ rad/s}$$

f.2) Posto $K = 1$ disegnare qualitativamente il diagramma di Nyquist completo della funzione d'anello $KG(s)$. Calcolare esattamente la posizione σ_0 di un eventuale asintoto, le eventuali intersezioni con l'asse reale e i corrispondenti valori delle pulsazioni.

Soluzione:

Il diagramma di Nyquist della funzione $G(s)$ è riportato in figura.



La funzione approssimante per $\omega \rightarrow 0$ è

$$G_0(s) = -\frac{1}{6s}$$

pertanto il diagramma parte all'infinito con fase iniziale $\varphi_0 = -\frac{3}{2}\pi$.

La funzione approssimante per $\omega \rightarrow \infty$ è

$$G_\infty(s) = \frac{125}{s}$$

e quindi il diagramma giunge nell'origine con fase finale $\varphi_\infty = -\frac{\pi}{2}$.

Il parametro Δ_τ vale

$$\Delta_\tau = 2 - 1 + \frac{1}{30} = 1.03 > 0$$

pertanto il diagramma parte in anticipo rispetto alla fase iniziale φ_0 .

Il sistema è di tipo 1 pertanto esiste un asintoto verticale la cui ascissa è

$$\sigma_0 = -\frac{1}{6}\Delta_\tau = -0.171$$

Il parametro Δ_p vale

$$\Delta_p = -\frac{2}{25} + 1 - 30 = -29.08 < 0$$

pertanto il diagramma arriva in ritardo rispetto alla fase finale φ_∞ .

Lo sfasamento complessivo è

$$\Delta\varphi = \pi - \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2} = \pi$$

Esiste un'unica intersezione con l'asse reale che, in virtù dell'analisi svolta con Routh al primo punto, risulta all'ascissa

$$\sigma^* = -1/K^* = -1/3.004 = -0.33$$

La corrispondente pulsazione è $\omega^* = 0.2$.

- f.3) Posto $K = 4$, calcolare l'errore a regime $e(\infty)$ quando sul sistema retroazionato agiscono contemporaneamente il segnale $r(t) = 2$ e il disturbo $d(t) = 10 \sin(t + \frac{\pi}{3})$.

Soluzione:

Dato che il sistema è lineare e soggetto quindi alla sovrapposizione degli effetti, l'errore $E(s)$, espresso mediante la trasformata di Laplace, risulterà:

$$E(s) = E_r(s) + E_d(s)$$

dove $E_r(s)$ è l'errore dovuto al riferimento mentre $E_d(s)$ è l'errore dovuto al disturbo. L'errore $e_r(\infty)$ dovuto al riferimento sarà nullo $e_r(\infty) = 0$ in quanto il sistema considerato è di tipo 1.

L'errore dovuto al disturbo $d(t)$ è dato da:

$$E_d(s) = F_d(s)D(s)$$

dove $D(s)$ è la trasformata di Laplace di $d(t)$ e $F_d(s)$ è la funzione di trasferimento tra $D(s)$ e $E_d(s)$ che vale

$$F_d(s) = -\frac{1}{1 + KG(s)} = \frac{-s^3 + 29s^2 + 30s}{s^3 + 471s^2 + 10s + 20}$$

Essendo $d(t)$ un segnale sinusoidale, per trovarne la risposta a regime si sfrutta il concetto di risposta armonica, per cui $e_d(t) = 10|F_d(j1)| \sin(t + \frac{\pi}{3} + \arg\{F_d(j1)\})$ con $|F_d(j1)| = 0.0941$ e $\arg\{F_d(j1)\} \simeq 314.23^\circ$. In conclusione

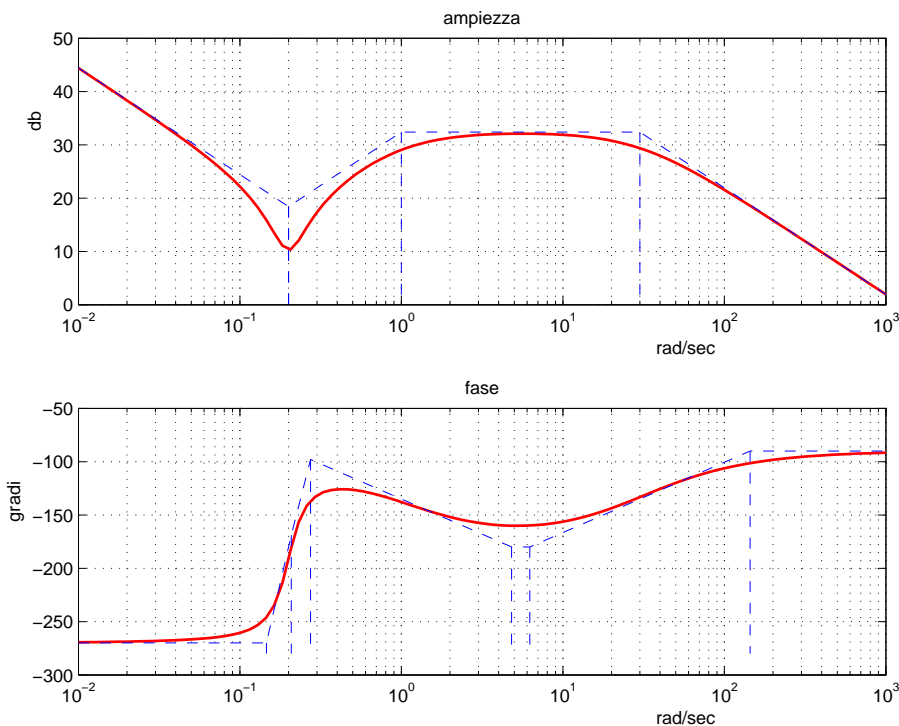
$$e(\infty) = e_r(\infty) + e_d(\infty) = 0 + 0.941 \cos(t + 14.23^\circ)$$

- f.4) Posto $K = 10$, tracciare (nello schema fornito in allegato) i diagrammi di Bode delle ampiezze e delle fasi del guadagno di anello $KG(s)$.

Soluzione:

In figura sono riportati i diagrammi di Bode del sistema. Sul diagramma asintotico delle ampiezze il guadagno β in corrispondenza della pulsazione $\omega = 0.2$ è $\beta = \left| -\frac{10}{6 \cdot 0.2} \right| = 8.33 = 18.4 \text{ dB}$.

Il coefficiente di smorzamento della coppia di zeri complessi coniugati è $\delta = 0.2$ pertanto si avrà $M_{\omega_n} = \frac{1}{2\delta} = 2.5 \simeq 8 \text{ dB}$.



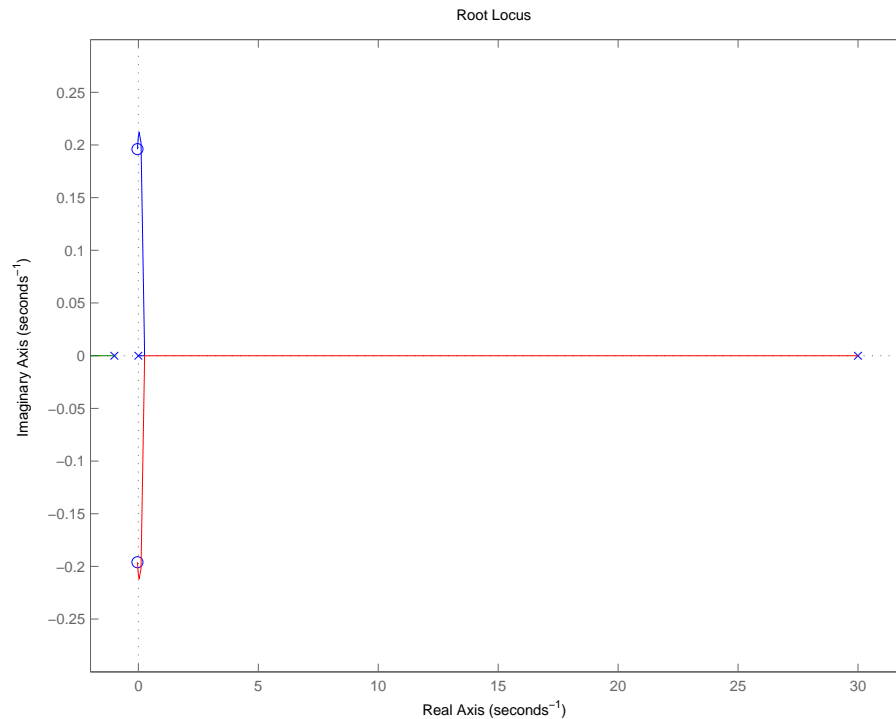
g) **Non è richiesto lo svolgimento di questo esercizio agli iscritti ad Ingegneria Ambientale o a corsi per i quali l'esame è inferiore a 6 CFU.**

Con riferimento al sistema descritto nell'esercizio f), tracciare qualitativamente il luogo delle radici del sistema retroazionato per valori positivi del parametro K . Determinare esattamente gli asintoti, il centro degli asintoti, le intersezioni con l'asse immaginario e i corrispondenti valori del guadagno K . Determinare gli eventuali punti di diramazione solo qualitativamente.

Soluzione: Essendo 1 il grado relativo del sistema, esiste 1 solo asintoto che giace sull'asse reale, in particolare sul semiasse reale negativo essendo $K > 0$. Si può ugualmente calcolare il centro di ascissa

$$\sigma_a = \frac{1}{1}(-1 + 30 + 0.08) = 29.08$$

Il luogo delle radici finale è riportato nella seguente figura.



Dall'analisi svolta mediante il criterio di Routh, risulta che il luogo delle radici attraversa l'asse immaginario in corrispondenza di $\pm j\omega^* = \pm j0.2$ per $K = K^* = 3.004$.

Fondamenti di Controlli Automatici
Diagrammi di Bode

| | |
|-----------|--|
| Cognome | |
| Nome | |
| Matricola | |
| Corso | |

Bode Plot

