Fondamenti di Controlli Automatici
A.A. 2013/14
5 febbraio 2015
Quiz di Teoria

Cognome	
Nome	
Matricola	
Corso di Laurea	

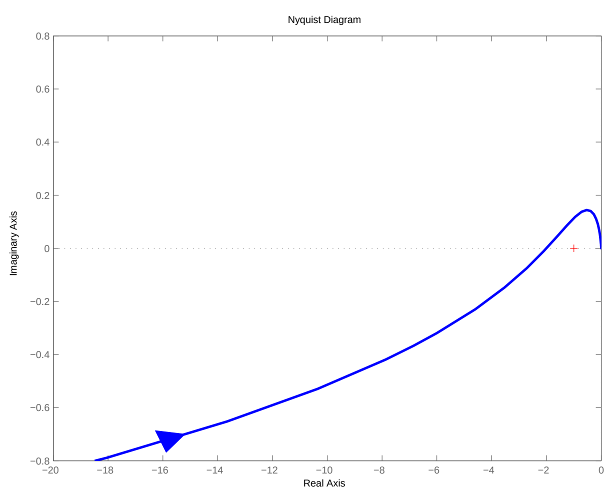
Per ciascuno dei test a soluzione multipla segnare con una crocetta tutte le affermazioni che si ritengono giuste. In ogni quiz almeno una affermazione è corretta.

La prova di teoria si ritiene superata se vengono totalizzati almeno 5 punti su 10; diversamente il compito verrà ritenuto insufficiente a prescindere dal risultato della seconda parte della prova (esercizi).

1. La risposta al gradino di un sistema del primo ordine raggiunge, dopo tre costanti di tempo dall'applicazione dell'ingresso:
   - ◯ il 100% del valore finale
   - ◯ il 99% del valore finale
   - ◯ il 95% del valore finale
   - ◯ il 85% del valore finale

2. L'errore a regime di un sistema $G(s)$ con ingresso a parabola $r(t) = \frac{R_0}{2}t^2$ si può determinare come $e = \frac{R_0}{K_e}$ dove K_e vale:
   - ◯ $K_e = \lim_{s\to 0} G(s)$
   - ◯ $K_e = \lim_{s\to 0} sG(s)$
   - ◯ $K_e = \lim_{s\to 0} s^2G(s)$

3. Sia data la funzione di anello
$$G(s) = K\frac{(1+\tau_1' s)}{s^2\,(1+\tau_1 s)\,(1+\tau_2 s)}$$
dove le costanti τ_1', τ_1 e τ_2 sono positive. Il corrispondente diagramma di Nyquist per le sole pulsazioni positive è riportato in figura. Determinare per quali valori del guadagno K il sistema retroazionato risulta asintoticamente stabile:
   - ◯ $\forall K > 0$
   - ◯ $\forall K < 0$
   - ◯ il sistema retroazionato è sempre instabile
   - ◯ $0 < K < K_1$ con $K_1 > 0$
   - ◯ $K_2 < K < 0$ con $K_2 < 0$



4. La funzione di trasferimento $G(s) = \frac{Y(s)}{X(s)} = \dfrac{4s^2+s+3}{5s^3+s^2+3s}$ corrisponde all'equazione differenziale:
   - ◯ $5\dddot{y}(t) + \ddot{y}(t) + 3\dot{y}(t) = 4\ddot{x}(t) + \dot{x}(t) + 3x(t)$
   - ◯ $5\dddot{x}(t) + \ddot{x}(t) + 3\dot{x}(t) = 4\ddot{y}(t) + \dot{y}(t) + 3y(t)$
   - ◯ $5\ddot{y}(t) + \dot{y}(t) + 3y(t) = 4\ddot{x}(t) + \dot{x}(t) + 3x(t)$

5. Un sistema del secondo ordine a poli complessi coniugati e privo di zeri, ha un picco di risonanza $M_R > 1$
   - ◯ se e solo se $0 < \delta < 1/\sqrt{2}$;
   - ◯ se e solo se $0 < \delta < 0.5$;
   - ◯ se e solo se $0.5 < \delta < 1/\sqrt{2}$;
   - ◯ se e solo se $0 < \delta < 1$.

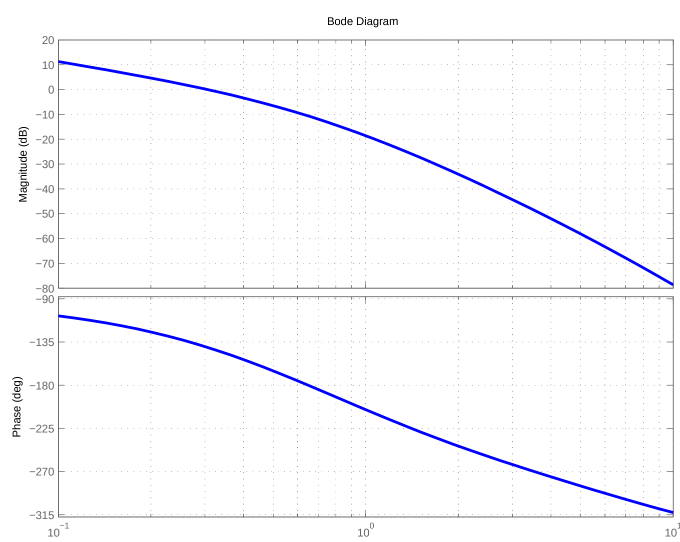
6. Il diagramma di Bode delle ampiezze del sistema $G(s) = \dfrac{(s+z_1)(s-z_2)}{s(s+p_1)(s+p_2)}$ con $0 < z_1 < z_2 < p_1 < p_2$, per $\omega \to \infty$ presenta:
   - ◯ pendenza di -20 db/decade
   - ◯ pendenza di -40 db/decade
   - ◯ pendenza di -60 db/decade
   - ◯ pendenza di -80 db/decade

7. Il valore iniziale della risposta al gradino unitario del sistema $G(s) = \dfrac{3s^3+s^2+12}{4s^3+5s^2+s+1}$ è pari a:
   - ◯ $3/4$;
   - ◯ 12;
   - ◯ ∞;
   - ◯ 0.

8. Il metodo della Trasformata di Laplace nella risoluzione di equazioni differenziali lineari a parametri concentrati
   - ◯ permette di calcolare la risposta libera del sistema
   - ◯ permette di calcolare la risposta forzata del sistema
   - ◯ può essere utilizzato solo nel caso di equazioni tempo invarianti
   - ◯ può essere utilizzato anche nel caso di equazioni tempo varianti

9. Sia $F(s)$ la trasformata di Laplace della funzione del tempo $f(t)$, $\mathcal{L}[f(t)] = F(s)$ (con $f(t)$ nulla per $t < 0$). La proprietà di traslazione nel tempo delle trasformate di Laplace afferma che:
   - ◯ $\mathcal{L}[f(t-t_0)] = e^{t_0}\, F(s)$
   - ◯ $\mathcal{L}[f(t-t_0)] = e^{-t_0 s}\, F(s)$
   - ◯ $\mathcal{L}[f(t-t_0)] = e^{-s}\, F(s)$
   - ◯ $\mathcal{L}[f(t-t_0)] = e^{s/t_0}\, F(s)$

10. Si faccia riferimento ai diagrammi di Bode riportati a fianco relativi a un sistema $G(s)$ a fase minima. Il margine di ampiezza M_α e il margine di fase M_φ sono:
    - ◯ $M_\alpha \simeq 10$ dB e $M_\varphi \simeq -44°$
    - ◯ $M_\alpha \simeq -10$ dB e $M_\varphi \simeq 44°$
    - ◯ $M_\alpha \simeq -10$ dB e $M_\varphi \simeq -44°$
    - ◯ $M_\alpha \simeq 10$ dB e $M_\varphi \simeq 44°$



Fondamenti di Controlli Automatici
A.A. 2013/14
5 febbraio 2015
Esercizi

Cognome	
Nome	
Matricola	
Corso di Laurea	

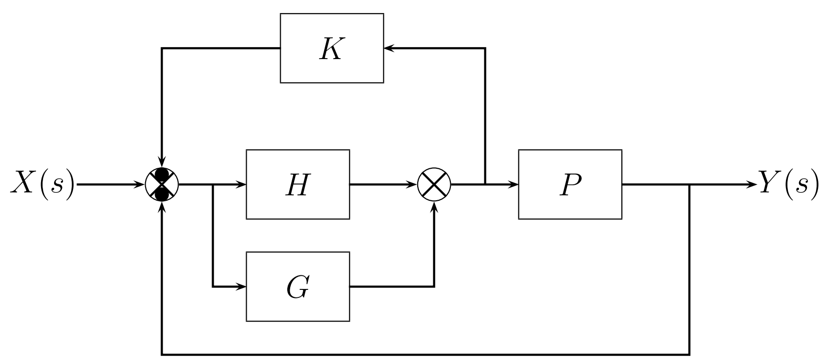
a) Determinare la trasformata di Laplace $X_i(s)$ dei seguenti segnali temporali $x_i(t)$:

$$x_1(t) = [2 - \cos(4\,t)]\,e^{-3t}, \qquad x_2(t) = 1 + t^2 e^{2-t}$$

b) Calcolare la risposta impulsiva $g_i(t)$ delle seguenti funzioni di trasferimento $G_i(s)$:

$$G_1(s) = \frac{2s^2 + 5s + 10}{s^2 + 3s - 10}, \qquad G_2(s) = \frac{21}{(s+3)^2 + 7^2} + \frac{10}{(s+5)^3}$$

c) Dato il seguente schema a blocchi:

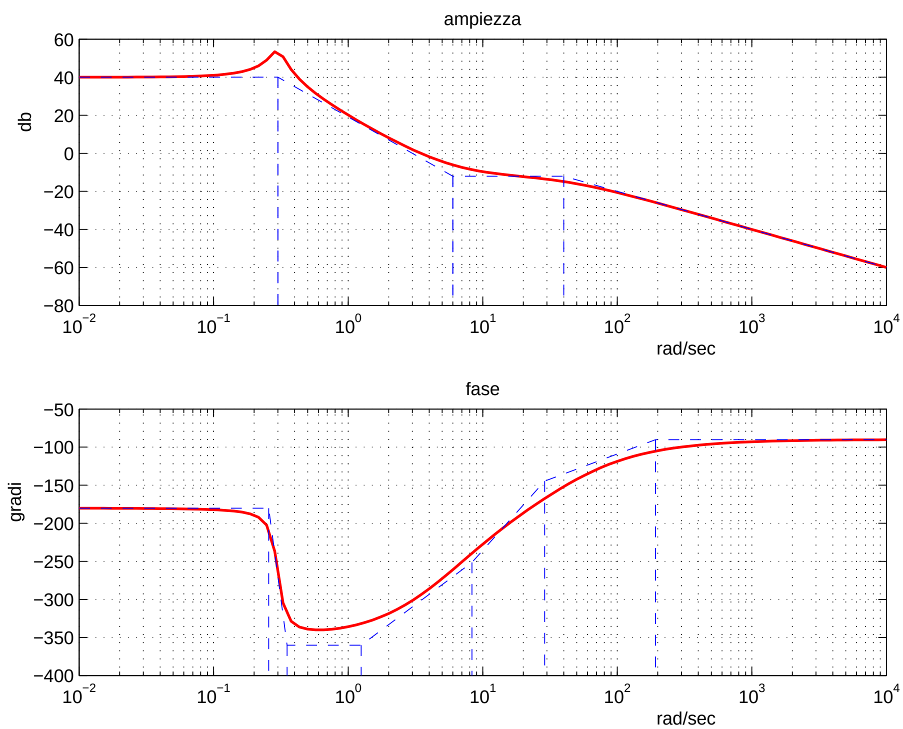


utilizzando la formula di Mason calcolare la funzione di trasferimento $G(s)$ che lega l'ingresso $X(s)$ all'uscita $Y(s)$:

$$G(s) = \frac{Y(s)}{X(s)} =$$

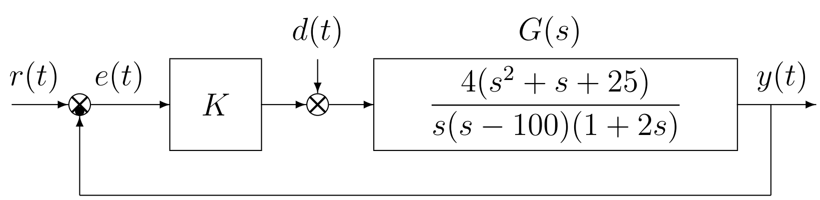
d) Sia data la funzione di trasferimento $G(s) = \dfrac{(3 + 0.2s)(s^2 + 60s + 1800)}{(2 + 0.8s)(8 + 0.2s)(s^2 + 16s + 80)}$
Disegnare l'andamento qualitativo della risposta $y(t)$ a un gradino in ingresso di ampiezza 10, $x(t) = 10$. Calcolare il valore a regime y_∞ dell'uscita $y(t)$ del sistema, stimare qualitativamente il tempo di assestamento T_a del sistema e il periodo T_ω dell'eventuale oscillazione smorzata.

e) Facendo riferimento ai diagrammi di Bode della funzione $G(s)$ mostrati in figura



si ricavi l'espressione analitica della funzione $G(s)$.

f) Sia dato il seguente sistema retroazionato:



f.1) Determinare per quali valori del parametro K il sistema retroazionato è asintoticamente stabile.

f.2) Posto $K = 1$ disegnare qualitativamente il diagramma di Nyquist completo della funzione d'anello $KG(s)$. Calcolare esattamente la posizione σ_0 di un eventuale asintoto, le eventuali intersezioni con l'asse reale e i corrispondenti valori delle pulsazioni.

f.3) Posto $K = 100$, calcolare l'errore a regime $e(\infty)$ quando sul sistema retroazionato agiscono contemporaneamente il segnale $r(t) = 10$ e il disturbo $d(t) = 1$.

f.4) Posto $K = 1$, tracciare (nello schema fornito in allegato) i diagrammi di Bode delle ampiezze e delle fasi del guadagno di anello $K\,G(s)$.

g) **Non è richiesto lo svolgimento di questo esercizio agli iscritti ad Ingegneria Ambientale o a corsi per i quali l'esame vale meno di 6 CFU.**

Con riferimento al sistema descritto nell'esercizio f), tracciare qualitativamente il luogo delle radici del sistema retroazionato per valori positivi del parametro K. Determinare esattamente gli asintoti, il centro degli asintoti, le intersezioni con l'asse immaginario e i corrispondenti valori del guadagno K. Determinare gli eventuali punti di diramazione solo qualitativamente.

Fondamenti di Controlli Automatici
A.A. 2013/14
5 febbraio 2015
Quiz di Teoria

Cognome	
Nome	
Matricola	
Corso di Laurea	

Per ciascuno dei test a soluzione multipla segnare con una crocetta tutte le affermazioni che si ritengono giuste. In ogni quiz almeno una affermazione è corretta.

La prova di teoria si ritiene superata se vengono totalizzati almeno 5 punti su 10; diversamente il compito verrà ritenuto insufficiente a prescindere dal risultato della seconda parte della prova (esercizi).

1. La risposta al gradino di un sistema del primo ordine raggiunge, dopo tre costanti di tempo dall'applicazione dell'ingresso:

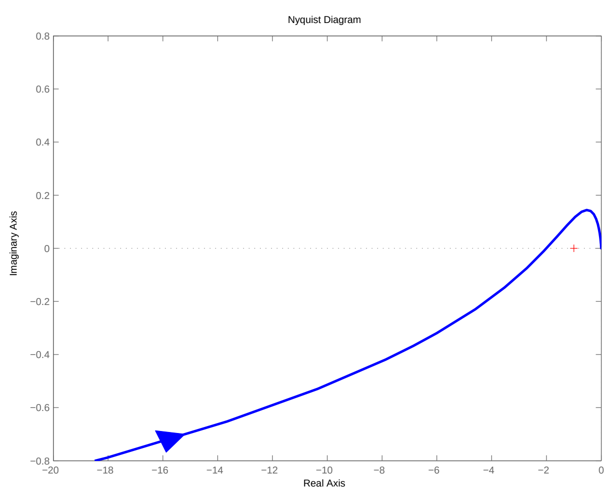
   ○ il 100% del valore finale
   ○ il 99% del valore finale
   ⊗ il 95% del valore finale
   ○ il 85% del valore finale

2. L'errore a regime di un sistema $G(s)$ con ingresso a parabola $r(t) = \frac{R_0}{2}t^2$ si può determinare come $e = \frac{R_0}{K_e}$ dove K_e vale:

   ○ $K_e = \lim_{s\to 0} G(s)$
   ○ $K_e = \lim_{s\to 0} sG(s)$
   ⊗ $K_e = \lim_{s\to 0} s^2G(s)$

3. Sia data la funzione di anello

$$G(s) = K\frac{(1+\tau_1' s)}{s^2\,(1+\tau_1 s)\,(1+\tau_2 s)}$$



   dove le costanti τ_1', τ_1 e τ_2 sono positive. Il corrispondente diagramma di Nyquist per le sole pulsazioni positive è riportato in figura. Determinare per quali valori del guadagno K il sistema retroazionato risulta asintoticamente stabile:

   ○ $\forall K > 0$
   ○ $\forall K < 0$
   ○ il sistema retroazionato è sempre instabile
   ⊗ $0 < K < K_1$ con $K_1 > 0$
   ○ $K_2 < K < 0$ con $K_2 < 0$

4. La funzione di trasferimento $G(s) = \frac{Y(s)}{X(s)} = \dfrac{4s^2+s+3}{5s^3+s^2+3s}$ corrisponde all'equazione differenziale:

   ⊗ $5\dddot{y}(t) + \ddot{y}(t) + 3\dot{y}(t) = 4\ddot{x}(t) + \dot{x}(t) + 3x(t)$
   ○ $5\dddot{x}(t) + \ddot{x}(t) + 3\dot{x}(t) = 4\ddot{y}(t) + \dot{y}(t) + 3y(t)$
   ○ $5\ddot{y}(t) + \dot{y}(t) + 3y(t) = 4\ddot{x}(t) + \dot{x}(t) + 3x(t)$

5. Un sistema del secondo ordine a poli complessi coniugati e privo di zeri, ha un picco di risonanza $M_R > 1$

   ⊗ se e solo se $0 < \delta < 1/\sqrt{2}$;
   ◯ se e solo se $0 < \delta < 0.5$;
   ◯ se e solo se $0.5 < \delta < 1/\sqrt{2}$;
   ◯ se e solo se $0 < \delta < 1$.

6. Il diagramma di Bode delle ampiezze del sistema $G(s) = \dfrac{(s+z_1)(s-z_2)}{s(s+p_1)(s+p_2)}$ con $0 < z_1 < z_2 < p_1 < p_2$, per $\omega \to \infty$ presenta:

   ⊗ pendenza di -20 db/decade
   ◯ pendenza di -40 db/decade
   ◯ pendenza di -60 db/decade
   ◯ pendenza di -80 db/decade

7. Il valore iniziale della risposta al gradino unitario del sistema $G(s) = \frac{3s^3+s^2+12}{4s^3+5s^2+s+1}$ è pari a:

   ⊗ $3/4$;
   ◯ 12;
   ◯ ∞;
   ◯ 0.

8. Il metodo della Trasformata di Laplace nella risoluzione di equazioni differenziali lineari a parametri concentrati

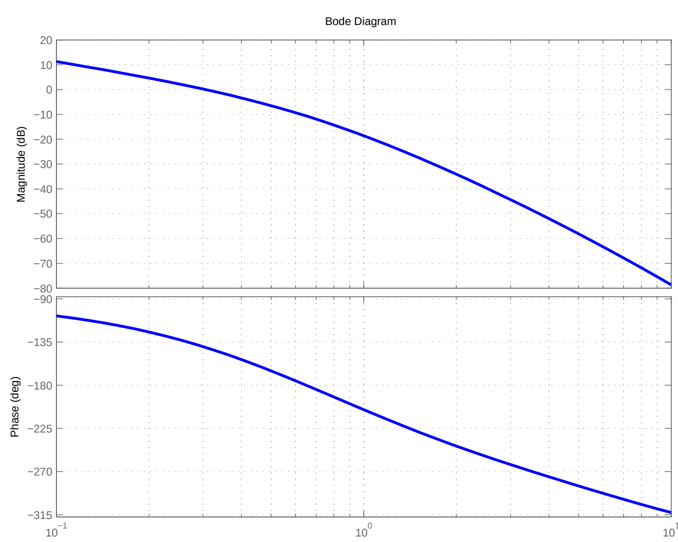
   ⊗ permette di calcolare la risposta libera del sistema
   ⊗ permette di calcolare la risposta forzata del sistema
   ⊗ può essere utilizzato solo nel caso di equazioni tempo invarianti
   ◯ può essere utilizzato anche nel caso di equazioni tempo varianti

9. Sia $F(s)$ la trasformata di Laplace della funzione del tempo $f(t)$, $\mathcal{L}[f(t)] = F(s)$ (con $f(t)$ nulla per $t < 0$). La proprietà di traslazione nel tempo delle trasformate di Laplace afferma che:

   ◯ $\mathcal{L}[f(t-t_0)] = e^{t_0}\, F(s)$
   ⊗ $\mathcal{L}[f(t-t_0)] = e^{-t_0 s}\, F(s)$
   ◯ $\mathcal{L}[f(t-t_0)] = e^{-s}\, F(s)$
   ◯ $\mathcal{L}[f(t-t_0)] = e^{s/t_0}\, F(s)$

10. Si faccia riferimento ai diagrammi di Bode riportati a fianco relativi a un sistema $G(s)$ a fase minima. Il margine di ampiezza M_α e il margine di fase M_φ sono:

   ◯ $M_\alpha \simeq 10$ dB e $M_\varphi \simeq -44°$
   ◯ $M_\alpha \simeq -10$ dB e $M_\varphi \simeq 44°$
   ◯ $M_\alpha \simeq -10$ dB e $M_\varphi \simeq -44°$
   ⊗ $M_\alpha \simeq 10$ dB e $M_\varphi \simeq 44°$



Fondamenti di Controlli Automatici
A.A. 2013/14
5 febbraio 2015
Esercizi

Cognome	
Nome	
Matricola	
Corso di Laurea	

a) Determinare la trasformata di Laplace $X_i(s)$ dei seguenti segnali temporali $x_i(t)$:

$$x_1(t) = [2 - \cos(4\,t)]\, e^{-3t}, \qquad x_2(t) = 1 + t^2 e^{2-t}$$

<u>Soluzione</u>:

$$X_1(s) = \frac{2}{(s+3)} - \frac{(s+3)}{(s+3)^2 + 4^2}, \qquad X_2(s) = \frac{1}{s} + \frac{2e^2}{(s+1)^3}$$

b) Calcolare la risposta impulsiva $g_i(t)$ delle seguenti funzioni di trasferimento $G_i(s)$:

$$G_1(s) = \frac{2s^2 + 5s + 10}{s^2 + 3s - 10}, \qquad G_2(s) = \frac{21}{(s+3)^2 + 7^2} + \frac{10}{(s+5)^3}$$

<u>Soluzione</u>:
La funzione $G_1(s)$ può essere riscritta come

$$G_1(s) = 2 + \frac{4}{s-2} - \frac{5}{s+5}$$

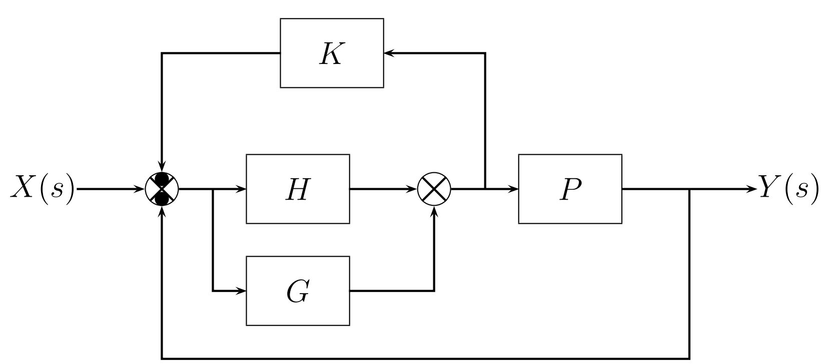
di conseguenza la risposta impulsiva (ovvero l'anti-trasformata di Laplace) risulta

$$g_1(t) = 2\delta(t) + 4\,e^{2t} - 5\,e^{-5t}.$$

La funzione $G_2(s)$ può essere direttamente antitrasformata di conseguenza la sua risposta impulsiva risulta

$$g_2(t) = 3\,e^{-3t}\,\sin(7t) + 5t^2 e^{-5t}$$

c) Dato il seguente schema a blocchi:



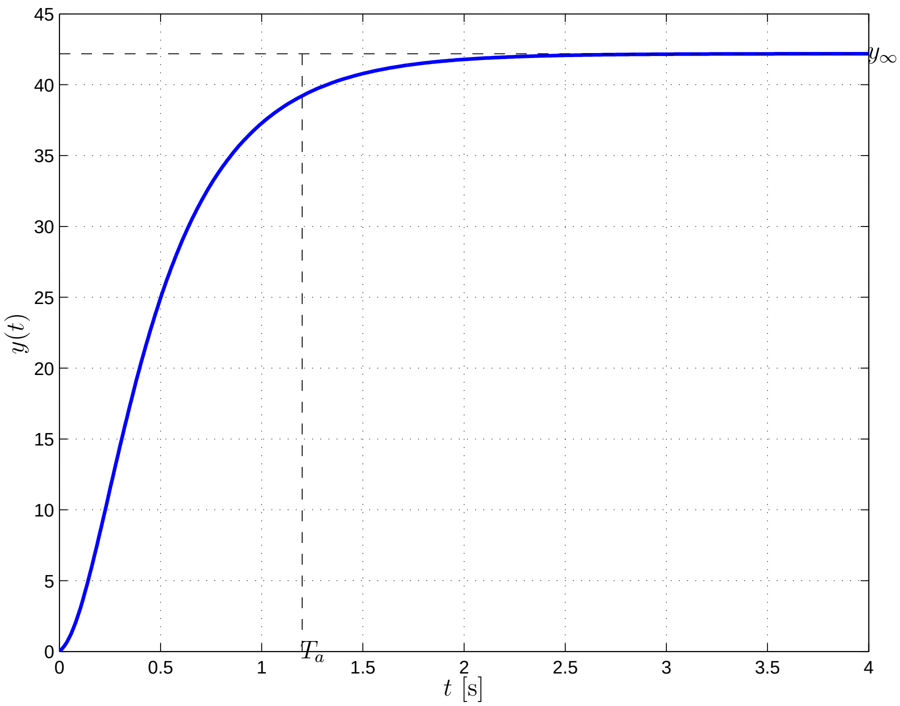
utilizzando la formula di Mason calcolare la funzione di trasferimento $G(s)$ che lega l'ingresso $X(s)$ all'uscita $Y(s)$:

$$G(s) = \frac{Y(s)}{X(s)} = \frac{HP + GP}{1 + HP + HK + GK + GP}$$

d) Sia data la funzione di trasferimento $G(s) = \dfrac{(3+0.2s)(s^2+60s+1800)}{(2+0.8s)(8+0.2s)(s^2+16s+80)}$

Disegnare l'andamento qualitativo della risposta $y(t)$ a un gradino in ingresso di ampiezza 10, $x(t) = 10$. Calcolare il valore a regime y_∞ dell'uscita $y(t)$ del sistema, stimare qualitativamente il tempo di assestamento T_a del sistema e il periodo T_ω dell'eventuale oscillazione smorzata.

Soluzione: Il sistema ha un polo dominante reale $p = -2.5$ per cui la risposta al gradino avrà un andamento qualitativo di tipo aperiodico. In figura è riportata la risposta del sistema.



Il valore a regime dell'uscita per un gradino in ingresso di ampiezza $A = 10$ risulta

$$y_\infty = A\,G(0) = 10 \cdot 4.22 = 42.2$$

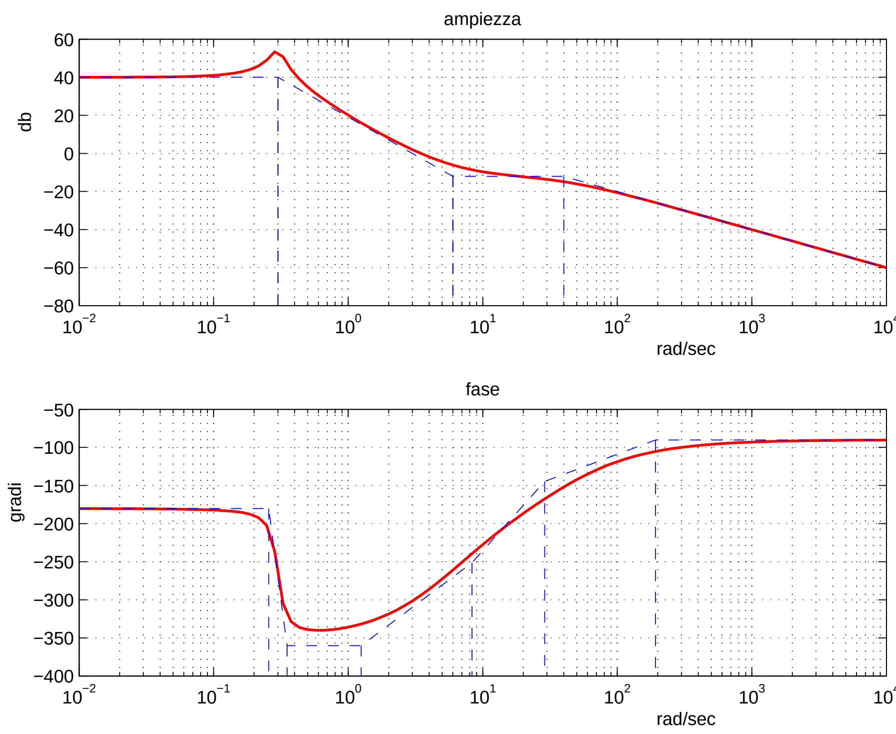
Il tempo di assestamento T_a è

$$T_a = \frac{3}{|\sigma|} = \frac{3}{2.5} = 1.2 \text{ s},$$

Non è presente oscillazione

$$T_\omega = \nexists$$

e) Facendo riferimento ai diagrammi di Bode della funzione $G(s)$ mostrati in figura



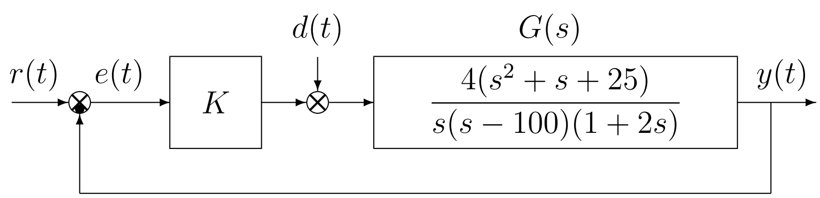
si ricavi l'espressione analitica della funzione $G(s)$.

<u>Soluzione</u>

$$G(s) = \frac{10(s+6)^2}{(s-40)(s^2+0.06s+0.3^2)}$$

$$\delta = 0.1$$

f) Sia dato il seguente sistema retroazionato:



f.1) Determinare per quali valori del parametro K il sistema retroazionato è asintoticamente stabile.

<u>Soluzione:</u>

l'equazione caratteristica del sistema retroazionato è

$$1 + K\frac{4(s^2+s+25)}{s(s-100)(1+2s)} = 0 \qquad \rightarrow \qquad s^3 + (2K-99.5)s^2 + (2K-50)s + 50K = 0$$

La corrispondente tabella di Routh è la seguente

$$\begin{array}{c|cccl}
3 & 1 & 2K-50 & & \\
2 & 2K-99.5 & 50K & \rightarrow & K > 49.75 \\
1 & 4K^2-349K+4975 & & \rightarrow & K < 17.95 \vee K > 69.3 \\
0 & 50K & & \rightarrow & K > 0
\end{array}$$

Il sistema retroazionato è asintoticamente stabile per:

$$K > 69.3 = K^*$$

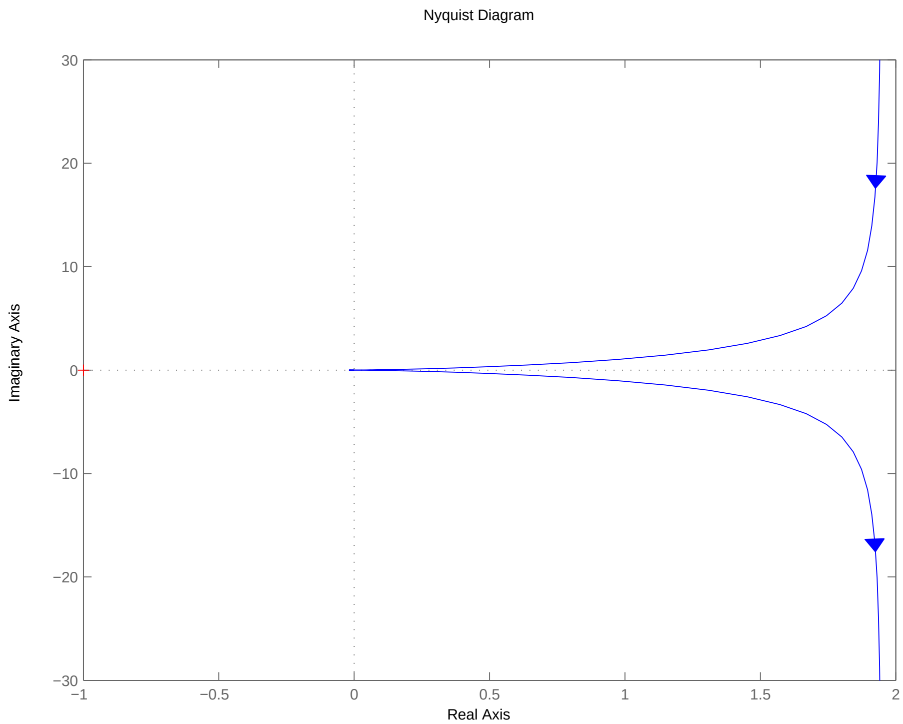
La pulsazione ω^* corrispondente al valore limite K^* è:

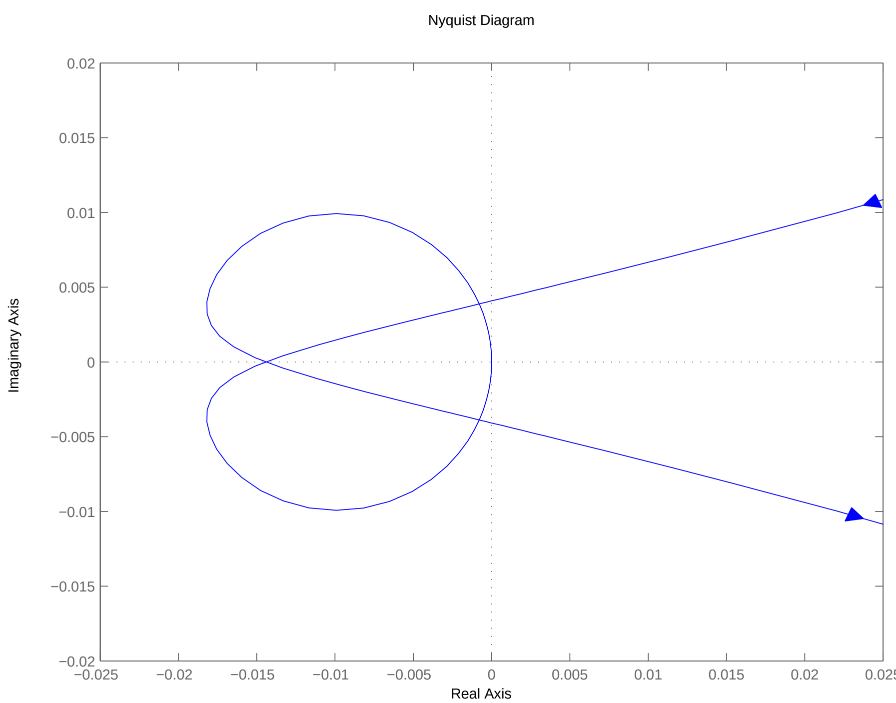
$$\omega^* = \sqrt{\frac{2K^* - 50}{1}} = 9.41 \text{ rad/s}$$

f.2) Posto $K = 1$ disegnare qualitativamente il diagramma di Nyquist completo della funzione d'anello $KG(s)$. Calcolare esattamente la posizione σ_0 di un eventuale asintoto, le eventuali intersezioni con l'asse reale e i corrispondenti valori delle pulsazioni.

Soluzione:

Il diagramma di Nyquist della funzione $G(s)$ è riportato in figura.





La funzione approssimante per $\omega \to 0$ è

$$G_0(s) = -\frac{1}{s}$$

pertanto il diagramma parte all'infinito con fase iniziale $\varphi_0 = -\frac{3}{2}\pi$.
La funzione approssimante per $\omega \to \infty$ è

$$G_\infty(s) = \frac{2}{s}$$

e quindi il diagramma giunge nell'origine con fase finale $\varphi_\infty = -\frac{\pi}{2}$.
Il parametro Δ_τ vale

$$\Delta_\tau = \frac{1}{25} + \frac{1}{100} - 2 = -1.95 < 0$$

pertanto il diagramma parte in ritardo rispetto alla fase iniziale φ_0.
Il sistema è di tipo 1 pertanto esiste un asintoto verticale la cui ascissa è

$$\sigma_a = K\Delta_\tau = -1 \cdot (-1.95) = 1.95$$

Il parametro Δ_p vale

$$\Delta_p = -1 - (100 - 0.5) = -100.5 < 0$$

pertanto il diagramma arriva in ritardo rispetto alla fase finale φ_∞.
Lo variazione di fase complessiva è

$$\Delta\varphi = +\pi + \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{2} = +\pi$$

Esiste un'intersezione con l'asse reale che, in virtù dell'analisi svolta con Routh al primo punto, risulta all'ascissa

$$\sigma^* = -1/K^* = -0.0144$$

f.3) Posto $K = 100$, calcolare l'errore a regime $e(\infty)$ quando sul sistema retroazionato agiscono contemporaneamente il segnale $r(t) = 10$ e il disturbo $d(t) = 1$.

Soluzione:
Dato che il sistema è lineare e soggetto quindi alla sovrapposizione degli effetti, l'errore $E(s)$, espresso mediante la trasformata di Laplace, risulterà:

$$E(s) = E_r(s) + E_d(s)$$

dove $E_r(s)$ è l'errore dovuto al riferimento mentre $E_d(s)$ è l'errore dovuto al disturbo. L'errore $e_r(\infty)$ dovuto al riferimento sarà nullo, essendo il sistema considerato di tipo 1 e con ingresso a gradino: $e_r(\infty) = 0$.
L'errore dovuto al disturbo $d(t)$ è dato da:

$$E_d(s) = F_d(s)D(s)$$

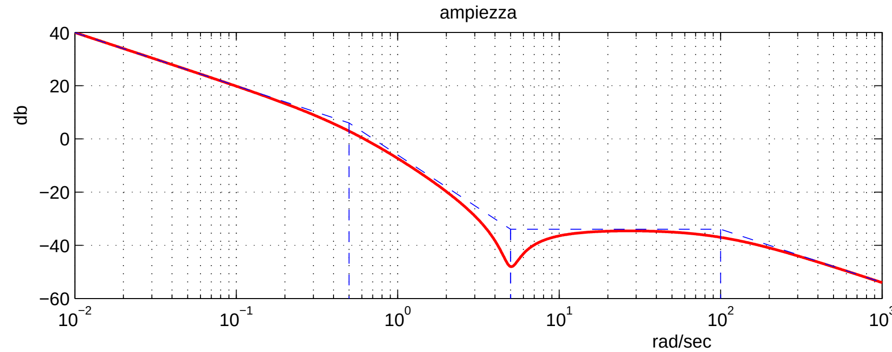
dove $D(s)$ è la trasformata di Laplace di $d(t)$ e $F_d(s)$ è la funzione di trasferimento tra $D(s)$ e $E_d(s)$ che vale

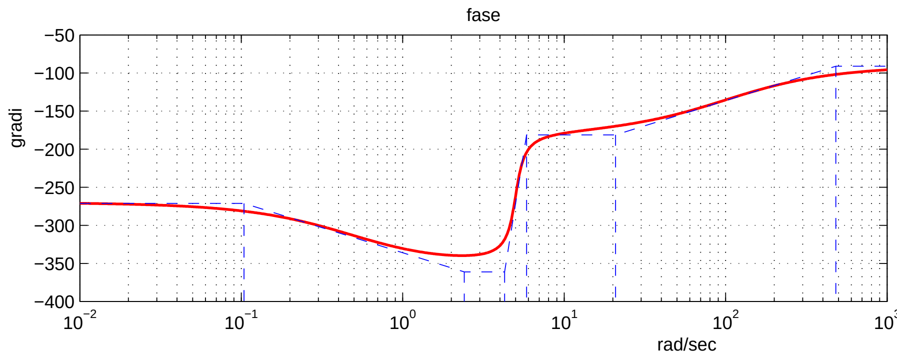
$$F_d(s) = -\frac{G(s)}{1 + KG(s)} = \frac{-2s^2 - 2s - 50}{s^3 + 100.5s^2 + 150s + 5000}.$$

L'errore $e_d(\infty)$ dovuto al disturbo è dato da $e_d(\infty) = 1\,F_d(0) = -0.01$ essendo $F_d(0) = -0.01$ il guadagno statico di $F_d(s)$. Pertanto l'errore a regime complessivo sarà: $e(\infty) = e_r(\infty) + e_d(\infty) = -0.01$.

f.4) Posto $K = 1$, tracciare (nello schema fornito in allegato) i diagrammi di Bode delle ampiezze e delle fasi del guadagno di anello $K\,G(s)$.

Soluzione:
In figura sono riportati i diagrammi di Bode del sistema. Sul diagramma asintotico delle ampiezze il guadagno β in corrispondenza della pulsazione $\omega = 0.5$ è $\beta = \left|-\frac{1}{0.5}\right| = 2 \simeq 6$ dB.
Il coefficiente di smorzamento della coppia di zeri complessi coniugati è $\delta = 0.1$ pertanto si avrà $M_{\omega_n} = \frac{1}{2\delta} = 5 \simeq 14$ dB.





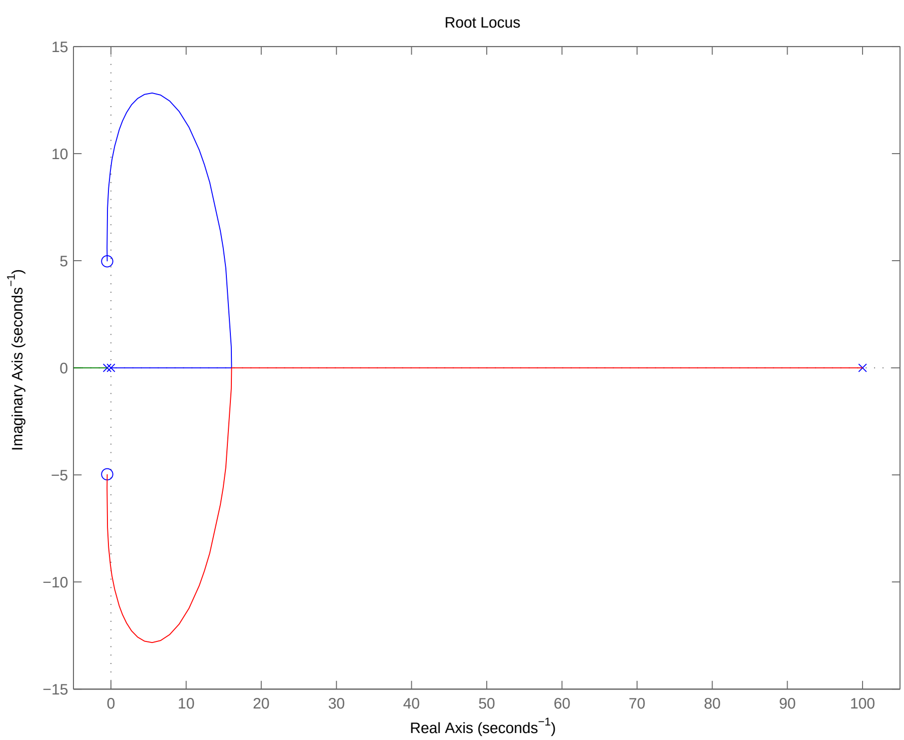
g) **Non è richiesto lo svolgimento di questo esercizio agli iscritti ad Ingegneria Ambientale o a corsi per i quali l'esame vale meno di 6 CFU.**

Con riferimento al sistema descritto nell'esercizio f), tracciare qualitativamente il luogo delle radici del sistema retroazionato per valori positivi del parametro K. Determinare esattamente gli asintoti, il centro degli asintoti, le intersezioni con l'asse immaginario e i corrispondenti valori del guadagno K. Determinare gli eventuali punti di diramazione solo qualitativamente.

Soluzione: Essendo 1 il grado relativo del sistema, esiste 1 asintoto, appartenente all'asse reale, con centro di ascissa

$$\sigma_a = \frac{1}{1}(100 - 0.5 + 1) = 100.5$$

Il luogo delle radici finale è riportato nella seguente figura.



Dall'analisi svolta mediante il criterio di Routh, risulta che il luogo delle radici attraversa l'asse immaginario in corrispondenza di $\pm j\omega^* = \pm j9.41$ per $K = K^* = 69.3$.

Fondamenti di Controlli Automatici

Diagrammi di Bode

Cognome	
Nome	
Matricola	
Corso