

Fondamenti di Controlli Automatici
A.A. 2013/14
2 settembre 2014
Quiz di Teoria

Cognome	
Nome	
Matricola	
Corso di Laurea	

Per ciascuno dei test a soluzione multipla segnare con una crocetta tutte le affermazioni che si ritengono giuste. In ogni quiz almeno una affermazione è corretta.

La prova di teoria si ritiene superata se vengono totalizzati almeno 5 punti su 10; diversamente il compito verrà ritenuto insufficiente a prescindere dal risultato della seconda parte della prova (esercizi).

1. L'anti-trasformata di Laplace della funzione $F(s) = \frac{2s^3 + 14s^2 + 33s + 23}{s^3 + 5s^2 + 8s + 4} = \frac{2s^3 + 14s^2 + 33s + 23}{(s+2)^2(s+1)}$ è:

- $f(t) = 2\delta(t) + 2e^{-2t} + 2e^{-t}$
- $f(t) = 2\delta(t) + 2e^{-2t} + 3te^{-2t} + 2e^{-t}$
- $f(t) = 2e^{-2t} + 3te^{-2t} + 2e^{-t}$
- $f(t) = 2e^{2t} + 3te^{2t} + 2e^t$

2. La risposta impulsiva $g(t)$ del sistema $G(s) = \frac{1}{s^2(s+2)}$:

- è limitata e tende a zero per $t \rightarrow \infty$
- è limitata ma non tende a zero per $t \rightarrow \infty$
- non è limitata

3. La massima sovraelongazione del sistema $G(s) = \frac{1}{s^2 + 6s + 9}$ in risposta ad un gradino unitario è:

- $S = 5\%$
- $S = 10\%$
- $S = 100\%$
- $S = 0\%$

4. Il valore iniziale della derivata della risposta al gradino unitario del sistema

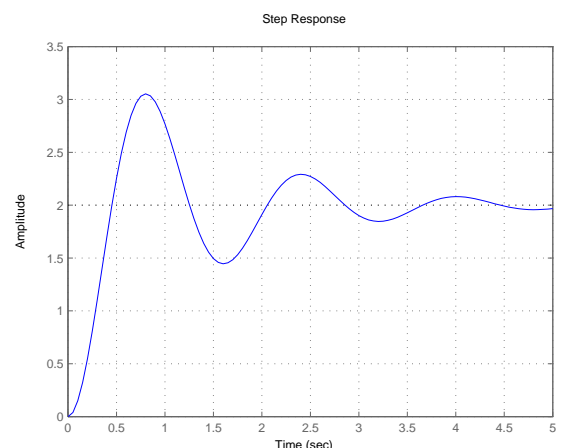
$$G(s) = \frac{s^3 + 4s^2 + 3s + 2}{3s^4 + 27s^3 + 81s^2 + 93s + 36}$$

è pari a:

- 1/18
- 1/3
- 0
- ∞

5. A partire dalla risposta al gradino mostrata in figura è possibile stimare la parte immaginaria ω dei poli dominanti del sistema?

- sì, $\omega \approx 2$
- sì, $\omega \approx 4$
- sì, $\omega \approx 8$
- no



6. Un sistema del secondo ordine a poli complessi coniugati e privo di zeri, ha un picco di risonanza $M_R > 1$

- se e solo se $0 < \delta < 1/\sqrt{2}$
- se e solo se $0 < \delta < 0.5$
- se e solo se $0.5 < \delta < 1/\sqrt{2}$
- se e solo se $0 < \delta < 1$

7. L'equazione differenziale corrispondente alla funzione di trasferimento $G(s) = \frac{Y(s)}{X(s)} = \frac{4s + 5}{s^2 + 3s + 2}$ è:

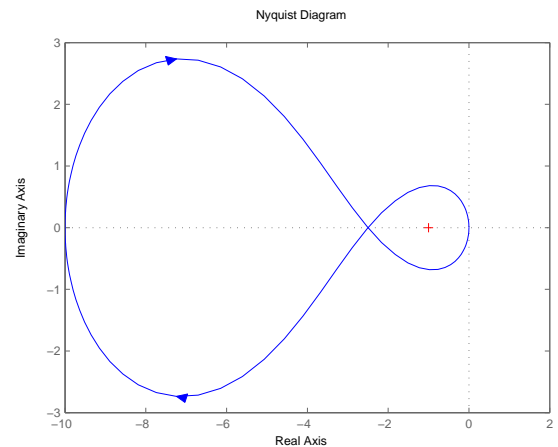
- $\ddot{x}(t) + 3\dot{x}(t) + 2x(t) = 4\dot{y}(t) + 5$
- $\ddot{x}(t) + 3\dot{x}(t) + 2x(t) = 4\dot{y}(t) + 5y(t)$
- $\ddot{y}(t) + 3\dot{y}(t) + 2y(t) = 4\dot{x}(t) + 5x(t)$
- $\ddot{y}(t) + 3\dot{y}(t) + 2 = 4\dot{x}(t) + 5x(t)$

8. Un sistema di tipo 1 chiuso in retroazione unitaria negativa

- ha guadagno statico unitario
- ha guadagno statico infinito
- ha errore a regime nullo per ingresso a rampa
- ha errore a regime nullo per ingresso a gradino

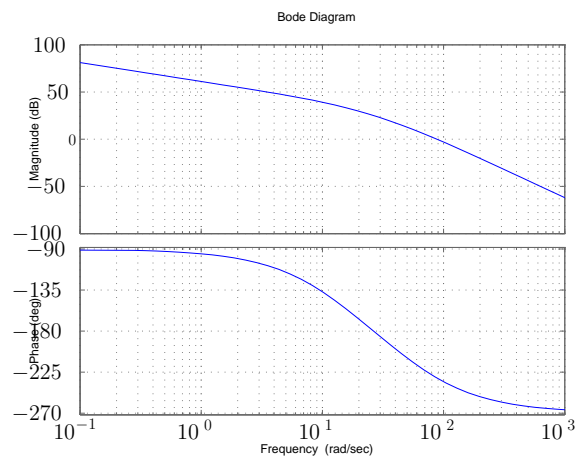
9. Sia data la funzione di anello $F(s)$, a cui corrisponde il diagramma polare completo di figura, caratterizzata da uno zero reale stabile, un polo reale stabile e un polo reale instabile. Il sistema che si ottiene ponendo $F(s)$ in retroazione unitaria negativa sarà caratterizzato da:

- due poli a parte reale negativa
- due poli a parte reale positiva
- un polo a parte reale positiva e uno a parte reale negativa
- due poli sul cui segno nulla si può desumere



10. Il sistema di cui si riportano i diagrammi di Bode ha:

- margine di ampiezza (in dB) e margine di fase entrambi positivi
- margine di fase positivo e margine di ampiezza (in dB) negativo
- margine di fase negativo e margine di ampiezza (in dB) positivo
- margine di ampiezza (in dB) e margine di fase entrambi negativi



Fondamenti di Controlli Automatici
A.A. 2013/14
2 settembre 2014
Esercizi

Cognome	
Nome	
Matricola	
Corso di Laurea	

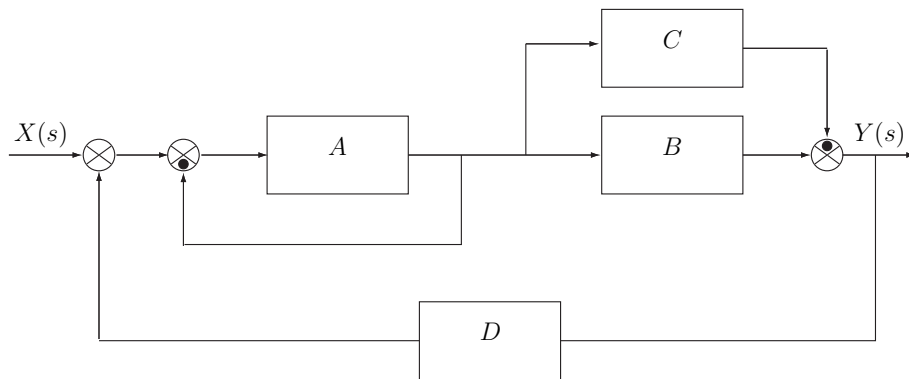
a) Determinare la trasformata di Laplace $X_i(s)$ dei seguenti segnali temporali $x_i(t)$:

$$x_1(t) = 5 [e^{-t} \cos(2t) + \delta(t)], \quad x_2(t) = 4(t^3 e^{-2t} + 7)$$

b) Calcolare la risposta impulsiva $g_i(t)$ delle seguenti funzioni di trasferimento $G_i(s)$:

$$G_1(s) = \frac{10s^2 - 64s + 78}{s(s^2 - 6s + 13)}, \quad G_2(s) = \frac{3s^2 + 10s + 9}{(s + 1)^2}$$

c) Dato il seguente schema a blocchi:



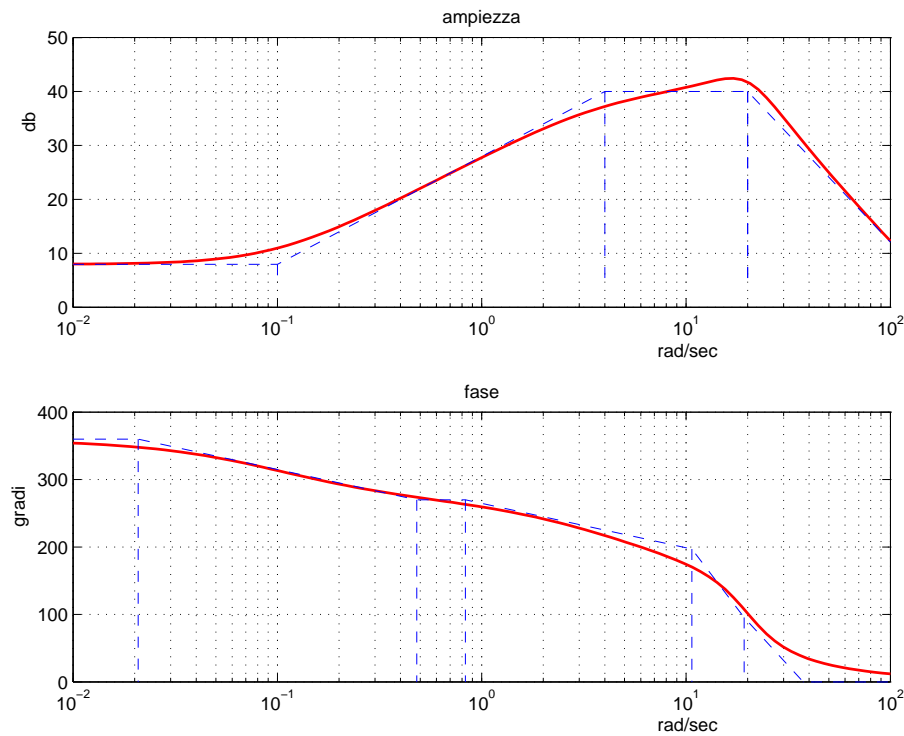
utilizzando la formula di Mason calcolare la funzione di trasferimento $G(s)$ che lega l'ingresso $X(s)$ all'uscita $Y(s)$:

$$G(s) = \frac{Y(s)}{X(s)} =$$

d) Sia data la funzione di trasferimento $G(s) = \frac{(1 + 0.01s)(s^2 + 80s + 6400)}{(1 + 5s)(1 + 0.5s)(s^2 + 4s + 80)}$

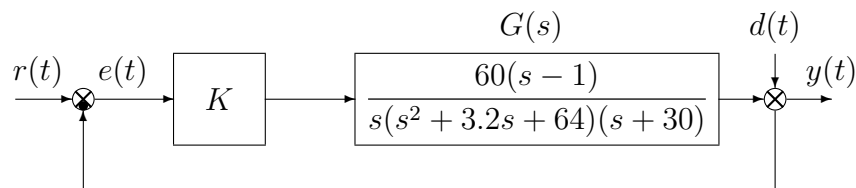
Disegnare l'andamento qualitativo della risposta $y(t)$ a un gradino in ingresso di ampiezza 4, $x(t) = 4$. Calcolare il valore a regime y_∞ dell'uscita $y(t)$ del sistema, stimare qualitativamente il tempo di assestamento T_a del sistema e il periodo T_w dell'eventuale oscillazione smorzata.

e) Facendo riferimento ai diagrammi di Bode della funzione $G(s)$ mostrati in figura



si ricavi l'espressione analitica della funzione $G(s)$.

f) Sia dato il seguente sistema retroazionato:



f.1) Determinare per quali valori del parametro K il sistema retroazionato è asintoticamente stabile.

f.2) Posto $K = 1$ disegnare qualitativamente il diagramma di Nyquist completo della funzione d'anello $KG(s)$. Calcolare esattamente la posizione σ_0 di un eventuale asintoto, le eventuali intersezioni con l'asse reale e i corrispondenti valori delle pulsazioni.

f.3) Posto $K = -1$, calcolare l'errore a regime $e(\infty)$ quando sul sistema retroazionato agiscono contemporaneamente il segnale $r(t) = 2$ e il disturbo $d(t) = 10$.

f.4) Posto $K = 1$, tracciare (nello schema fornito in allegato) i diagrammi di Bode delle ampiezze e delle fasi del guadagno di anello $KG(s)$.

g) **Non è richiesto lo svolgimento di questo esercizio agli iscritti ad Ingegneria Ambientale o a corsi per i quali l'esame vale meno di 6 CFU.**

Con riferimento al sistema descritto nell'esercizio f), tracciare qualitativamente il luogo delle radici del sistema retroazionato per valori negativi del parametro K . Determinare esattamente gli asintoti, il centro degli asintoti, le intersezioni con l'asse immaginario e i corrispondenti valori del guadagno K . Determinare gli eventuali punti di diramazione solo qualitativamente.

Fondamenti di Controlli Automatici
A.A. 2013/14
2 settembre 2014
Quiz di Teoria

Cognome	
Nome	
Matricola	
Corso di Laurea	

Per ciascuno dei test a soluzione multipla segnare con una crocetta tutte le affermazioni che si ritengono giuste. In ogni quiz almeno una affermazione è corretta.

La prova di teoria si ritiene superata se vengono totalizzati almeno 5 punti su 10; diversamente il compito verrà ritenuto insufficiente a prescindere dal risultato della seconda parte della prova (esercizi).

1. L'anti-trasformata di Laplace della funzione $F(s) = \frac{2s^3 + 14s^2 + 33s + 23}{s^3 + 5s^2 + 8s + 4} = \frac{2s^3 + 14s^2 + 33s + 23}{(s+2)^2(s+1)}$ è:

- $f(t) = 2\delta(t) + 2e^{-2t} + 2e^{-t}$
- $f(t) = 2\delta(t) + 2e^{-2t} + 3te^{-2t} + 2e^{-t}$
- $f(t) = 2e^{-2t} + 3te^{-2t} + 2e^{-t}$
- $f(t) = 2e^{2t} + 3te^{2t} + 2e^t$

2. La risposta impulsiva $g(t)$ del sistema $G(s) = \frac{1}{s^2(s+2)}$:

- è limitata e tende a zero per $t \rightarrow \infty$
- è limitata ma non tende a zero per $t \rightarrow \infty$
- non è limitata

3. La massima sovraelongazione del sistema $G(s) = \frac{1}{s^2 + 6s + 9}$ in risposta ad un gradino unitario è:

- $S = 5\%$
- $S = 10\%$
- $S = 100\%$
- $S = 0\%$

4. Il valore iniziale della derivata della risposta al gradino unitario del sistema

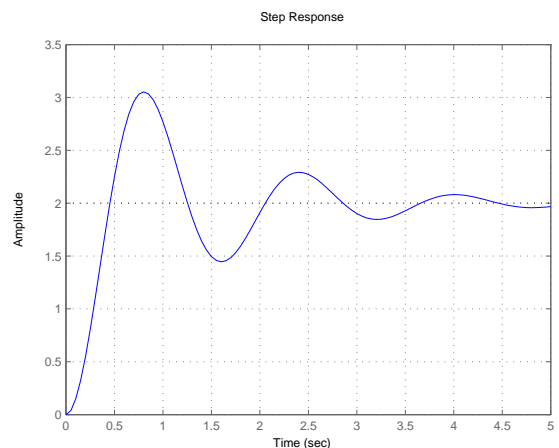
$$G(s) = \frac{s^3 + 4s^2 + 3s + 2}{3s^4 + 27s^3 + 81s^2 + 93s + 36}$$

è pari a:

- 1/18
- 1/3
- 0
- ∞

5. A partire dalla risposta al gradino mostrata in figura è possibile stimare la parte immaginaria ω dei poli dominanti del sistema?

- sì, $\omega \approx 2$
- sì, $\omega \approx 4$
- sì, $\omega \approx 8$
- no



6. Un sistema del secondo ordine a poli complessi coniugati e privo di zeri, ha un picco di risonanza $M_R > 1$

- se e solo se $0 < \delta < 1/\sqrt{2}$
- se e solo se $0 < \delta < 0.5$
- se e solo se $0.5 < \delta < 1/\sqrt{2}$
- se e solo se $0 < \delta < 1$

7. L'equazione differenziale corrispondente alla funzione di trasferimento $G(s) = \frac{Y(s)}{X(s)} = \frac{4s + 5}{s^2 + 3s + 2}$ è:

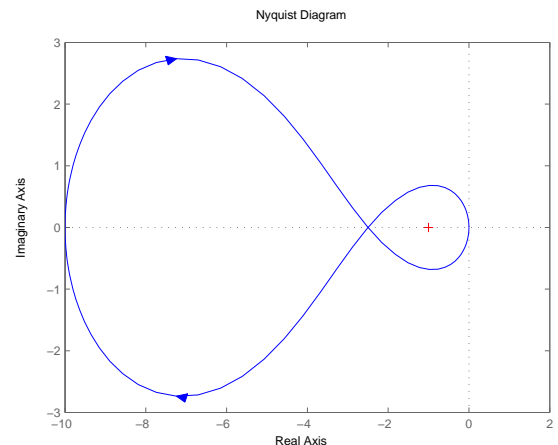
- $\ddot{x}(t) + 3\dot{x}(t) + 2x(t) = 4\dot{y}(t) + 5$
- $\ddot{x}(t) + 3\dot{x}(t) + 2x(t) = 4\dot{y}(t) + 5y(t)$
- $\ddot{y}(t) + 3\dot{y}(t) + 2y(t) = 4\dot{x}(t) + 5x(t)$
- $\ddot{y}(t) + 3\dot{y}(t) + 2 = 4\dot{x}(t) + 5x(t)$

8. Un sistema di tipo 1 chiuso in retroazione unitaria negativa

- ha guadagno statico unitario
- ha guadagno statico infinito
- ha errore a regime nullo per ingresso a rampa
- ha errore a regime nullo per ingresso a gradino

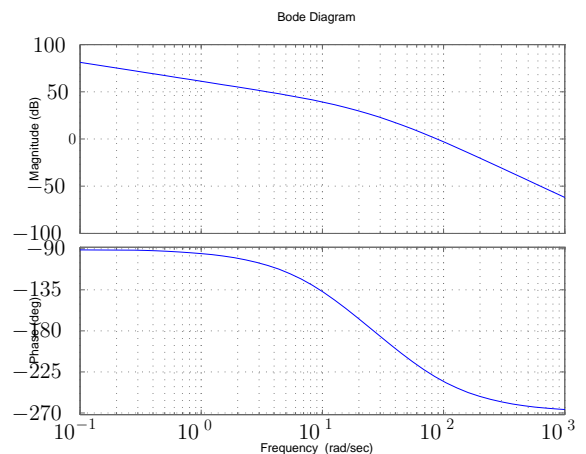
9. Sia data la funzione di anello $F(s)$, a cui corrisponde il diagramma polare completo di figura, caratterizzata da uno zero reale stabile, un polo reale stabile e un polo reale instabile. Il sistema che si ottiene ponendo $F(s)$ in retroazione unitaria negativa sarà caratterizzato da:

- due poli a parte reale negativa
- due poli a parte reale positiva
- un polo a parte reale positiva e uno a parte reale negativa
- due poli sul cui segno nulla si può desumere



10. Il sistema di cui si riportano i diagrammi di Bode ha:

- margine di ampiezza (in dB) e margine di fase entrambi positivi
- margine di fase positivo e margine di ampiezza (in dB) negativo
- margine di fase negativo e margine di ampiezza (in dB) positivo
- margine di ampiezza (in dB) e margine di fase entrambi negativi



Fondamenti di Controlli Automatici
A.A. 2013/14
2 settembre 2014
Esercizi

Cognome	
Nome	
Matricola	
Corso di Laurea	

a) Determinare la trasformata di Laplace $X_i(s)$ dei seguenti segnali temporali $x_i(t)$:

$$x_1(t) = 5 [e^{-t} \cos(2t) + \delta(t)], \quad x_2(t) = 4(t^3 e^{-2t} + 7)$$

Soluzione:

$$X_1(s) = 5 \frac{s+1}{(s+1)^2 + 4} + 5, \quad X_2(s) = 4 \left(\frac{3!}{(s+2)^4} + \frac{7}{s} \right)$$

b) Calcolare la risposta impulsiva $g_i(t)$ delle seguenti funzioni di trasferimento $G_i(s)$:

$$G_1(s) = \frac{10s^2 - 64s + 78}{s(s^2 - 6s + 13)}, \quad G_2(s) = \frac{3s^2 + 10s + 9}{(s+1)^2}$$

Soluzione:

Poli e corrispondenti residui della funzione $G_1(s)$ sono

Poli	→	Residui
0	→	6
$3 + 2j$	→	$2 + 4j$
$3 - 2j$	→	$2 - 4j$

di conseguenza la risposta impulsiva (ovvero l'anti-trasformata di Laplace) risulta

$$g_1(t) = 6 + 2\sqrt{20} e^{3t} \cos(2t + 1.1071\text{rad}) = 6 + 8.9443 e^{3t} \cos(2t + 63.4349^\circ).$$

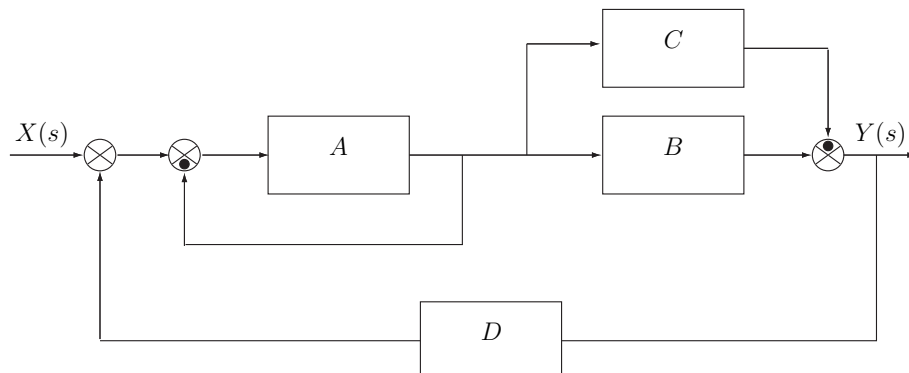
La funzione $G_2(s)$ può essere riscritta come

$$G_2(s) = 3 + \frac{2}{(s+1)^2} + \frac{4}{s+1}$$

La risposta impulsiva della funzione $G_2(s)$ risulta

$$g_2(t) = 3\delta(t) + 2te^{-t} + 4e^{-t}$$

c) Dato il seguente schema a blocchi:



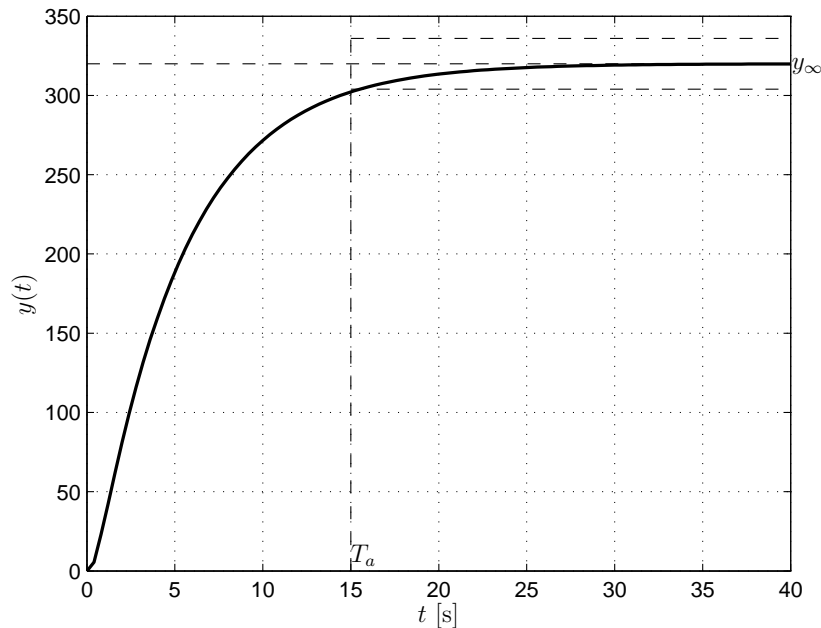
utilizzando la formula di Mason calcolare la funzione di trasferimento $G(s)$ che lega l'ingresso $X(s)$ all'uscita $Y(s)$:

$$G(s) = \frac{Y(s)}{X(s)} = \frac{AB - AC}{1 + A - ABD + ACD}$$

d) Sia data la funzione di trasferimento $G(s) = \frac{(1 + 0.01s)(s^2 + 80s + 6400)}{(1 + 5s)(1 + 0.5s)(s^2 + 4s + 80)}$

Disegnare l'andamento qualitativo della risposta $y(t)$ a un gradino in ingresso di ampiezza 4, $x(t) = 4$. Calcolare il valore a regime y_∞ dell'uscita $y(t)$ del sistema, stimare qualitativamente il tempo di assestamento T_a del sistema e il periodo T_ω dell'eventuale oscillazione smorzata.

Soluzione: Il sistema ha un polo dominante reale per cui la risposta sarà aperiodica (senza sovraelongazioni). In figura è riportata la risposta del sistema.



Il valore a regime dell'uscita per un gradino in ingresso di ampiezza $A = 4$ risulta

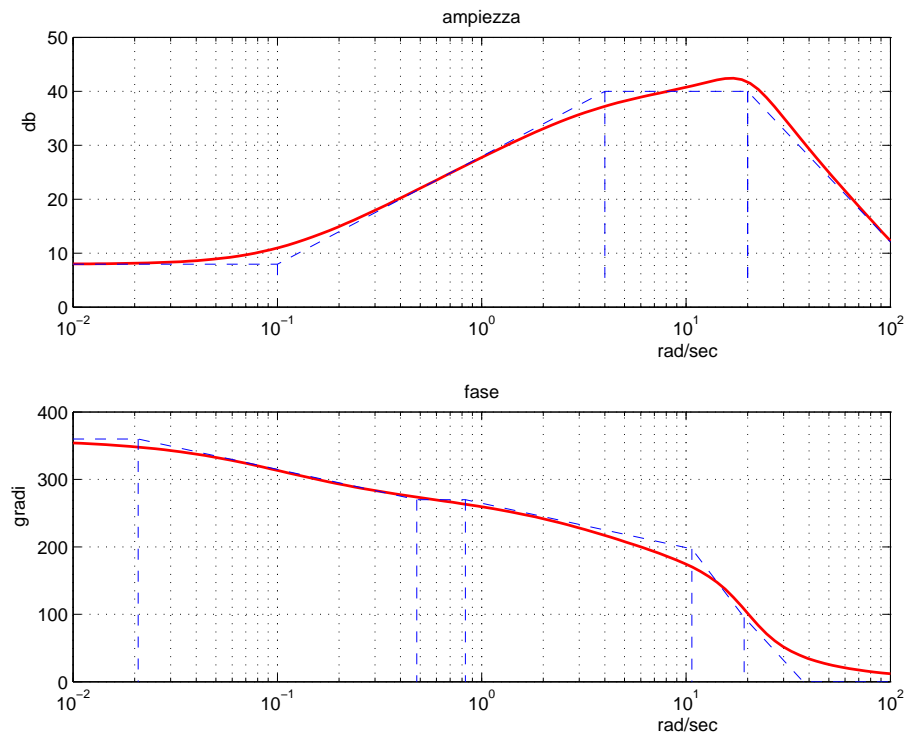
$$y_\infty = A G(0) = 4 \cdot 80 = 320$$

La costante di tempo del polo dominante è $\tau = 5$ per cui il tempo di assestamento T_a è

$$T_a = 3\tau = 15 \text{ s,}$$

mentre non esiste oscillazione.

e) Facendo riferimento ai diagrammi di Bode della funzione $G(s)$ mostrati in figura

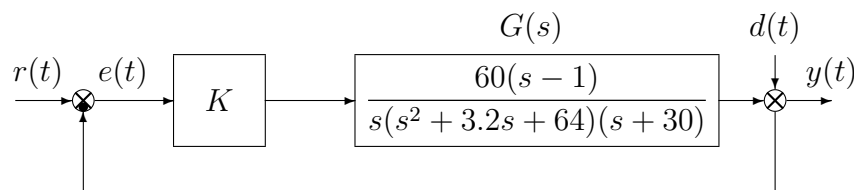


si ricavi l'espressione analitica della funzione $G(s)$.

Soluzione

$$G(s) = -40000 \frac{(s - 0.1)}{(s + 4)(s^2 + 16s + 400)}$$

f) Sia dato il seguente sistema retroazionato:



f.1) Determinare per quali valori del parametro K il sistema retroazionato è asintoticamente stabile.

Soluzione:

l'equazione caratteristica del sistema retroazionato è

$$1 + K \frac{60(s-1)}{s(s^2 + 3.2s + 64)(s + 30)} = 0 \quad \rightarrow \quad s^4 + 33.2s^3 + 160s^2 + (1920 + 60K)s - 60K = 0$$

La corrispondente tabella di Routh è la seguente

4	1	160	$-60K$	
3	33.2	$1920 + 60K$		
2	$3392 - 60K$	$-1992K$		$\rightarrow K < 56.53$
1	$-3600(K - 69.09)(K + 26.18)$			$\rightarrow -26.18 < K < 69.089$
0	$-1992K$			$\rightarrow K < 0$

Quindi il sistema retroazionato è asintoticamente stabile per:

$$K^* = -26.18 < K < 0$$

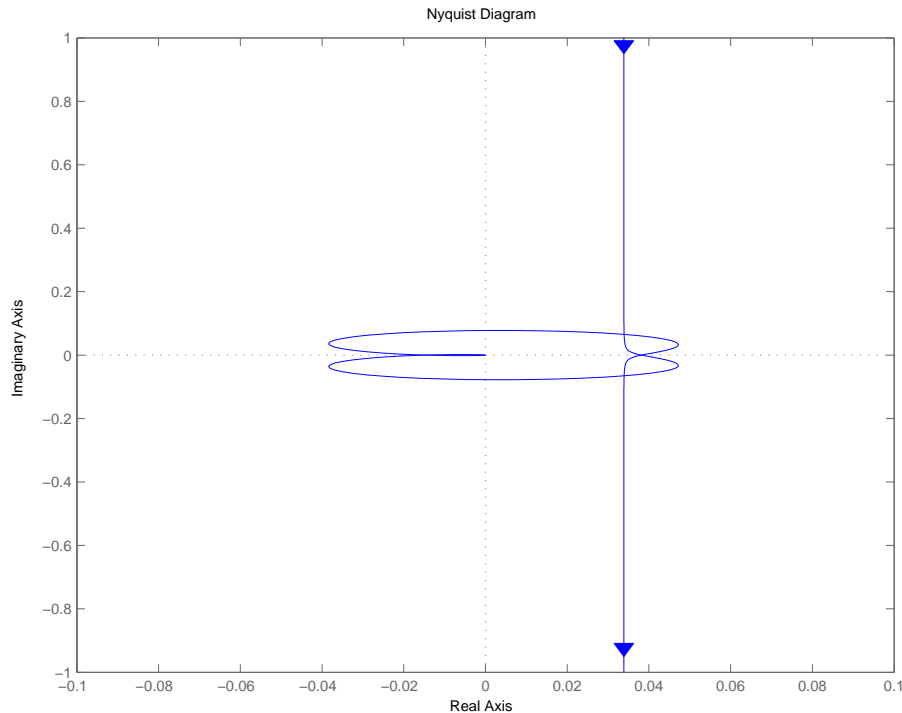
La pulsazione ω^* corrispondente al valore limite K^* è:

$$\omega^* = \sqrt{\frac{1920 + 60K^*}{33.2}} = 3.2432 \text{ rad/s}$$

f.2) Posto $K = 1$ disegnare qualitativamente il diagramma di Nyquist completo della funzione d'anello $KG(s)$. Calcolare esattamente la posizione σ_0 di un eventuale asintoto, le eventuali intersezioni con l'asse reale e i corrispondenti valori delle pulsazioni.

Soluzione:

Il diagramma di Nyquist della funzione $G(s)$ è riportato in figura.



La funzione approssimante per $\omega \rightarrow 0$ è

$$G_0(s) = -\frac{1}{32s}$$

pertanto il diagramma parte all'infinito con fase iniziale $\varphi_0 = -\frac{3}{2}\pi$.

La funzione approssimante per $\omega \rightarrow \infty$ è

$$G_\infty(s) = \frac{60}{s^3}$$

e quindi il diagramma giunge nell'origine con fase finale $\varphi_\infty = -\frac{3}{2}\pi$.

Il parametro Δ_τ vale

$$\Delta_\tau = -1 - \frac{1}{30} - \frac{3.2}{64} = -1.08 < 0$$

pertanto il diagramma parte in ritardo rispetto alla fase iniziale φ_0 .

Il sistema è di tipo 1 pertanto esiste un asintoto verticale la cui ascissa è

$$\sigma_0 = -\frac{1}{32}\Delta_\tau = 0.0338$$

Il parametro Δ_p vale

$$\Delta_p = 1 + 3.2 + 30 = 34.2 > 0$$

pertanto il diagramma arriva in anticipo rispetto alla fase finale φ_∞ .

Lo sfasamento complessivo è

$$\Delta\varphi = -\pi - \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{2} = -2\pi$$

Esistono due intersezioni con l'asse reale che, in virtù dell'analisi svolta con Routh al primo punto, risultano alle ascisse

$$\sigma^* = -1/K^* = -1/-26.18 = 0.0382$$

$$\sigma_1^* = -1/K_1^* = -1/69.09 = -0.0145$$

- f.3) Posto $K = -1$, calcolare l'errore a regime $e(\infty)$ quando sul sistema retroazionato agiscono contemporaneamente il segnale $r(t) = 2$ e il disturbo $d(t) = 10$.

Soluzione:

Dato che il sistema è lineare e soggetto quindi alla sovrapposizione degli effetti, l'errore $E(s)$, espresso mediante la trasformata di Laplace, risulterà:

$$E(s) = E_r(s) + E_d(s)$$

dove $E_r(s)$ è l'errore dovuto al riferimento mentre $E_d(s)$ è l'errore dovuto al disturbo. L'errore $e_r(\infty)$ dovuto al riferimento sarà nullo $e_r(\infty) = 0$ in quanto il sistema considerato è di tipo 1 e il segnale $r(t)$ è a gradino.

L'errore dovuto al disturbo $d(t)$ è dato da:

$$E_d(s) = F_d(s)D(s)$$

dove $D(s)$ è la trasformata di Laplace di $d(t)$ e $F_d(s)$ è la funzione di trasferimento tra $D(s)$ e $E_d(s)$ che vale

$$F_d(s) = -\frac{1}{1 + KG(s)} = \frac{-s^4 - 33.2s^3 - 160s^2 - 1920s}{s^4 + 33.2s^3 + 160s^2 + 1860s + 60}$$

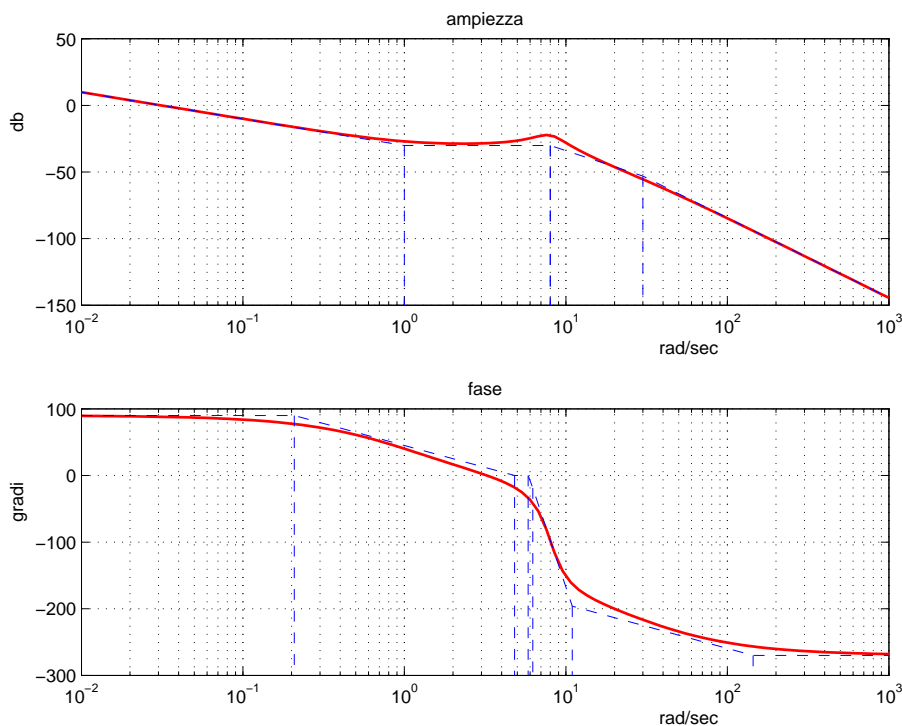
L'errore $e_d(\infty)$ dovuto al disturbo è dato da $e_d(\infty) = 10 F_d(0) = 0$. Pertanto anche l'errore a regime complessivo sarà nullo: $e(\infty) = e_r(\infty) + e_d(\infty) = 0$.

- f.4) Posto $K = 1$, tracciare (nello schema fornito in allegato) i diagrammi di Bode delle ampiezze e delle fasi del guadagno di anello $KG(s)$.

Soluzione:

In figura sono riportati i diagrammi di Bode del sistema. Sul diagramma asintotico delle ampiezze il guadagno β in corrispondenza della pulsazione $\omega = 1$ è $\beta = \left| -\frac{1}{32.1} \right| = 0.031 \simeq -30$ dB.

Il coefficiente di smorzamento della coppia di poli complessi coniugati è $\delta = 0.2$ pertanto si avrà $M_{\omega_n} = \frac{1}{2\delta} = 2.5 \simeq 8$ dB.



- g) **Non è richiesto lo svolgimento di questo esercizio agli iscritti ad Ingegneria Ambientale o a corsi per i quali l'esame vale meno di 6 CFU.**

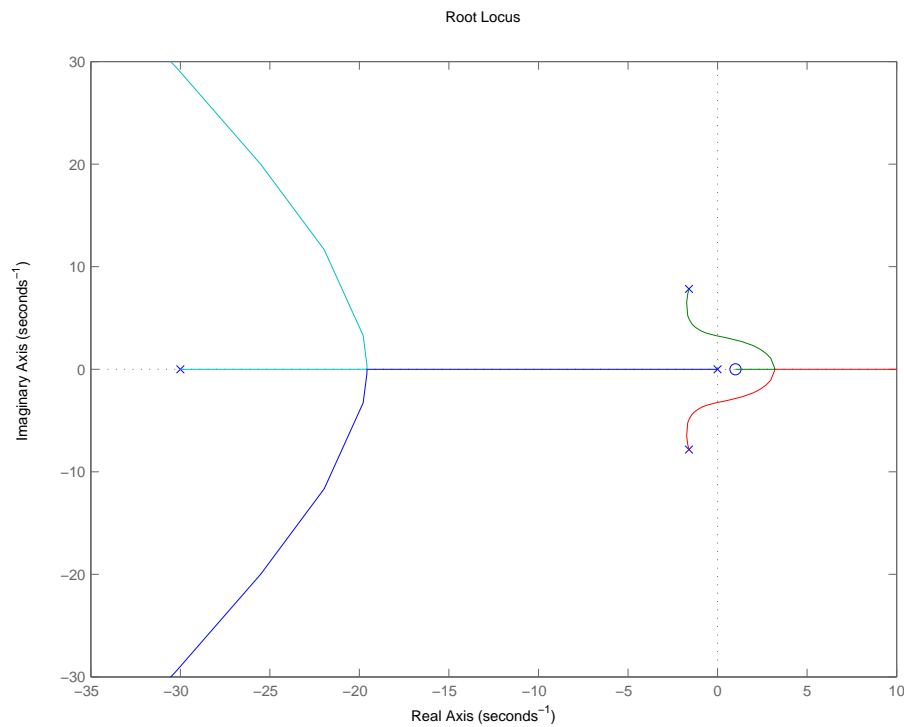
Con riferimento al sistema descritto nell'esercizio f), tracciare qualitativamente il luogo delle radici del sistema retroazionato per valori negativi del parametro K . Determinare esattamente

gli asintoti, il centro degli asintoti, le intersezioni con l'asse immaginario e i corrispondenti valori del guadagno K . Determinare gli eventuali punti di diramazione solo qualitativamente.

Soluzione: Essendo 3 il grado relativo del sistema, esistono 3 asintoti che formano una stella avente centro di ascissa

$$\sigma_a = \frac{1}{3}(-3.2 - 30 - 1) = -11.4$$

Il luogo delle radici finale è riportato nella seguente figura.



Dall'analisi svolta mediante il criterio di Routh, risulta che il luogo delle radici attraversa l'asse immaginario in corrispondenza di $\pm j\omega^* = \pm j3.2432$ per $K = K^* = -26.18$.

Fondamenti di Controlli Automatici
Diagrammi di Bode

Cognome	
Nome	
Matricola	
Corso	

Bode Plot

