Fondamenti di Controlli Automatici
A.A. 2013/14
7 gennaio 2015
Quiz di Teoria

Cognome	
Nome	
Matricola	
Corso di Laurea	

Per ciascuno dei test a soluzione multipla segnare con una crocetta tutte le affermazioni che si ritengono giuste. In ogni quiz almeno una affermazione è corretta.

La prova di teoria si ritiene superata se vengono totalizzati almeno 5 punti su 10; diversamente il compito verrà ritenuto insufficiente a prescindere dal risultato della seconda parte della prova (esercizi).

1. In un sistema del secondo ordine a poli complessi coniugati, il coefficiente di smorzamento δ rimane costante al variare della posizione dei poli:

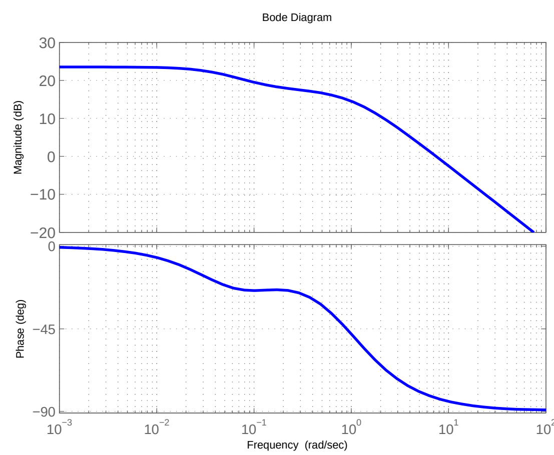
   ◯ su di un'ellisse con fuoco nell'origine
   ◯ su di una circonferenza con centro nell'origine
   ◯ su due semirette uscenti dall'origine
   ◯ su di una retta parallela all'asse immaginario

2. Il valore iniziale della risposta all'impulso del sistema $G(s) = \frac{s+4}{s^2+8s}$ è pari a:

   ◯ 0
   ◯ ∞
   ◯ 1/2
   ◯ 1

3. La risposta del sistema di cui in figura sono riportati i diagrammi di Bode al segnale $x(t) = \sin(t)$ risulta:

   ◯ $y(t) \approx 15\sin(t - 86^o)$
   ◯ $y(t) \approx 5\sin(t)$
   ◯ $y(t) \approx 15\sin(t - 47^o)$
   ◯ $y(t) \approx 5\sin(t - 47^o)$



4. La funzione di risposta armonica permette di determinare:

   ◯ la risposta libera di un sistema
   ◯ l'uscita a regime con segnale di ingresso sinusoidale
   ◯ l'uscita a regime con segnale di ingresso non periodico

5. L'evoluzione libera del sistema $M\,\dot{y}(t) + b\,y(t) = 0$ partendo dalla condizione iniziale $y(0) = a$ è:

   ◯ $y(t) = a\,e^{-\frac{M}{b}\,t}$
   ◯ $y(t) = a(1 - e^{-\frac{M}{b}\,t})$
   ◯ $y(t) = \frac{a}{M}\,e^{-\frac{b}{M}\,t}$
   ◯ $y(t) = a\,e^{-\frac{b}{M}\,t}$

6. Il criterio di Nyquist afferma che condizione necessaria e sufficiente affinché un sistema con guadagno d'anello $G(s)$ sia stabile una volta chiuso in retroazione è che il diagramma polare completo di $G(j\omega)$:

- ◯ passi per il punto $-1 + j0$
- ◯ non passi per il punto $-1 + j0$
- ◯ circondi il punto $-1 + j0$ in senso orario tante volte quante sono i poli di $G(s)$ a parte reale positiva
- ◯ circondi il punto $-1 + j0$ in senso antiorario tante volte quante sono i poli di $G(s)$ a parte reale positiva

7. Se gli elementi della prima colonna della tabella di Routh di una equazione caratteristica di 3° grado sono tutti positivi tranne uno che è negativo, ne segue che l'equazione caratteristica

- ◯ può avere una coppia di radici complesse coniugate a parte reale positiva
- ◯ ha solo una radice a parte reale positiva
- ◯ ha almeno una radice a parte reale positiva

8. Il sistema ottenuto ponendo in retroazione unitaria negativa con un guadagno $k = 2$ il sistema del primo ordine $G(s) = \frac{4}{s+5}$, ha una larghezza di banda ω_B pari a:

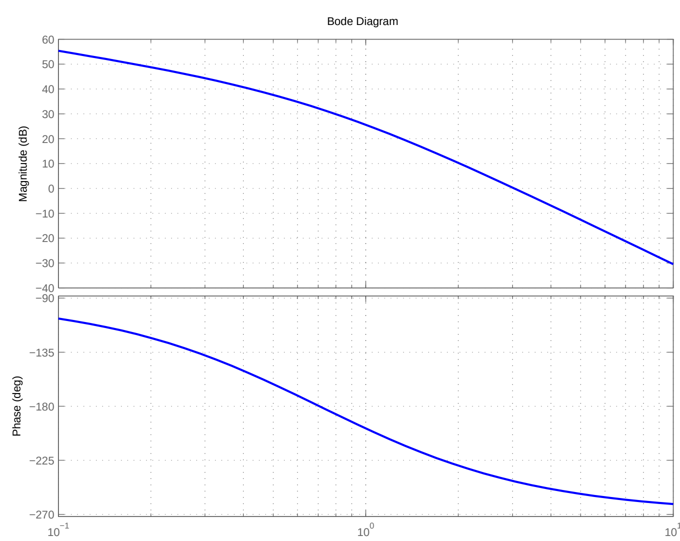
- ◯ 22 rad/s
- ◯ 13 rad/s
- ◯ 5 rad/s
- ◯ 4 rad/s

9. Dato il sistema $G(s) = \dfrac{(s+3)^2}{s^2(s^2+4s+25)}$ posto in retroazione unitaria negativa (che si suppone stabile) risulta

- ◯ errore a regime nullo per ingresso a gradino
- ◯ errore a regime nullo per ingresso a rampa
- ◯ errore a regime nullo per ingresso a parabola
- ◯ errore a regime limitato ma non nullo per ingresso a rampa

10. Si faccia riferimento ai diagrammi di Bode riportati a fianco relativi a un sistema $G(s)$ a fase minima. Il margine di ampiezza M_α e il margine di fase M_φ sono:

- ◯ $M_\alpha \simeq -32$ dB e $M_\varphi \simeq -62°$
- ◯ $M_\alpha \simeq 32$ dB e $M_\varphi \simeq 62°$
- ◯ $M_\alpha \simeq 32$ dB e $M_\varphi \simeq -62°$
- ◯ $M_\alpha \simeq -32$ dB e $M_\varphi \simeq 62°$



Fondamenti di Controlli Automatici
A.A. 2013/14
7 gennaio 2015
Esercizi

Cognome	
Nome	
Matricola	
Corso di Laurea	

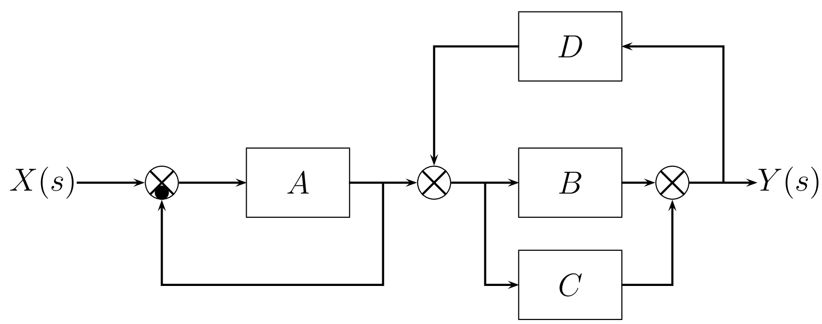
a) Determinare la trasformata di Laplace $X_i(s)$ dei seguenti segnali temporali $x_i(t)$:

$$x_1(t) = 5 + \frac{\sin(2t)}{4e^t}, \qquad x_2(t) = 3[t^3 e^{-4t} + 2\delta(t)]$$

b) Calcolare la risposta impulsiva $g_i(t)$ delle seguenti funzioni di trasferimento $G_i(s)$:

$$G_1(s) = \frac{15}{s^2 + 6s + 34} + 3, \qquad G_2(s) = \frac{-2s^3 - 8s^2 + 4s + 18}{(s+1)^2\,(s+5)\,(s+2)}$$

c) Dato il seguente schema a blocchi:

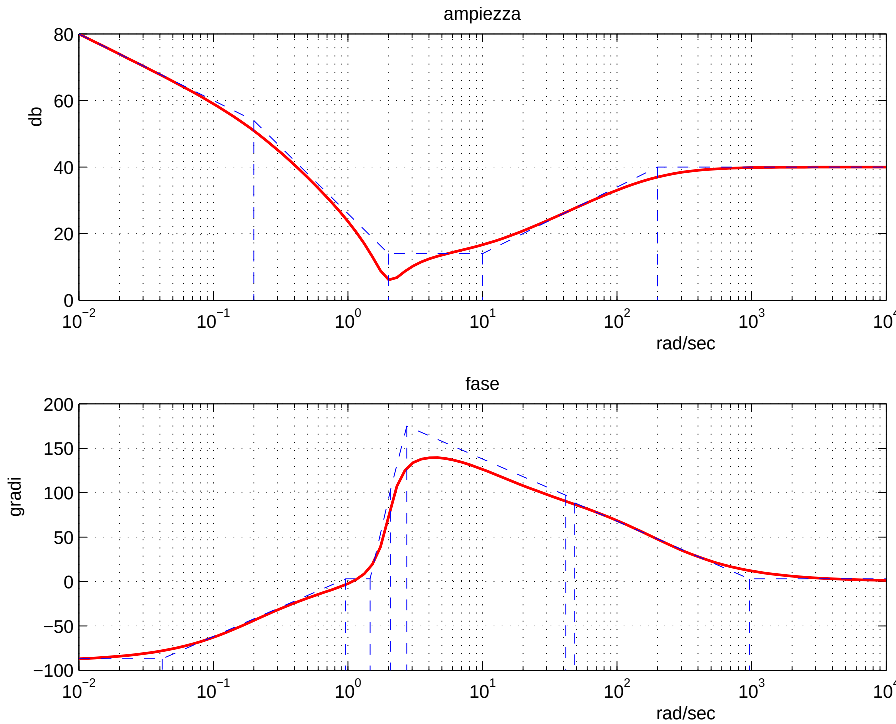


utilizzando la formula di Mason calcolare la funzione di trasferimento $G(s)$ che lega l'ingresso $X(s)$ all'uscita $Y(s)$:

$$G(s) = \frac{Y(s)}{X(s)} =$$

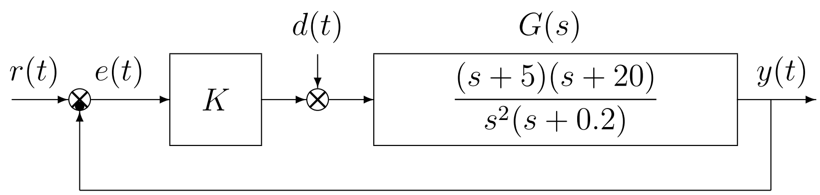
d) Sia data la funzione di trasferimento $G(s) = \dfrac{208(s+6)}{(s^2+4s+104)(1+0.025s)(s+20)}$
Disegnare l'andamento qualitativo della risposta $y(t)$ a un gradino in ingresso di ampiezza 10, $x(t) = 10$. Calcolare il valore a regime y_∞ dell'uscita $y(t)$ del sistema, stimare qualitativamente il tempo di assestamento T_a del sistema e il periodo T_ω dell'eventuale oscillazione smorzata.

e) Facendo riferimento ai diagrammi di Bode della funzione $G(s)$ mostrati in figura



si ricavi l'espressione analitica della funzione $G(s)$.

f) Sia dato il seguente sistema retroazionato:



f.1) Determinare per quali valori del parametro K il sistema retroazionato è asintoticamente stabile.

f.2) Posto $K = 1$ disegnare qualitativamente il diagramma di Nyquist completo della funzione d'anello $KG(s)$. Calcolare esattamente la posizione σ_0 di un eventuale asintoto, le eventuali intersezioni con l'asse reale e i corrispondenti valori delle pulsazioni.

f.3) Posto $K = 10$, calcolare l'errore a regime $e(\infty)$ quando sul sistema retroazionato agiscono contemporaneamente il segnale $r(t) = 2t^2$ e il disturbo $d(t) = 10 \sin t$.

f.4) Posto $K = 1$, tracciare (nello schema fornito in allegato) i diagrammi di Bode delle ampiezze e delle fasi del guadagno di anello $K\,G(s)$.

g) **Non è richiesto lo svolgimento di questo esercizio agli iscritti ad Ingegneria Ambientale o a corsi per i quali l'esame vale meno di 6 CFU.**

Con riferimento al sistema descritto nell'esercizio f), tracciare qualitativamente il luogo delle radici del sistema retroazionato per valori positivi del parametro K. Determinare esattamente gli asintoti, il centro degli asintoti, le intersezioni con l'asse immaginario e i corrispondenti valori del guadagno K. Determinare gli eventuali punti di diramazione solo qualitativamente.

Fondamenti di Controlli Automatici
A.A. 2013/14
7 gennaio 2015
Quiz di Teoria

Cognome	
Nome	
Matricola	
Corso di Laurea	

Per ciascuno dei test a soluzione multipla segnare con una crocetta tutte le affermazioni che si ritengono giuste. In ogni quiz almeno una affermazione è corretta.

La prova di teoria si ritiene superata se vengono totalizzati almeno 5 punti su 10; diversamente il compito verrà ritenuto insufficiente a prescindere dal risultato della seconda parte della prova (esercizi).

1. In un sistema del secondo ordine a poli complessi coniugati, il coefficiente di smorzamento δ rimane costante al variare della posizione dei poli:

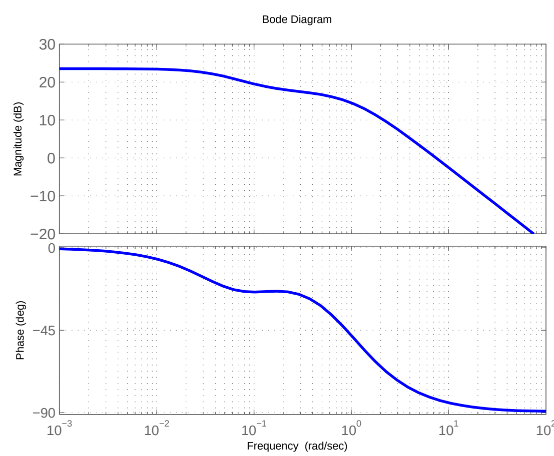
   ◯ su di un'ellisse con fuoco nell'origine
   ◯ su di una circonferenza con centro nell'origine
   ⊗ su due semirette uscenti dall'origine
   ◯ su di una retta parallela all'asse immaginario

2. Il valore iniziale della risposta all'impulso del sistema $G(s) = \frac{s+4}{s^2+8s}$ è pari a:

   ◯ 0
   ◯ ∞
   ◯ 1/2
   ⊗ 1

3. La risposta del sistema di cui in figura sono riportati i diagrammi di Bode al segnale $x(t) = \sin(t)$ risulta:

   ◯ $y(t) \approx 15 \sin(t - 86^o)$
   ◯ $y(t) \approx 5 \sin(t)$
   ◯ $y(t) \approx 15 \sin(t - 47^o)$
   ⊗ $y(t) \approx 5 \sin(t - 47^o)$



4. La funzione di risposta armonica permette di determinare:

   ◯ la risposta libera di un sistema
   ⊗ l'uscita a regime con segnale di ingresso sinusoidale
   ⊗ l'uscita a regime con segnale di ingresso non periodico

5. L'evoluzione libera del sistema $M\,\dot{y}(t) + b\,y(t) = 0$ partendo dalla condizione iniziale $y(0) = a$ è:

   ◯ $y(t) = a\,e^{-\frac{M}{b}\,t}$
   ◯ $y(t) = a(1 - e^{-\frac{M}{b}\,t})$
   ◯ $y(t) = \frac{a}{M}\,e^{-\frac{b}{M}\,t}$
   ⊗ $y(t) = a\,e^{-\frac{b}{M}\,t}$

6. Il criterio di Nyquist afferma che condizione necessaria e sufficiente affinché un sistema con guadagno d'anello $G(s)$ sia stabile una volta chiuso in retroazione è che il diagramma polare completo di $G(j\omega)$:

   ○ passi per il punto $-1 + j0$

   ⊗ non passi per il punto $-1 + j0$

   ○ circondi il punto $-1 + j0$ in senso orario tante volte quante sono i poli di $G(s)$ a parte reale positiva

   ⊗ circondi il punto $-1 + j0$ in senso antiorario tante volte quante sono i poli di $G(s)$ a parte reale positiva

7. Se gli elementi della prima colonna della tabella di Routh di una equazione caratteristica di 3° grado sono tutti positivi tranne uno che è negativo, ne segue che l'equazione caratteristica

   ⊗ può avere una coppia di radici complesse coniugate a parte reale positiva

   ○ ha solo una radice a parte reale positiva

   ⊗ ha almeno una radice a parte reale positiva

8. Il sistema ottenuto ponendo in retroazione unitaria negativa con un guadagno $k = 2$ il sistema del primo ordine $G(s) = \frac{4}{s+5}$, ha una larghezza di banda ω_B pari a:

   ○ 22 rad/s

   ⊗ 13 rad/s

   ○ 5 rad/s

   ○ 4 rad/s

9. Dato il sistema $G(s) = \dfrac{(s+3)^2}{s^2(s^2+4s+25)}$ posto in retroazione unitaria negativa (che si suppone stabile) risulta

   ⊗ errore a regime nullo per ingresso a gradino

   ⊗ errore a regime nullo per ingresso a rampa

   ○ errore a regime nullo per ingresso a parabola

   ○ errore a regime limitato ma non nullo per ingresso a rampa

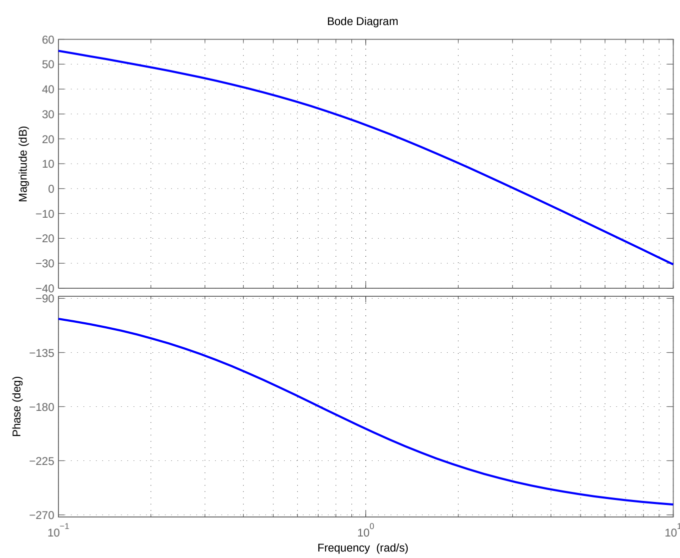
10. Si faccia riferimento ai diagrammi di Bode riportati a fianco relativi a un sistema $G(s)$ a fase minima. Il margine di ampiezza M_α e il margine di fase M_φ sono:

    ⊗ $M_\alpha \simeq -32$ dB e $M_\varphi \simeq -62°$

    ○ $M_\alpha \simeq 32$ dB e $M_\varphi \simeq 62°$

    ○ $M_\alpha \simeq 32$ dB e $M_\varphi \simeq -62°$

    ○ $M_\alpha \simeq -32$ dB e $M_\varphi \simeq 62°$



Fondamenti di Controlli Automatici
A.A. 2013/14
7 gennaio 2015
Esercizi

Cognome	
Nome	
Matricola	
Corso di Laurea	

a) Determinare la trasformata di Laplace $X_i(s)$ dei seguenti segnali temporali $x_i(t)$:

$$x_1(t) = 5 + \frac{\sin(2t)}{4e^t}, \qquad x_2(t) = 3[t^3 e^{-4t} + 2\delta(t)]$$

Soluzione:

$$X_1(s) = \frac{5}{s} + \frac{1}{4}\frac{2}{(s+1)^2+4}, \qquad X_2(s) = 3\left[\frac{6}{(s+4)^4} + 2\right]$$

b) Calcolare la risposta impulsiva $g_i(t)$ delle seguenti funzioni di trasferimento $G_i(s)$:

$$G_1(s) = \frac{15}{s^2+6s+34} + 3, \qquad G_2(s) = \frac{-2s^3 - 8s^2 + 4s + 18}{(s+1)^2\,(s+5)\,(s+2)}$$

Soluzione:
La funzione $G_1(s)$ può essere riscritta come

$$G_1(s) = \frac{15}{(s+3)^2+5^2} + 3$$

pertanto la sua risposta impulsiva risulta

$$g_1(t) = 3\,e^{-3t}\sin(5t) + 3\delta(t).$$

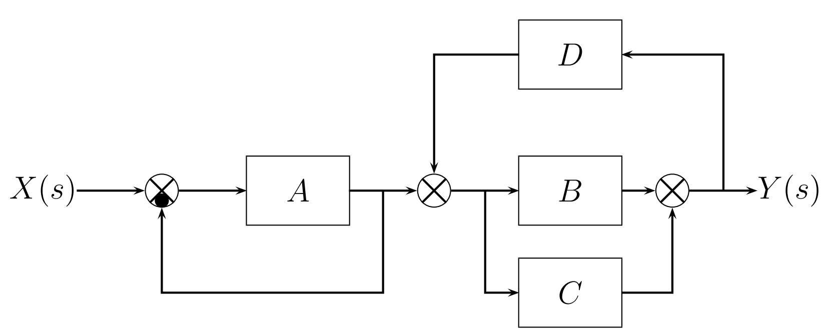
La funzione $G_2(s)$ può essere riscritta come

$$G_2(s) = \frac{1}{s+1} + \frac{2}{(s+1)^2} - \frac{1}{s+5} - \frac{2}{s+2}$$

di conseguenza la sua risposta impulsiva risulta

$$g_2(t) = e^{-t} + 2t\,e^{-t} - 1\,e^{-5t} - 2\,e^{-2t}$$

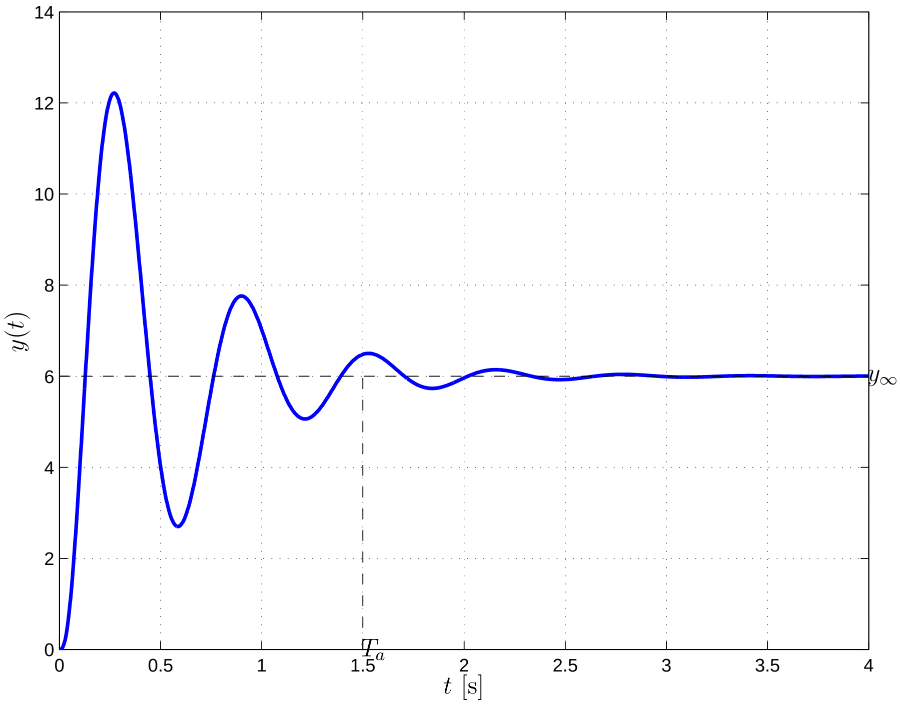
c) Dato il seguente schema a blocchi:



utilizzando la formula di Mason calcolare la funzione di trasferimento $G(s)$ che lega l'ingresso $X(s)$ all'uscita $Y(s)$:

$$G(s) = \frac{Y(s)}{X(s)} = \frac{AB + AC}{1 + A - CD - BD - ABD - ACD}$$

d) Sia data la funzione di trasferimento $G(s) = \dfrac{208(s+6)}{(s^2+4s+104)(1+0.025s)(s+20)}$
Disegnare l'andamento qualitativo della risposta $y(t)$ a un gradino in ingresso di ampiezza 10, $x(t) = 10$. Calcolare il valore a regime y_∞ dell'uscita $y(t)$ del sistema, stimare qualitativamente il tempo di assestamento T_a del sistema e il periodo T_ω dell'eventuale oscillazione smorzata.
Soluzione: Il sistema ha una coppia di poli dominanti complessi coniugati $p_{1,2} = -2 \pm j10$ per cui la risposta al gradino avrà un andamento oscillatorio smorzato. In figura è riportata la risposta del sistema.



Il valore a regime dell'uscita per un gradino in ingresso di ampiezza $A = 10$ risulta

$$y_\infty = A\,G(0) = 10 \cdot 0.6 = 6$$

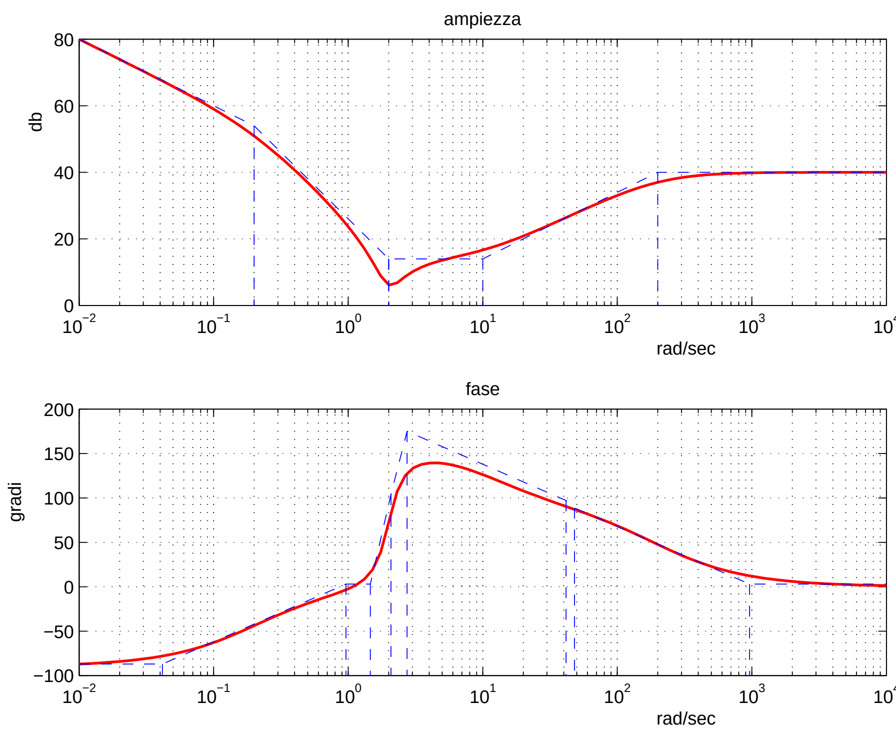
La parte reale dei poli dominanti è $\sigma = -2$ per cui il tempo di assestamento T_a è

$$T_a = \frac{3}{|\sigma|} = 1.5 \text{ s},$$

Il periodo dell'oscillazione è dato da

$$T_\omega = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{2\pi}{10} = 0.628 \text{ s}$$

e) Facendo riferimento ai diagrammi di Bode della funzione $G(s)$ mostrati in figura



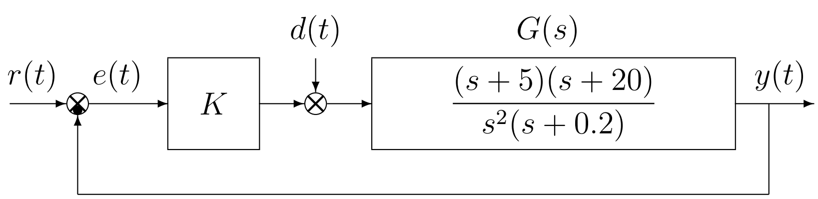
si ricavi l'espressione analitica della funzione $G(s)$.

Soluzione

$$G(s) = 100\frac{(s-10)(s^2+0.8s+4)}{s(s-0.2)(s+200)}$$

$$\delta = 0.2\,\beta = 500 = 54\text{dB}$$

f) Sia dato il seguente sistema retroazionato:



f.1) Determinare per quali valori del parametro K il sistema retroazionato è asintoticamente stabile.

Soluzione:

l'equazione caratteristica del sistema retroazionato è

$$1 + K\frac{(s+5)(s+20)}{s^2(s+0.2)} = 0 \qquad \rightarrow \qquad s^3 + (K+0.2)s^2 + 25Ks + 100K = 0$$

La corrispondente tabella di Routh è la seguente

$$\begin{array}{c|cc}
3 & 1 & 25K & \\
2 & K+0.2 & 100K & \rightarrow\ K > -0.2 \\
1 & (25K-95)K & & \rightarrow\ K < 0 \vee K > 3.8 \\
0 & 100K & & \rightarrow\ K > 0
\end{array}$$

Il sistema retroazionato è asintoticamente stabile per:

$$K > 3.8 = K^*$$

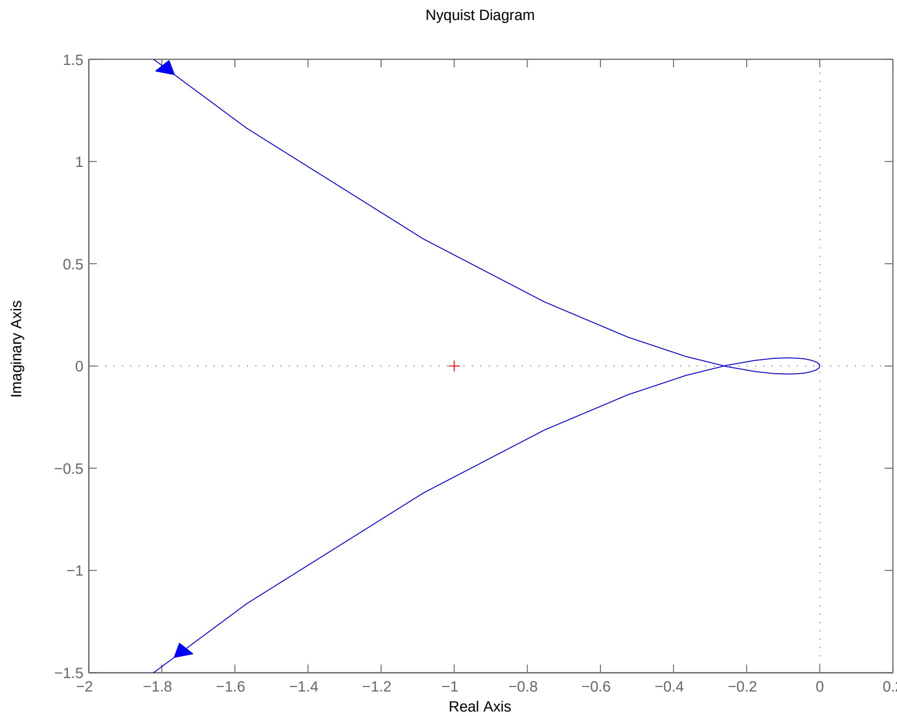
La pulsazione ω^* corrispondente al valore limite K^* è:

$$\omega^* = \sqrt{\frac{25K^*}{1}} = 9.75 \text{ rad/s}$$

f.2) Posto $K = 1$ disegnare qualitativamente il diagramma di Nyquist completo della funzione d'anello $KG(s)$. Calcolare esattamente la posizione σ_0 di un eventuale asintoto, le eventuali intersezioni con l'asse reale e i corrispondenti valori delle pulsazioni.

Soluzione:

Il diagramma di Nyquist della funzione $G(s)$ è riportato in figura.



La funzione approssimante per $\omega \to 0$ è

$$G_0(s) = \frac{500}{s^2}$$

pertanto il diagramma parte all'infinito con fase iniziale $\varphi_0 = -\pi$.

La funzione approssimante per $\omega \to \infty$ è

$$G_\infty(s) = \frac{1}{s}$$

e quindi il diagramma giunge nell'origine con fase finale $\varphi_\infty = -\frac{\pi}{2}$.

Il parametro Δ_τ vale

$$\Delta_\tau = \frac{1}{5} + \frac{1}{20} - \frac{1}{0.2} = -4.75 < 0$$

pertanto il diagramma parte in ritardo rispetto alla fase iniziale φ_0.

Il sistema è di tipo 2 pertanto il diagramma polare non presenta asintoti. Il parametro Δ_p vale

$$\Delta_p = -5 - 20 + 0.2 = -24.8 < 0$$

pertanto il diagramma arriva in ritardo rispetto alla fase finale φ_∞.

Lo variazione di fase complessiva è

$$\Delta\varphi = +\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{2} = +\frac{\pi}{2}$$

Esiste un'intersezione con l'asse reale che, in virtù dell'analisi svolta con Routh al primo punto, risulta all'ascissa

$$\sigma^* = -1/K^* = -0.2632$$

f.3) Posto $K = 10$, calcolare l'errore a regime $e(\infty)$ quando sul sistema retroazionato agiscono contemporaneamente il segnale $r(t) = 2t^2$ e il disturbo $d(t) = 10 \sin t$.

Soluzione:

Dato che il sistema è lineare e soggetto quindi alla sovrapposizione degli effetti, l'errore $E(s)$, espresso mediante la trasformata di Laplace, risulterà:

$$E(s) = E_r(s) + E_d(s)$$

dove $E_r(s)$ è l'errore dovuto al riferimento mentre $E_d(s)$ è l'errore dovuto al disturbo. L'errore $e_r(\infty)$ dovuto al riferimento sarà costante e diverso da zero, essendo il sistema considerato di tipo 2 con ingresso di riferimento a parabola: $e_r(\infty) = \frac{R_0}{K_a} = 8 \cdot 10^{-4}$ dove $R_0 = 4$ e $K_a = \lim_{s\to 0} s^2 K G(s) = 5000$.

L'errore dovuto al disturbo $d(t)$ è dato da:

$$E_d(s) = F_d(s) D(s)$$

dove $D(s)$ è la trasformata di Laplace di $d(t)$ e $F_d(s)$ è la funzione di trasferimento tra $D(s)$ e $E_d(s)$ che vale

$$F_d(s) = -\frac{G(s)}{1 + KG(s)} = \frac{-s^2 - 25s - 100}{s^3 + 10.2s^2 + 250s + 1000}.$$

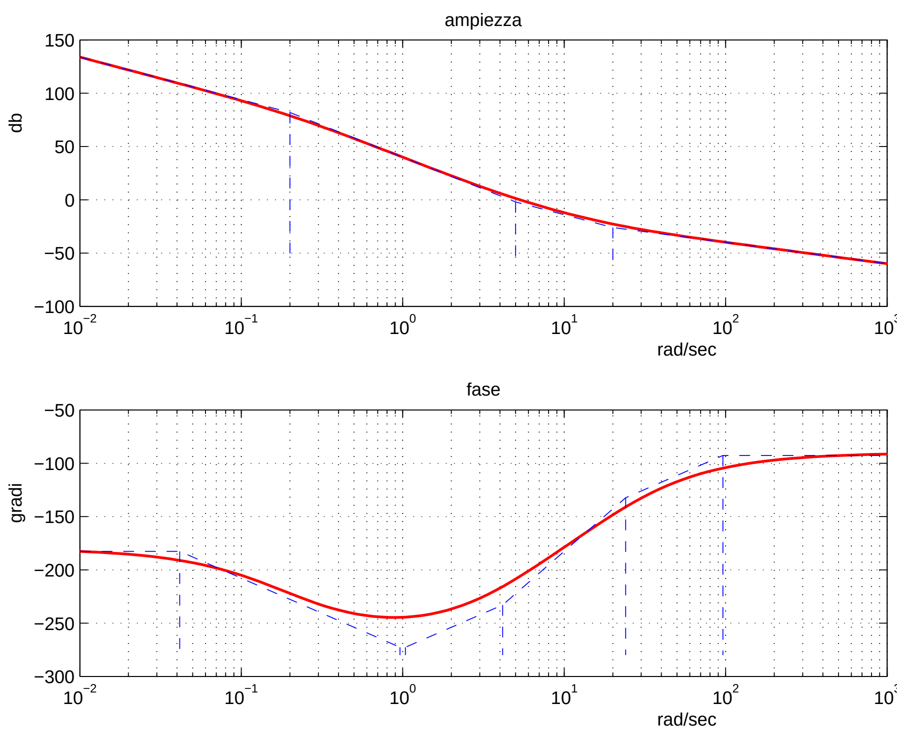
Essendo $d(t)$ un segnale sinusoidale, per trovarne la risposta a regime si sfrutta il concetto di risposta armonica, per cui $e_d(t) = 10|F_d(j1)| \sin(t + \arg\{F_d(j1)\})$ con $|F_d(j1)| = 0.1$ e $\arg\{F_d(j1)\} \simeq 180^o$. In conclusione

$$e(\infty) = e_r(\infty) + e_d(\infty) = 8 \cdot 10^{-4} + \sin(t + 180^o)$$

f.4) Posto $K = 1$, tracciare (nello schema fornito in allegato) i diagrammi di Bode delle ampiezze e delle fasi del guadagno di anello $K\,G(s)$.

Soluzione:

In figura sono riportati i diagrammi di Bode del sistema. Sul diagramma asintotico delle ampiezze il guadagno β in corrispondenza della pulsazione $\omega = 0.2$ è $\beta = \left|\frac{500}{0.2^2}\right| = 12500 \simeq$ 82 dB.



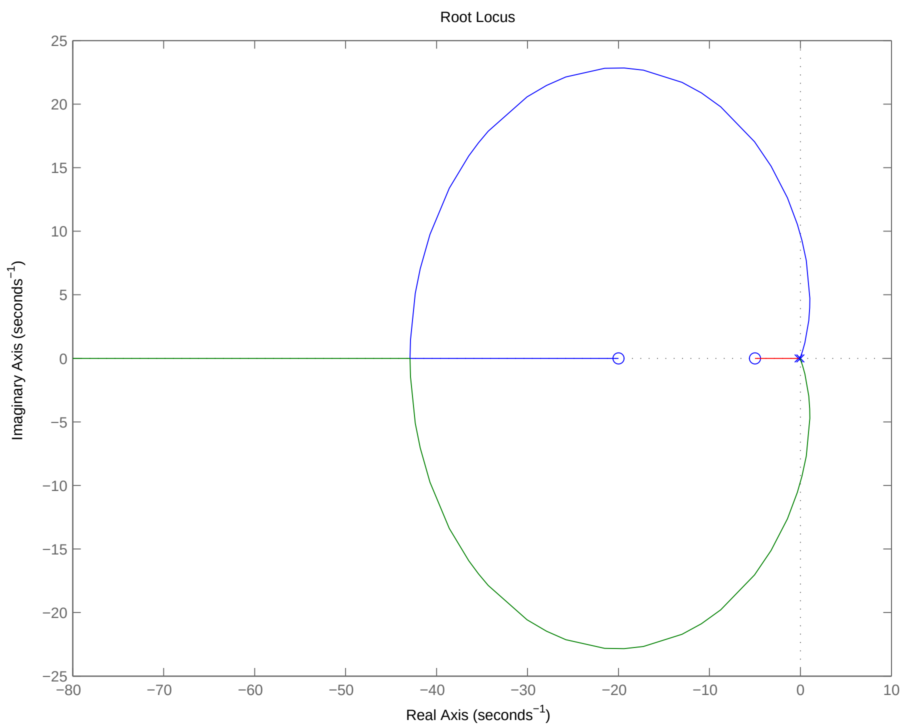
g) **Non è richiesto lo svolgimento di questo esercizio agli iscritti ad Ingegneria Ambientale o a corsi per i quali l'esame vale meno di 6 CFU.**

Con riferimento al sistema descritto nell'esercizio f), tracciare qualitativamente il luogo delle radici del sistema retroazionato per valori positivi del parametro K. Determinare esattamente gli asintoti, il centro degli asintoti, le intersezioni con l'asse immaginario e i corrispondenti valori del guadagno K. Determinare gli eventuali punti di diramazione solo qualitativamente.

Soluzione: Essendo 1 il grado relativo del sistema, esiste 1 asintoto, appartenente all'asse reale, con centro di ascissa

$$\sigma_a = \frac{1}{1}(-0.2 + 5 + 20) = 24.8$$

Il luogo delle radici finale è riportato nella seguente figura.



Dall'analisi svolta mediante il criterio di Routh, risulta che il luogo delle radici attraversa l'asse immaginario in corrispondenza di $\pm j\omega^* = \pm j9.75$ per $K = K^* = 3.8$.

Fondamenti di Controlli Automatici

Diagrammi di Bode

Cognome	
Nome	
Matricola	
Corso