

Fondamenti di Controlli Automatici
A.A. 2013/14
6 novembre 2014
Quiz di Teoria

Cognome	
Nome	
Matricola	
Corso di Laurea	

Per ciascuno dei test a soluzione multipla segnare con una crocetta tutte le affermazioni che si ritengono giuste. In ogni quiz almeno una affermazione è corretta.

La prova di teoria si ritiene superata se vengono totalizzati almeno 5 punti su 10; diversamente il compito verrà ritenuto insufficiente a prescindere dal risultato della seconda parte della prova (esercizi).

1. Quali di queste caratteristiche di un sistema dinamico del secondo ordine dipendono soltanto dal coefficiente di smorzamento δ ?

- Picco di risonanza M_R
- Massima sovraelongazione percentuale $S\%$
- Pulsazione di risonanza ω_R
- Tempo di assestamento T_a

2. L'antitrasformata di Laplace del termine $\frac{1}{(s+p)^n}$ è:

- $\frac{t^n e^{-pt}}{n!}$
- $\frac{t^{n-1} e^{-pt}}{p!(n-1)!}$
- $\frac{t^{n-1} e^{-pt}}{(n-1)!}$

3. La massima sovraelongazione percentuale $S\%$ del sistema $G(s) = \frac{1}{s^2+4s+4}$ in risposta ad un ingresso a gradino è:

- $S\% = 0\%$
- $S\% = 20\%$
- $S\% = 50\%$
- $S\% = 100\%$

4. Il sistema ottenuto ponendo in retroazione unitaria negativa con un guadagno $k = 5$ il sistema del primo ordine $G(s) = \frac{2}{s+4}$ ha una larghezza di banda ω_B pari a:

- 2 rad/s
- 4 rad/s
- 14 rad/s
- 22 rad/s

5. Se il sistema $G(s) = \frac{3(s-8)}{s(s+3)(s^2+16)}$ viene alimentato con l'ingresso $x(t) = 2 \sin(4t)$ allora per $t \rightarrow \infty$, l'uscita $y(t)$ sarà:

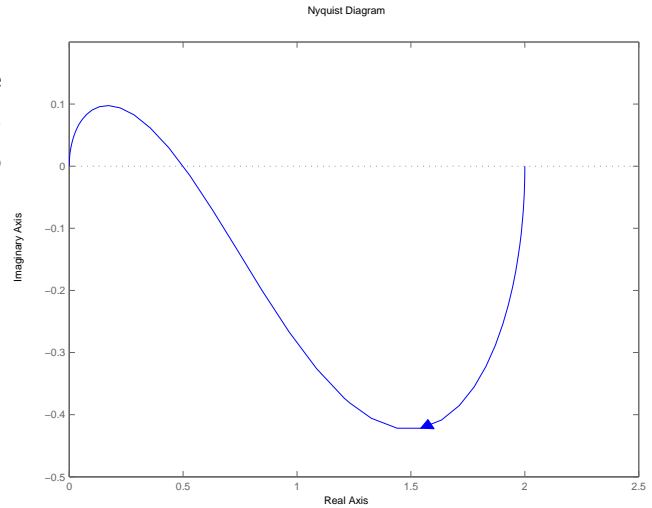
- 0
- ∞
- $6.56 \sin(4t + 36.2^\circ)$
- 1

6. Se i coefficienti dell'equazione caratteristica di un sistema retroazionato sono tutti positivi allora è possibile affermare che il sistema retroazionato:

- è stabile
- è instabile
- può essere stabile
- può essere instabile

7. Sia dato il diagramma di Nyquist della funzione $G(s) = \frac{-(s+6)}{(s+1)(s-3)}$. In base al criterio di Nyquist è possibile affermare che il sistema retroazionato $KG(s)$ è stabile per i seguenti valori di K :

- $K < 0, |K| \ll 1$
- $K < 0, |K| \gg 1$
- $K > 0, |K| \ll 1$
- $K > 0, |K| \gg 1$



8. La funzione di trasferimento $G(s) = \frac{Y(s)}{X(s)}$ corrispondente all'equazione differenziale

$$5\ddot{y}(t) + 3\dot{y}(t) = 2\dot{x}(t) + 4x(t) \text{ è:}$$

- $G(s) = \frac{5s^2 + 3s}{2s + 4}$
- $G(s) = \frac{2s + 4}{5s + 3}$
- $G(s) = \frac{2s + 4}{5s^2 + 3s}$
- $G(s) = \frac{2s^2 + 4s}{5s + 3}$

9. Sia $\sigma_0 < 0$ il punto di intersezione del diagramma polare della funzione di risposta armonica $G(j\omega)$ con il semiasse reale negativo. Il margine di ampiezza M_A del sistema $G(s)$ è:

- $M_A = \sigma_0$
- $M_A = -\sigma_0$
- $M_A = \frac{1}{\sigma_0}$
- $M_A = -\frac{1}{\sigma_0}$

10. Sia $y(t) = M(\omega) \cos(\omega t + \alpha(\omega) + \varphi_0)$ la risposta asintotica di un sistema lineare stabile all'ingresso $x(t) = N \cos(\omega t + \varphi_0)$. Utilizzando i simboli che caratterizzano i segnali $x(t)$ e $y(t)$ la "definizione" di funzione di risposta armonica $F(\omega)$ è:

- $F(\omega) = \frac{N}{M(\omega)} e^{j\alpha(\omega)}$
- $F(\omega) = \frac{M(\omega)}{N} e^{j\alpha(\omega)}$
- $F(\omega) = \frac{M(\omega)}{N} e^{-j\alpha(\omega)}$
- $F(\omega) = M(\omega) N e^{j\alpha(\omega)}$

Cognome	
Nome	
Matricola	
Corso di Laurea	

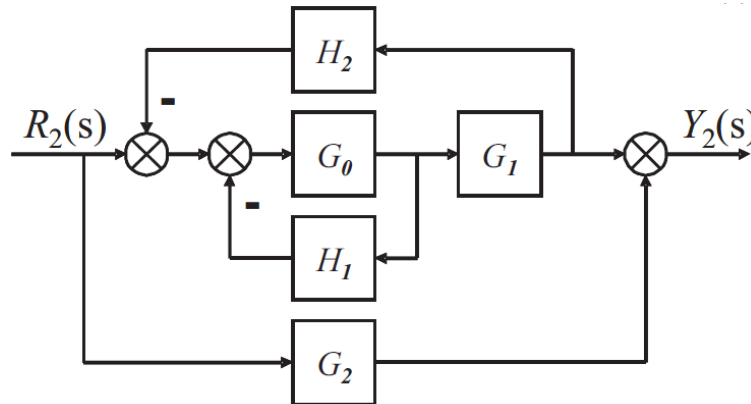
a) Determinare la trasformata di Laplace $X_i(s)$ dei seguenti segnali temporali $x_i(t)$:

$$x_1(t) = [2t^3 + \sin(2t)] e^{-5t}, \quad x_2(t) = 3t^2 e^{-2t} + 6\delta(t)$$

b) Calcolare la risposta impulsiva $g_i(t)$ delle seguenti funzioni di trasferimento $G_i(s)$:

$$G_1(s) = 2e^{-4s}, \quad G_2(s) = \frac{10}{(s+3)(1+2s)}$$

c) Dato il seguente schema a blocchi:



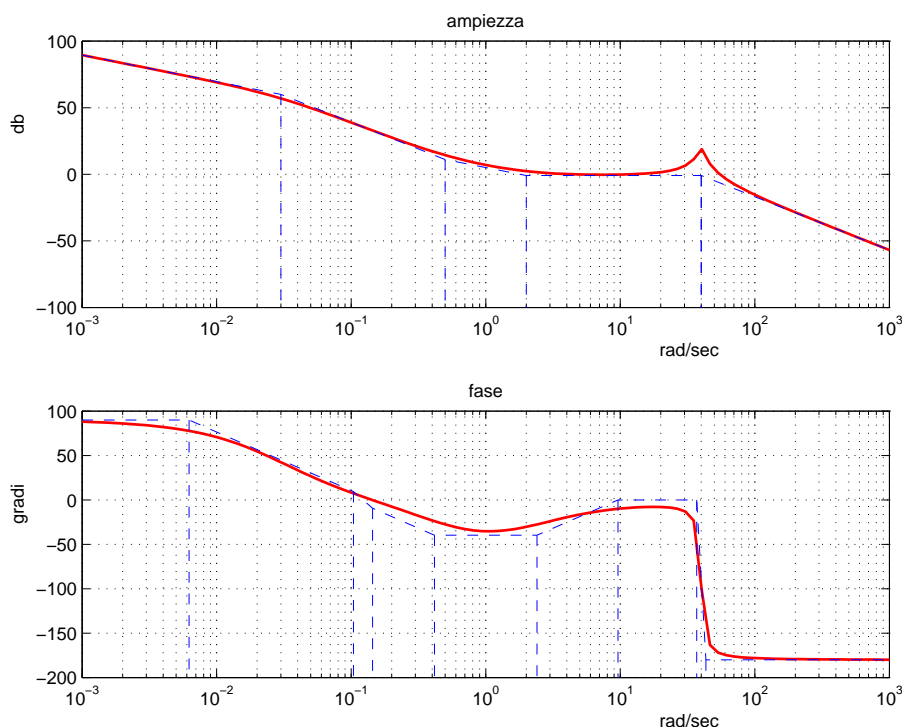
utilizzando la formula di Mason calcolare la funzione di trasferimento $G(s)$ che lega l'ingresso $R_2(s)$ all'uscita $Y_2(s)$:

$$G(s) = \frac{Y_2(s)}{R_2(s)} =$$

d) Sia data la funzione di trasferimento $G(s) = \frac{2(s+4)}{(1+0.01s)(s+10)(s^2+6s+64)}$

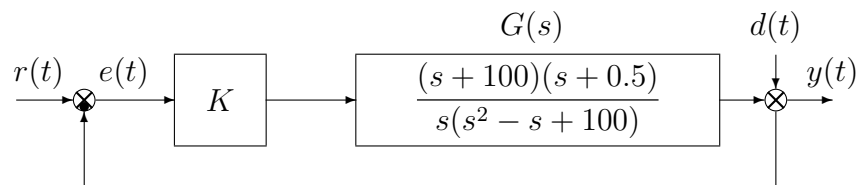
Disegnare l'andamento qualitativo della risposta $y(t)$ a un gradino in ingresso di ampiezza 1000, $x(t) = 1000$. Calcolare il valore a regime y_∞ dell'uscita $y(t)$ del sistema, stimare qualitativamente il tempo di assestamento T_a del sistema e il periodo T_w dell'eventuale oscillazione smorzata.

e) Facendo riferimento ai diagrammi di Bode della funzione $G(s)$ mostrati in figura



si ricavi l'espressione analitica della funzione $G(s)$.

f) Sia dato il seguente sistema retroazionato:



- f.1) Determinare per quali valori del parametro K il sistema retroazionato è asintoticamente stabile.
- f.2) Posto $K = 1$ disegnare qualitativamente il diagramma di Nyquist completo della funzione d'anello $KG(s)$. Calcolare esattamente la posizione σ_0 di un eventuale asintoto, le eventuali intersezioni con l'asse reale e i corrispondenti valori delle pulsazioni.
- f.3) Posto $K = 2$, calcolare l'errore a regime $e(\infty)$ quando sul sistema retroazionato agiscono contemporaneamente il segnale $r(t) = 2t$ e il disturbo $d(t) = 20$.
- f.4) Posto $K = 1$, tracciare (nello schema fornito in allegato) i diagrammi di Bode delle ampiezze e delle fasi del guadagno di anello $KG(s)$.

g) **Non è richiesto lo svolgimento di questo esercizio agli iscritti ad Ingegneria Ambientale o a corsi per i quali l'esame vale meno di 6 CFU.**

Con riferimento al sistema descritto nell'esercizio f), tracciare qualitativamente il luogo delle radici del sistema retroazionato per valori positivi del parametro K . Determinare esattamente gli asintoti, il centro degli asintoti, le intersezioni con l'asse immaginario e i corrispondenti valori del guadagno K . Determinare gli eventuali punti di diramazione solo qualitativamente.

Fondamenti di Controlli Automatici
A.A. 2013/14
6 novembre 2014
Quiz di Teoria

Cognome	
Nome	
Matricola	
Corso di Laurea	

Per ciascuno dei test a soluzione multipla segnare con una crocetta tutte le affermazioni che si ritengono giuste. In ogni quiz almeno una affermazione è corretta.

La prova di teoria si ritiene superata se vengono totalizzati almeno 5 punti su 10; diversamente il compito verrà ritenuto insufficiente a prescindere dal risultato della seconda parte della prova (esercizi).

1. Quali di queste caratteristiche di un sistema dinamico del secondo ordine dipendono soltanto dal coefficiente di smorzamento δ ?

- Picco di risonanza M_R
- Massima sovralongazione percentuale $S\%$
- Pulsazione di risonanza ω_R
- Tempo di assestamento T_a

2. L'antitrasformata di Laplace del termine $\frac{1}{(s+p)^n}$ è:

- $\frac{t^n e^{-pt}}{n!}$
- $\frac{t^{n-1} e^{-pt}}{p!(n-1)!}$
- $\frac{t^{n-1} e^{-pt}}{(n-1)!}$

3. La massima sovralongazione percentuale $S\%$ del sistema $G(s) = \frac{1}{s^2+4s+4}$ in risposta ad un ingresso a gradino è:

- $S\% = 0\%$
- $S\% = 20\%$
- $S\% = 50\%$
- $S\% = 100\%$

4. Il sistema ottenuto ponendo in retroazione unitaria negativa con un guadagno $k = 5$ il sistema del primo ordine $G(s) = \frac{2}{s+4}$ ha una larghezza di banda ω_B pari a:

- 2 rad/s
- 4 rad/s
- 14 rad/s
- 22 rad/s

5. Se il sistema $G(s) = \frac{3(s-8)}{s(s+3)(s^2+16)}$ viene alimentato con l'ingresso $x(t) = 2 \sin(4t)$ allora per $t \rightarrow \infty$, l'uscita $y(t)$ sarà:

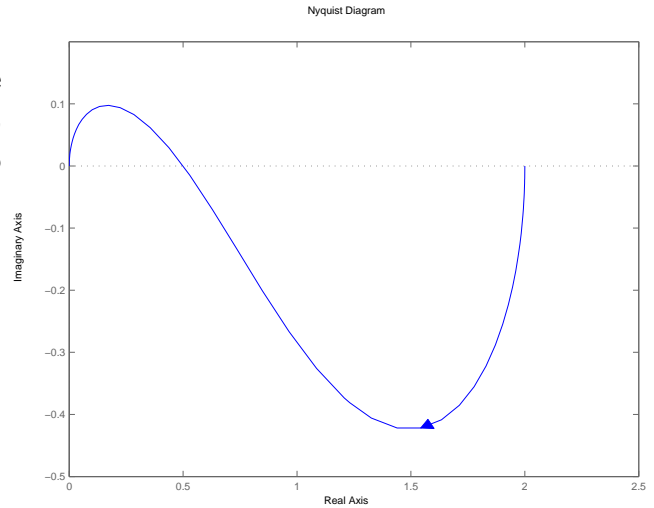
- 0
- ∞
- $6.56 \sin(4t + 36.2^\circ)$
- 1

6. Se i coefficienti dell'equazione caratteristica di un sistema retroazionato sono tutti positivi allora è possibile affermare che il sistema retroazionato:

- è stabile
- è instabile
- può essere stabile
- può essere instabile

7. Sia dato il diagramma di Nyquist della funzione $G(s) = \frac{-(s+6)}{(s+1)(s-3)}$. In base al criterio di Nyquist è possibile affermare che il sistema retroazionato $KG(s)$ è stabile per i seguenti valori di K :

- $K < 0, |K| \ll 1$
- $K < 0, |K| \gg 1$
- $K > 0, |K| \ll 1$
- $K > 0, |K| \gg 1$



8. La funzione di trasferimento $G(s) = \frac{Y(s)}{X(s)}$ corrispondente all'equazione differenziale

$$5\ddot{y}(t) + 3\dot{y}(t) = 2\dot{x}(t) + 4x(t) \text{ è:}$$

- $G(s) = \frac{5s^2 + 3s}{2s + 4}$
- $G(s) = \frac{2s + 4}{5s + 3}$
- $G(s) = \frac{2s + 4}{5s^2 + 3s}$
- $G(s) = \frac{2s^2 + 4s}{5s + 3}$

9. Sia $\sigma_0 < 0$ il punto di intersezione del diagramma polare della funzione di risposta armonica $G(j\omega)$ con il semiasse reale negativo. Il margine di ampiezza M_A del sistema $G(s)$ è:

- $M_A = \sigma_0$
- $M_A = -\sigma_0$
- $M_A = \frac{1}{\sigma_0}$
- $M_A = -\frac{1}{\sigma_0}$

10. Sia $y(t) = M(\omega) \cos(\omega t + \alpha(\omega) + \varphi_0)$ la risposta asintotica di un sistema lineare stabile all'ingresso $x(t) = N \cos(\omega t + \varphi_0)$. Utilizzando i simboli che caratterizzano i segnali $x(t)$ e $y(t)$ la "definizione" di funzione di risposta armonica $F(\omega)$ è:

- $F(\omega) = \frac{N}{M(\omega)} e^{j\alpha(\omega)}$
- $F(\omega) = \frac{M(\omega)}{N} e^{j\alpha(\omega)}$
- $F(\omega) = \frac{M(\omega)}{N} e^{-j\alpha(\omega)}$
- $F(\omega) = M(\omega) N e^{j\alpha(\omega)}$

Cognome	
Nome	
Matricola	
Corso di Laurea	

a) Determinare la trasformata di Laplace $X_i(s)$ dei seguenti segnali temporali $x_i(t)$:

$$x_1(t) = [2t^3 + \sin(2t)] e^{-5t}, \quad x_2(t) = 3t^2 e^{-2t} + 6\delta(t)$$

Soluzione:

$$X_1(s) = \frac{12}{(s+5)^4} + \frac{2}{(s+5)^2 + 4}, \quad X_2(s) = \frac{6}{(s+2)^3} + 6$$

b) Calcolare la risposta impulsiva $g_i(t)$ delle seguenti funzioni di trasferimento $G_i(s)$:

$$G_1(s) = 2e^{-4s}, \quad G_2(s) = \frac{10}{(s+3)(1+2s)}$$

Soluzione:

L'antitrasformata di Laplace della funzione $G_1(s)$ è

$$g_1(t) = 2\delta(t-4)$$

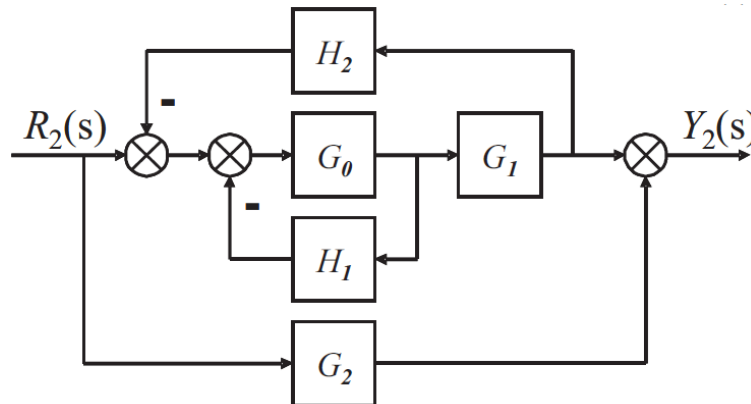
La funzione $G_2(s)$ può essere riscritta come

$$G_2(s) = -\frac{2}{(s+3)} + \frac{2}{s+\frac{1}{2}}$$

La risposta impulsiva della funzione $G_2(s)$ risulta

$$g_2(t) = -2e^{-3t} + 2e^{-\frac{t}{2}}$$

c) Dato il seguente schema a blocchi:

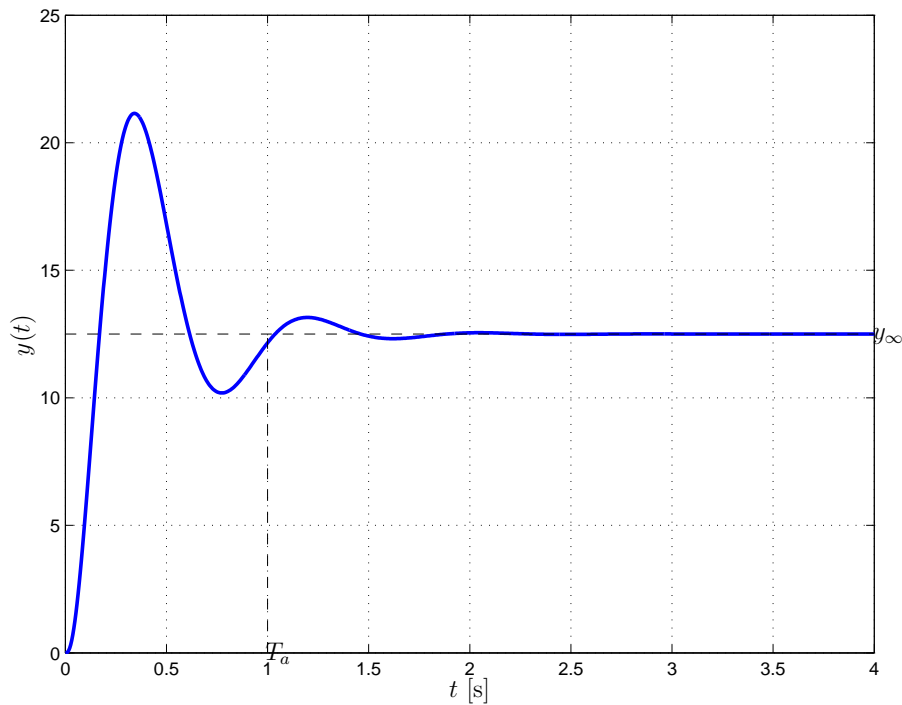


utilizzando la formula di Mason calcolare la funzione di trasferimento $G(s)$ che lega l'ingresso $R_2(s)$ all'uscita $Y_2(s)$:

$$G(s) = \frac{Y_2(s)}{R_2(s)} = \frac{G_0 G_1 + G_2(1 + G_0 H_1 + G_0 G_1 H_2)}{1 + G_0 H_1 + G_0 G_1 H_2}$$

d) Sia data la funzione di trasferimento $G(s) = \frac{2(s+4)}{(1+0.01s)(s+10)(s^2+6s+64)}$

Disegnare l'andamento qualitativo della risposta $y(t)$ a un gradino in ingresso di ampiezza 1000, $x(t) = 1000$. Calcolare il valore a regime y_∞ dell'uscita $y(t)$ del sistema, stimare qualitativamente il tempo di assestamento T_a del sistema e il periodo T_ω dell'eventuale oscillazione smorzata. Soluzione: Il sistema ha una coppia di poli dominanti complessi coniugati $p_{1,2} = -3 \pm j7.4$ per cui la risposta al gradino avrà un andamento oscillatorio smorzato. In figura è riportata la risposta del sistema.



Il valore a regime dell'uscita per un gradino in ingresso di ampiezza $A = 1000$ risulta

$$y_\infty = A G(0) = 1000 \cdot 0.0125 = 12.5$$

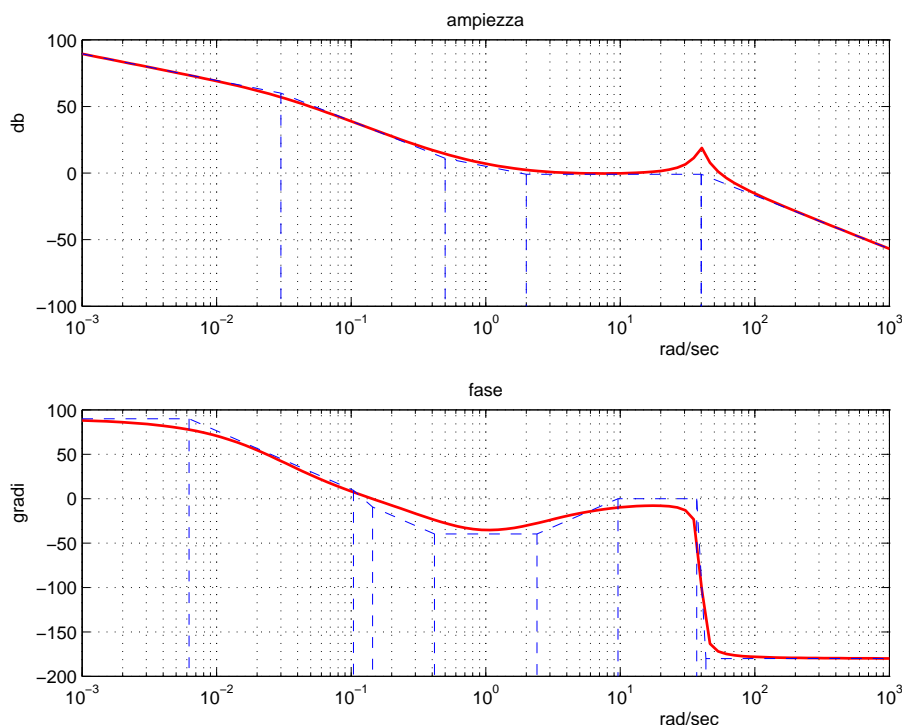
La parte reale dei poli dominanti è $\sigma = -3$ per cui il tempo di assestamento T_a è

$$T_a = \frac{3}{|\sigma|} = 1 \text{ s,}$$

Il periodo dell'oscillazione è dato da

$$T_\omega = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{2\pi}{7.4} = 0.847 \text{ s}$$

e) Facendo riferimento ai diagrammi di Bode della funzione $G(s)$ mostrati in figura

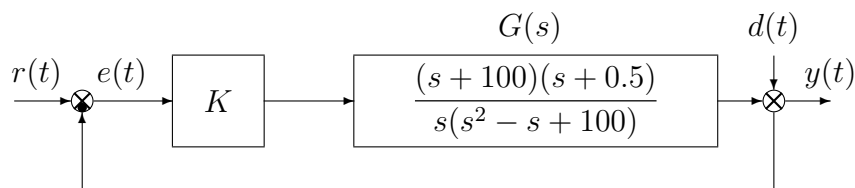


si ricavi l'espressione analitica della funzione $G(s)$.

Soluzione

$$G(s) = 1440 \frac{(s - 0.5)(s + 2)}{s(s + 0.03)(s^2 + 4s + 1600)}$$

f) Sia dato il seguente sistema retroazionato:



f.1) Determinare per quali valori del parametro K il sistema retroazionato è asintoticamente stabile.

Soluzione:

l'equazione caratteristica del sistema retroazionato è

$$1 + K \frac{(s + 100)(s + 0.5)}{s(s^2 - s + 100)} = 0 \quad \rightarrow \quad s^3 + (K - 1)s^2 + (100 + 100.5K)s + 50K = 0$$

La corrispondente tabella di Routh è la seguente

$$\begin{array}{c|ccc} 3 & 1 & 100 + 100.5K & \\ 2 & K - 1 & 50K & \rightarrow K > 1 \\ 1 & (K - 1)(100 + 100.5K) - 50K & & \rightarrow K < -0.78 \vee K > 1.28 \\ 0 & 50K & & \rightarrow K > 0 \end{array}$$

Il sistema retroazionato è asintoticamente stabile per:

$$K > 1.28 = K^*$$

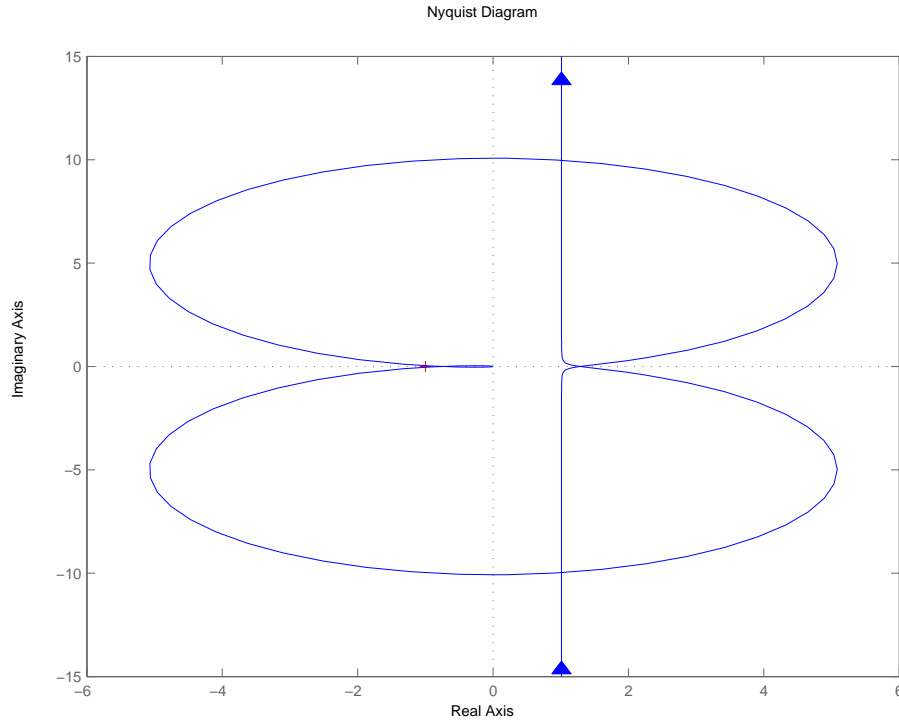
La pulsazione ω^* corrispondente al valore limite K^* è:

$$\omega^* = \sqrt{\frac{100 + 100.5K^*}{1}} = 15.12 \text{ rad/s}$$

f.2) Posto $K = 1$ disegnare qualitativamente il diagramma di Nyquist completo della funzione d'anello $KG(s)$. Calcolare esattamente la posizione σ_0 di un eventuale asintoto, le eventuali intersezioni con l'asse reale e i corrispondenti valori delle pulsazioni.

Soluzione:

Il diagramma di Nyquist della funzione $G(s)$ è riportato in figura.



La funzione approssimante per $\omega \rightarrow 0$ è

$$G_0(s) = \frac{0.5}{s}$$

pertanto il diagramma parte all'infinito con fase iniziale $\varphi_0 = -\frac{\pi}{2}$.

La funzione approssimante per $\omega \rightarrow \infty$ è

$$G_\infty(s) = \frac{1}{s}$$

e quindi il diagramma giunge nell'origine con fase finale $\varphi_\infty = -\frac{\pi}{2} \equiv \frac{3}{2}\pi$.

Il parametro Δ_τ vale

$$\Delta_\tau = 2 + \frac{1}{100} + \frac{1}{100} = 2.02 > 0$$

pertanto il diagramma parte in anticipo rispetto alla fase iniziale φ_0 .

Il sistema è di tipo 1 pertanto esiste un asintoto verticale la cui ascissa è

$$\sigma_a = K\Delta_\tau = 0.5 \cdot 2.02 = 1.01$$

Il parametro Δ_p vale

$$\Delta_p = -100 - 0.5 - 1 = -101.5 < 0$$

pertanto il diagramma arriva in ritardo rispetto alla fase finale φ_∞ .

Lo variazione di fase complessiva è

$$\Delta\varphi = +\pi + \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2} = +2\pi$$

Esistono due intersezioni con l'asse reale che, in virtù dell'analisi svolta con Routh al primo punto, risultano alle ascisse

$$\sigma^* = -1/K^* = -0.781$$

$$\sigma_1^* = -1/K_1^* = -1/-0.78 = 1.28$$

- f.3) Posto $K = 2$, calcolare l'errore a regime $e(\infty)$ quando sul sistema retroazionato agiscono contemporaneamente il segnale $r(t) = 2t$ e il disturbo $d(t) = 20$.

Soluzione:

Dato che il sistema è lineare e soggetto quindi alla sovrapposizione degli effetti, l'errore $E(s)$, espresso mediante la trasformata di Laplace, risulterà:

$$E(s) = E_r(s) + E_d(s)$$

dove $E_r(s)$ è l'errore dovuto al riferimento mentre $E_d(s)$ è l'errore dovuto al disturbo. L'errore $e_r(\infty)$ dovuto al riferimento sarà costante e diverso da zero, essendo il sistema considerato di tipo 1: $e_r(\infty) = \frac{2}{K_v} = 2$ dove $K_v = \lim_{s \rightarrow 0} sKG(s) = 1$. L'errore dovuto al disturbo $d(t)$ è dato da:

$$E_d(s) = F_d(s)D(s)$$

dove $D(s)$ è la trasformata di Laplace di $d(t)$ e $F_d(s)$ è la funzione di trasferimento tra $D(s)$ e $E_d(s)$ che vale

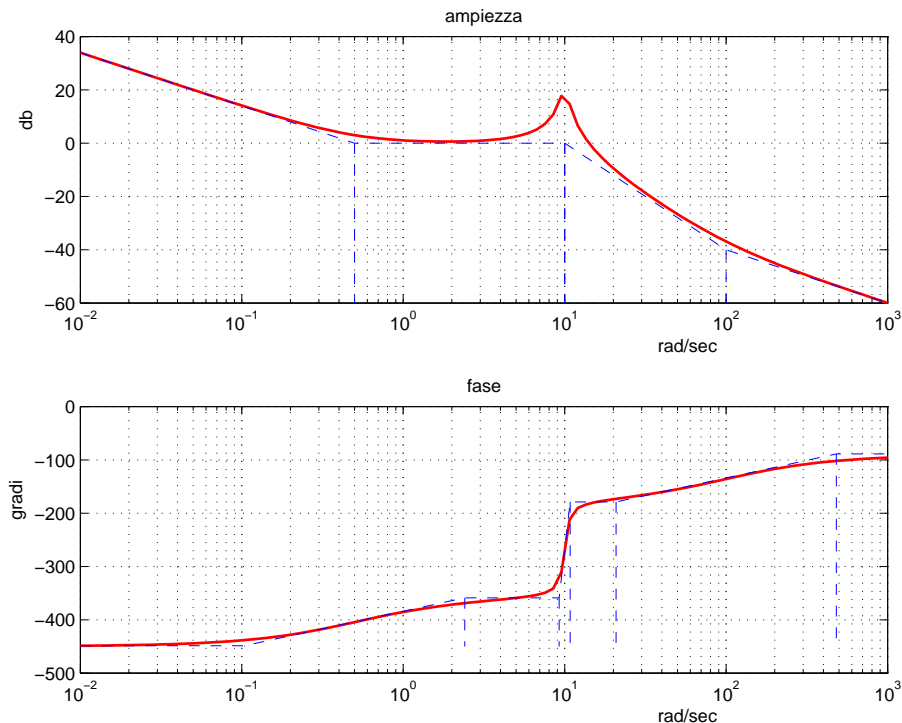
$$F_d(s) = -\frac{1}{1 + KG(s)} = \frac{-s^3 + s^2 - 100s}{s^3 + s^2 + 301s + 100}$$

L'errore $e_d(\infty)$ dovuto al disturbo è dato da $e_d(\infty) = 10 F_d(0) = 0$. Pertanto l'errore a regime complessivo sarà: $e(\infty) = e_r(\infty) + e_d(\infty) = 2$.

- f.4) Posto $K = 1$, tracciare (nello schema fornito in allegato) i diagrammi di Bode delle ampiezze e delle fasi del guadagno di anello $KG(s)$.

Soluzione:

In figura sono riportati i diagrammi di Bode del sistema. Sul diagramma asintotico delle ampiezze il guadagno β in corrispondenza della pulsazione $\omega = 0.5$ è $\beta = \left| \frac{0.5}{0.5} \right| = 1 = 0$ dB. Il coefficiente di smorzamento della coppia di poli complessi coniugati è $\delta = 0.05$ pertanto si avrà $M_{\omega_n} = \frac{1}{2\delta} = 10 \simeq 20$ dB.



- g) **Non è richiesto lo svolgimento di questo esercizio agli iscritti ad Ingegneria Ambientale o a corsi per i quali l'esame vale meno di 6 CFU.**

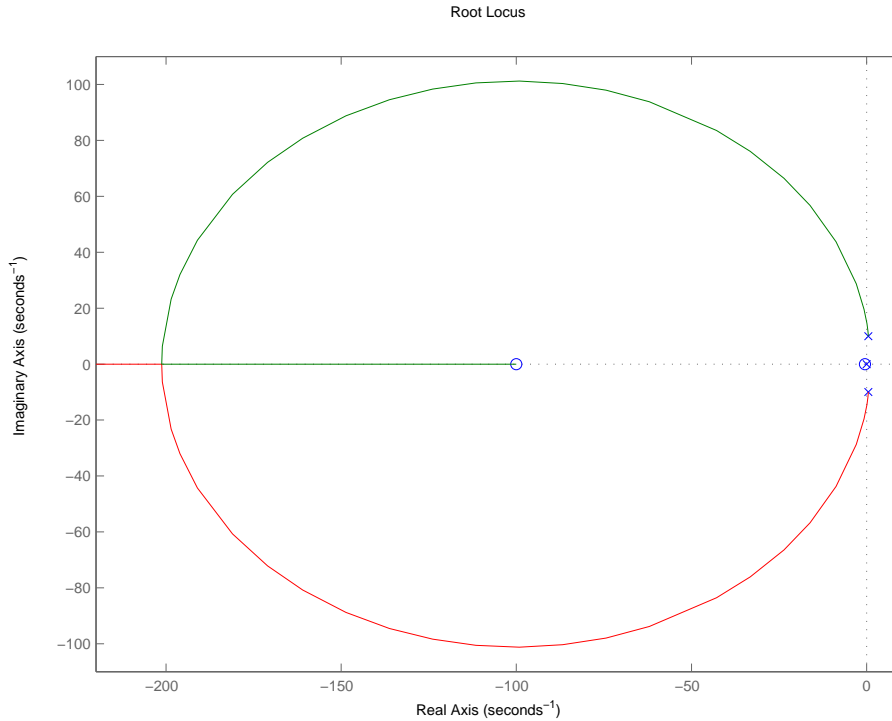
Con riferimento al sistema descritto nell'esercizio f), tracciare qualitativamente il luogo delle radici del sistema retroazionato per valori positivi del parametro K . Determinare esattamente

gli asintoti, il centro degli asintoti, le intersezioni con l'asse immaginario e i corrispondenti valori del guadagno K . Determinare gli eventuali punti di diramazione solo qualitativamente.

Soluzione: Essendo 1 il grado relativo del sistema, esiste 1 asintoto, appartenente all'asse reale, con centro di ascissa

$$\sigma_a = \frac{1}{1}(100 + 0.5 + 1) = 101.5$$

Il luogo delle radici finale è riportato nella seguente figura.



Dall'analisi svolta mediante il criterio di Routh, risulta che il luogo delle radici attraversa l'asse immaginario in corrispondenza di $\pm j\omega^* = \pm j15.12$ per $K = K^* = 1.28$.

Fondamenti di Controlli Automatici
Diagrammi di Bode

Cognome	
Nome	
Matricola	
Corso	

Bode Plot

