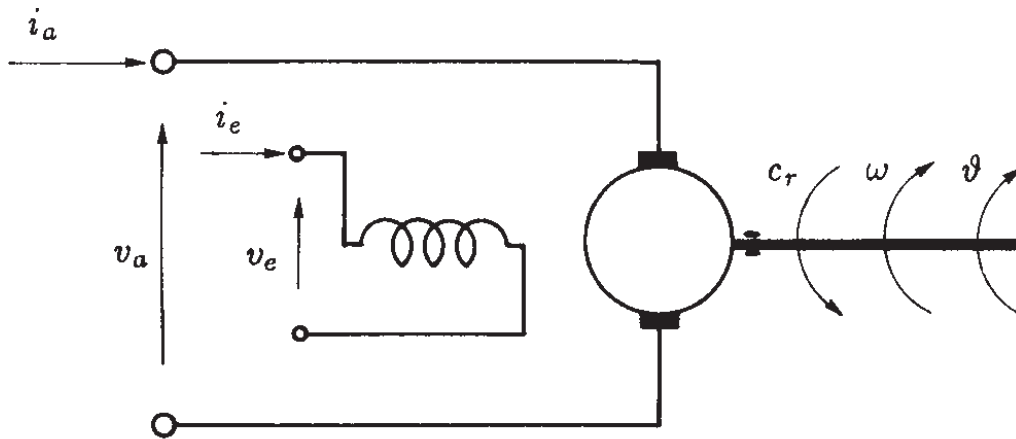


Sistemi e modelli matematici

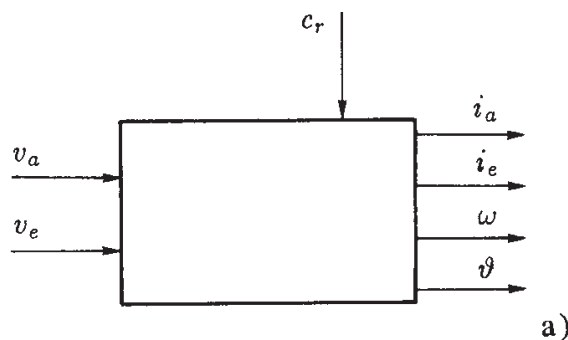
- L'*automazione* è un complesso di tecniche volte a sostituire l'intervento umano, o a migliorarne l'efficienza, nell'esercizio di dispositivi e impianti.
- Un importante capitolo della scienza dell'automazione o *automatica* è costituito dalla disciplina denominata *controlli automatici*.
- Tale disciplina studia i dispositivi (detti *regolatori*, *controllori* o *dispositivi di controllo*), mediante i quali si fanno variare automaticamente le grandezze liberamente manipolabili di un sistema (detto *sistema controllato*)
- Un *sistema* è un complesso, normalmente costituito di più elementi interconnessi, in cui si possono distinguere grandezze soggette a variare nel tempo (indicate semplicemente con il nome di *variabili*).
- Segnali: sono le funzioni che rappresentano l'andamento delle variabili nel tempo.
- Variabili di ingresso: sono le *variabili indipendenti* o *cause*.
- Variabili di uscita: sono le *variabili dipendenti* o *effetti*.
- Sistema orientato: è un sistema in le cui variabili siano state suddivise in variabili di ingresso e variabili di uscita.
- Variabili manipolabili: variabili di ingresso il cui andamento nel tempo può essere arbitrariamente imposto.
- Variabili non manipolabili o *disturbi*: variabili sul cui andamento nel tempo non si può influire, in quanto casuale o assegnabile ad arbitrio solo da parte di altro operatore.

Esempio: motore in corrente continua

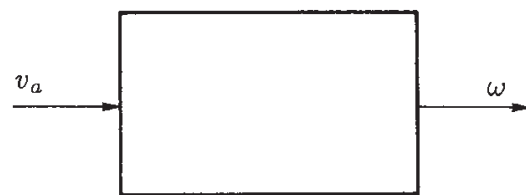
- Il modello semplificato di un motore in corrente continua con eccitazione indipendente è il seguente:



- Variabili di interesse: la tensione e la corrente di armatura v_a e i_a , la tensione e la corrente di campo v_e e i_e , la coppia resistente all'albero c_r , la velocità e la posizione angolare del rotore ω e ϑ .
- Orientamento del sistema:
 - Cause: v_a , v_e e c_r ;
 - Effetti: i_a , i_e , ω e ϑ ;
 - Variabili manipolabili: v_a e v_e ;
 - Variabile non manipolabile: c_r ;
- Rappresentazione mediante schemi a blocchi:

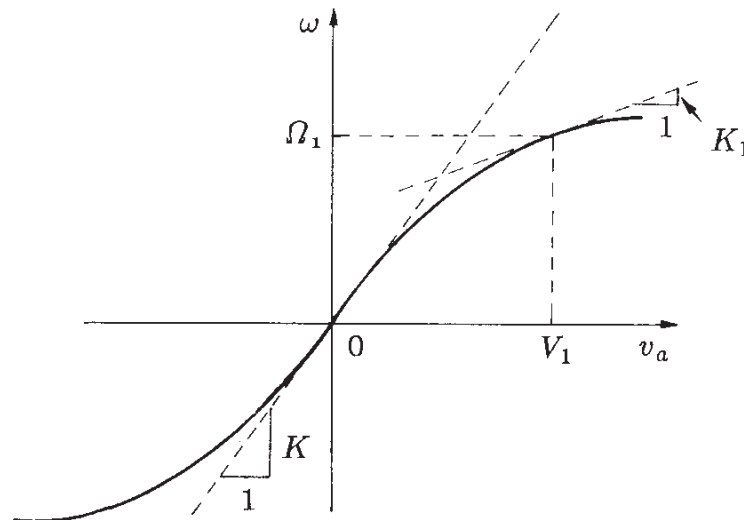


a)



b)

- *Modello matematico* di un sistema: è l'insieme di equazioni e di parametri che permettono di determinare gli andamenti nel tempo delle uscite, noti quelli degli ingressi.
- Il modello matematico è sempre un compromesso fra *precisione* e *semplicità*: è inutile infatti ricorrere a modelli sofisticati quando i valori dei parametri che in essi compaiono si conoscono solo approssimativamente.
- *Modello statico* o *puramente algebrico*: descrive il legame fra i valori degli ingressi, supposti costanti, e i valori delle uscite una volta che il sistema abbia raggiunto la *condizione di regime stazionario*, cioè la condizione di funzionamento in cui tutti i segnali siano costanti.
- Caratteristica statica del motore elettrico in corrente continua:



- *Caratteristica statica ingresso-uscita*:

$$\omega = f(v_a)$$

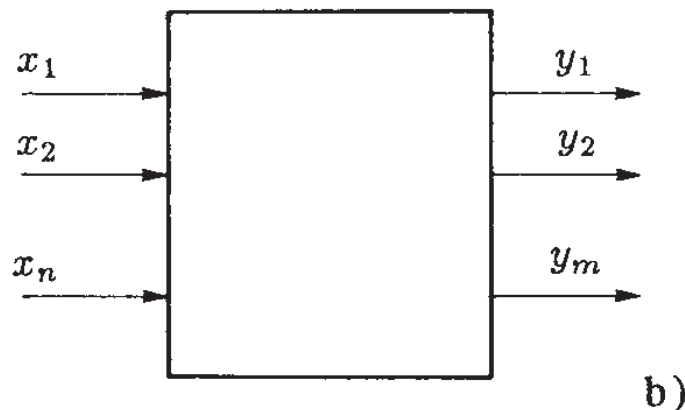
- *Approssimazione lineare* nell'intorno dell'origine: $\omega = K v_a$;
- *Linearizzazione* nell'intorno del *punto di lavoro*:

$$\omega - \Omega_1 = K_1(v_a - V_1)$$

- Modello statico di un sistema MIMO (Multi Input Multi Output): consiste in più funzioni (tante quante sono le uscite) di più variabili (tante quanti sono gli ingressi), cioè

$$y_1 = f_1(x_1, \dots, x_n), \quad \dots, \quad y_m = f_m(x_1, \dots, x_n)$$

- Rappresentazione grafica:



- Punto di lavoro: $(X_1, \dots, X_n), (Y_1, \dots, Y_m)$.
- Linearizzazione nell'intorno del punto di lavoro:

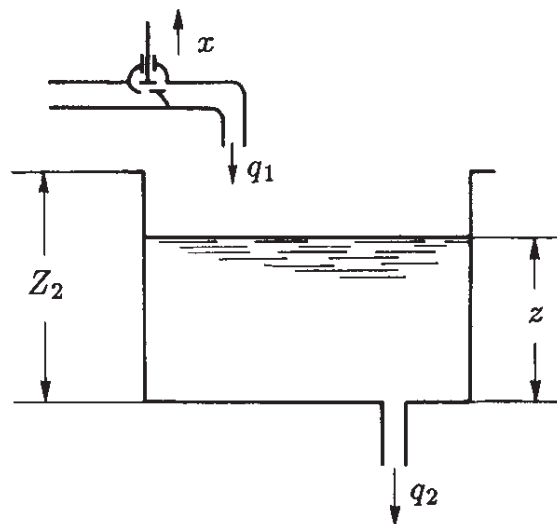
$$\begin{aligned} \Delta y_1 &= a_{11} \Delta x_1 + \dots + a_{1n} \Delta x_n, \\ &\dots\dots\dots \\ \Delta y_m &= a_{m1} \Delta x_1 + \dots + a_{mn} \Delta x_n \end{aligned}$$

in cui è

$$\begin{aligned} a_{ij} &:= \left. \frac{\partial f_i}{\partial x_j} \right|_{x_k = X_k \quad (k=1, \dots, n)} \quad (i = 1, \dots, m; j = 1, \dots, n) \\ \Delta y_i &:= y_i - Y_i = y_i - f_i(X_1, \dots, X_n) \quad (i = 1, \dots, m) \\ \Delta x_j &:= x_j - X_j \quad (j = 1, \dots, n) \end{aligned}$$

- I modelli matematici statici non danno alcuna informazione sul *regime transitorio*, cioè sull'andamento nel tempo delle uscite durante il passaggio da uno stato di regime stazionario ad un altro.

- *Modello dinamico*: è costituito da una o più equazioni differenziali esprimenti legami statici fra le variabili di ingresso, di uscita e le loro derivate rispetto al tempo.
- Il modello dinamico di un sistema permette di determinare l'andamento del segnale di uscita corrispondente a un dato segnale di ingresso, cioè permette di determinare la *risposta* del sistema a una data *eccitazione*.
- Un modello matematico (o un sistema) si dice *lineare* quando soddisfa la *proprietà di sovrapposizione degli effetti*.
- In caso contrario il sistema si dice *non lineare*.
- Molti sistemi ammettono modelli matematici lineari purché i valori delle variabili non escano da determinati campi. Esempio:



- Modello matematico in forma integrale:

$$z(t) = Z_0 + \frac{1}{A} \int_0^t (q_1(\tau) - q_2(\tau)) d\tau = Z_0 + \frac{1}{A} \int_0^t (K x(\tau) - q_2(\tau)) d\tau$$

- Modello matematico in forma differenziale:

$$\frac{dz}{dt} = \frac{1}{A} (q_1(t) - q_2(t)) , \quad z(0) = Z_0$$

- Tale modello è valido entro i limiti:

$$X_1 \leq x(t) \leq X_2 , \quad Z_1 \leq z(t) \leq Z_2$$