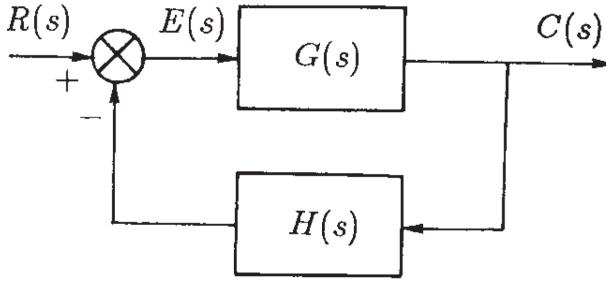
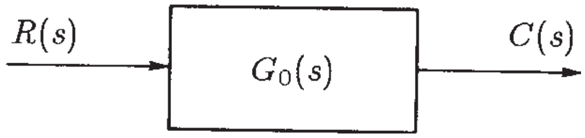
Proprietà generali dei sistemi in retroazione

- Sistema in retroazione e sua forma minima:





- Significato dei simboli:

  $r(t):$ *segnale di riferimento* (o "set point");

  $c(t):$ *variabile controllata*;

  $e(t):$ *segnale errore*;

  $G(s):$ *funzione di trasferimento del percorso diretto*;

  $H(s):$ *funzione di trasferimento del percorso in retroazione*;

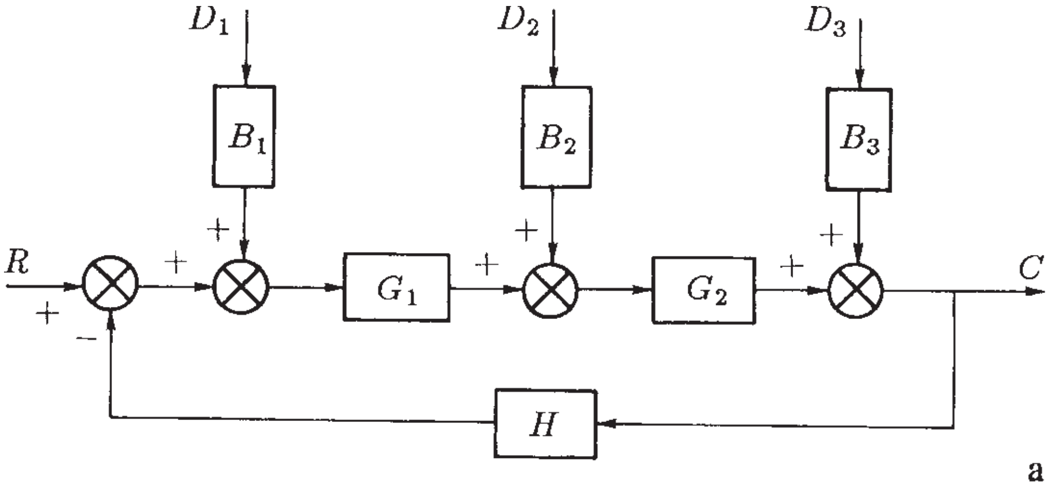
  $G(s)\,H(s):$ *guadagno di anello*.

- Funzione di trasferimento del sistema in forma minima:

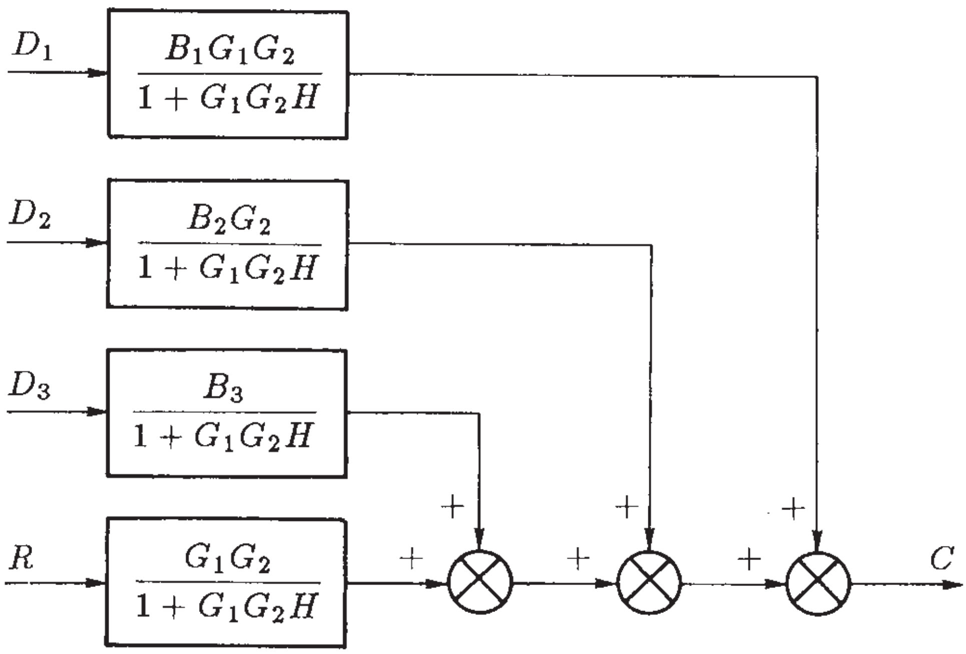
$$G_0(s) = \frac{C(s)}{R(s)} = \frac{G(s)}{1 + G(s)\,H(s)}$$

- Questa è la situazione teorica in assenza di disturbi e di variazioni parametriche

- Spesso accade che si abbiano sistemi a più ingressi (per esempio ingressi di disturbo) agenti in vari punti dell'anello.
- In questo caso la riduzione in forma minima viene fatta nel modo seguente:



a)



b)

- Nota: tutte le funzioni di trasferimento hanno lo stesso denominatore.

Sensibilità alla variazione di parametri

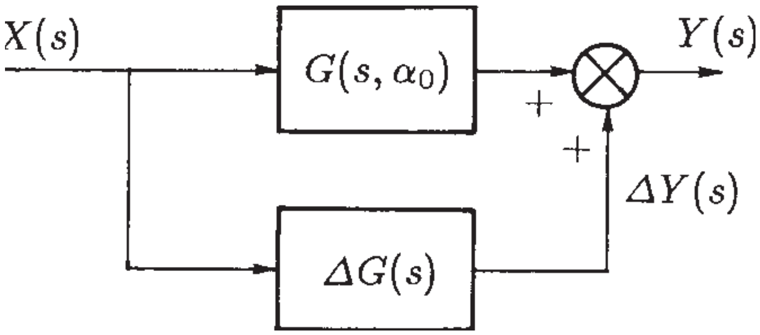
- Sia α un parametro della funzione di trasferimento $G(s)$ che subisca una piccola variazione $\Delta\alpha$ rispetto al valore nominale α_0. Sia $G(s, \alpha_0)$ la funzione di trasferimento "nominale". La nuova funzione di trasferimento si può scrivere, in prima approssimazione

$$G(s, \alpha_0 + \Delta\alpha) = G(s) + \Delta G(s)$$

in cui per semplicità di notazione si è posto

$$G(s) = G(s, \alpha_0) \ , \quad \Delta G(s) = \left.\frac{\partial G}{\partial \alpha}\right|_{\alpha=\alpha_0} \Delta\alpha$$

- Se il sistema è soggetto a un segnale d'ingresso la cui trasformata sia $X(s)$, la variazione del parametro porta a una variazione dell'uscita la cui trasformata, in prima approssimazione, può esprimersi come $\Delta Y(s) = \Delta G(s)\, X(s)$.



- Nei sistemi in retroazione, l'effetto della variazione di un parametro è diverso a seconda che esso si verifichi nella catena di amplificazione diretta o nel percorso di retroazione.

- Nei sistemi retroazionati, una variazione della funzione di trasferimento della catena di amplificazione diretta $G(s)$ produce generalmente una variazione della funzione di trasferimento complessiva $G_0(s)$ molto minore.

- Una variazione della funzione di trasferimento $H(s)$ del percorso di retroazione produce in $G_0(s)$ una variazione dello stesso ordine di grandezza.

- In presenza della variazione $\Delta\alpha$ di un parametro della funzione di trasferimento del percorso di segnale diretto $G(s)$ si ha

$$\begin{aligned}\Delta G_0(s) &= \frac{\partial G_0}{\partial G}\left.\frac{\partial G}{\partial \alpha}\right|_{\alpha=\alpha_0}\Delta\alpha = \frac{\partial}{\partial G}\left(\frac{G}{1+G\,H}\right)\left.\frac{\partial G}{\partial \alpha}\right|_{\alpha=\alpha_0}\Delta\alpha \\ &= \frac{1}{\big[1+G(s)\,H(s)\big]^2}\,\Delta G(s) = \frac{G_0(s)}{1+G(s)\,H(s)}\,\frac{\Delta G(s)}{G(s)}\end{aligned}$$

- Per le variazioni relative vale la relazione

$$\boxed{\frac{\Delta G_0(s)}{G_0(s)} = \frac{1}{1+G(s)\,H(s)}\,\frac{\Delta G(s)}{G(s)}}$$

- Per tutte le pulsazioni per le quali vale la condizione

$$|G(j\omega)\,H(j\omega)| \gg 1\ ,$$

si ha che

$$\frac{|\Delta G_0(j\omega)|}{|G_0(j\omega)|} \ll \frac{|\Delta G(j\omega)|}{|G(j\omega)|}$$

- L'errore relativo dovuto alla variazione di un parametro di $G(s)$ e per le frequenze per le quali il guadagno di anello è sufficientemente elevato è molto minore nel sistema in retroazione che non nel sistema ad anello aperto.

- Nel caso di una variazione $\Delta\beta$ di un parametro di $H(s)$ si ha invece che:

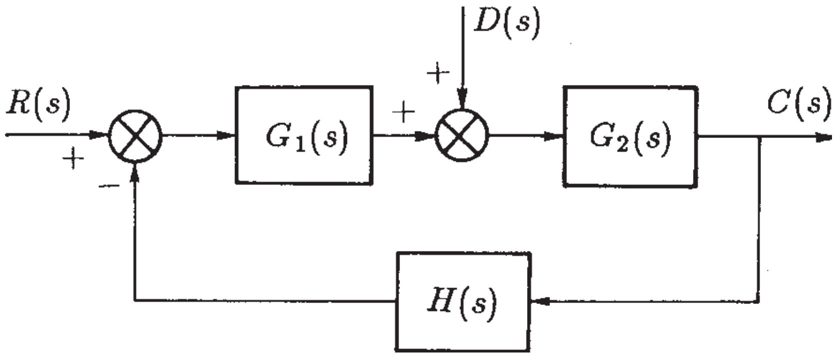
$$\boxed{\frac{\Delta G_0(s)}{G_0(s)} = \frac{-G(s)\,H(s)}{1+G(s)\,H(s)}\,\frac{\Delta H(s)}{H(s)}}$$

cioè gli errori relativi sono dello stesso ordine di grandezza.

$$\frac{|\Delta G_0(j\omega)|}{|G_0(j\omega)|} \simeq \frac{|\Delta H(j\omega)|}{|H(j\omega)|}$$

Sensibilità ai disturbi

- Sia $d(t)$ un disturbo che agisce in un punto della catena di amplificazione diretta, in un sistema di controllo in retroazione



- In assenza e in presenza di retroazione le variazioni dell'uscita dovute al disturbo sono rispettivamente

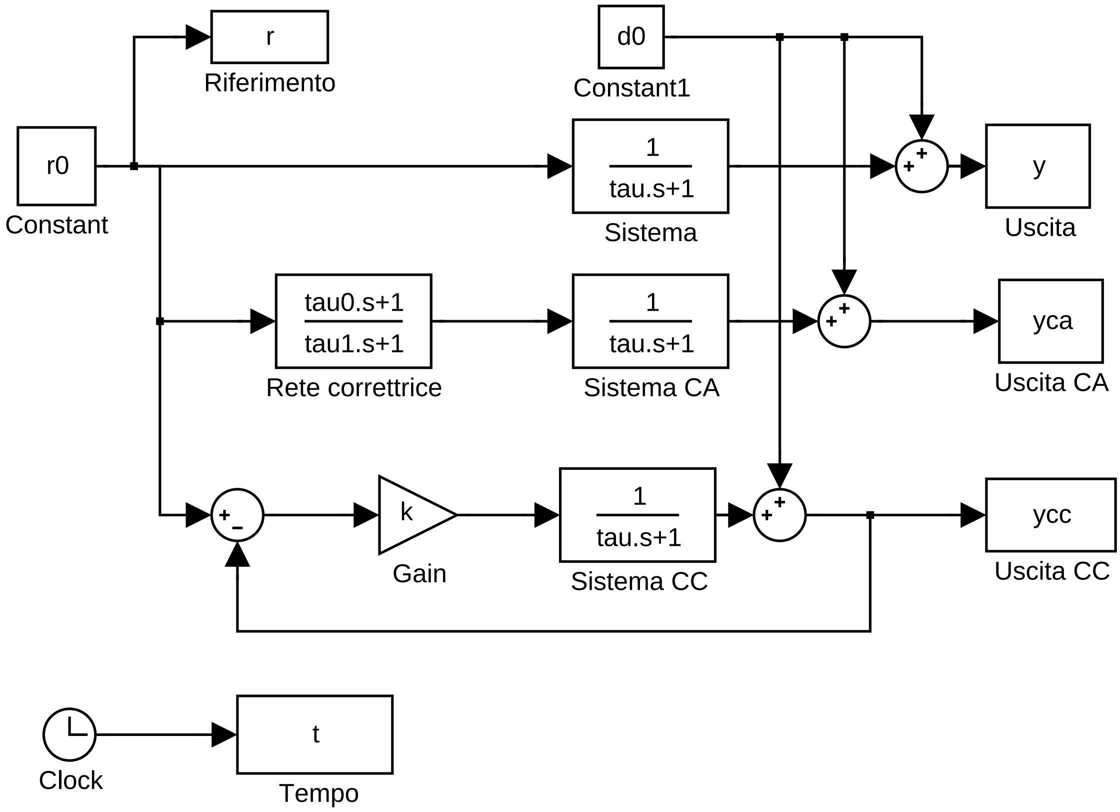
$$C'_d(s) = G_2(s)\,D(s)\ ,$$
$$C''_d(s) = \frac{G_2(s)}{1+G(s)\,H(s)}\,D(s)\ ,\quad \text{con } G(s)=G_1(s)\,G_2(s)\ .$$

- Quindi, in presenza di retroazione il contributo del disturbo sull'uscita si è ridotto di un fattore $|1+G(j\omega)\,H(j\omega)|$ se per la banda di frequenze del disturbo vale la relazione:

$$|G(j\omega)\,H(j\omega)| \gg 1$$

- In generale, i sistemi retroazionati risultano quindi robusti sia a variazioni parametriche che alla presenza di disturbi additivi esterni se il guadagno di anello del sistema $|G(j\omega)\,H(j\omega)|$ è elevato alle pulsazione ω a cui agisce il disturbo.

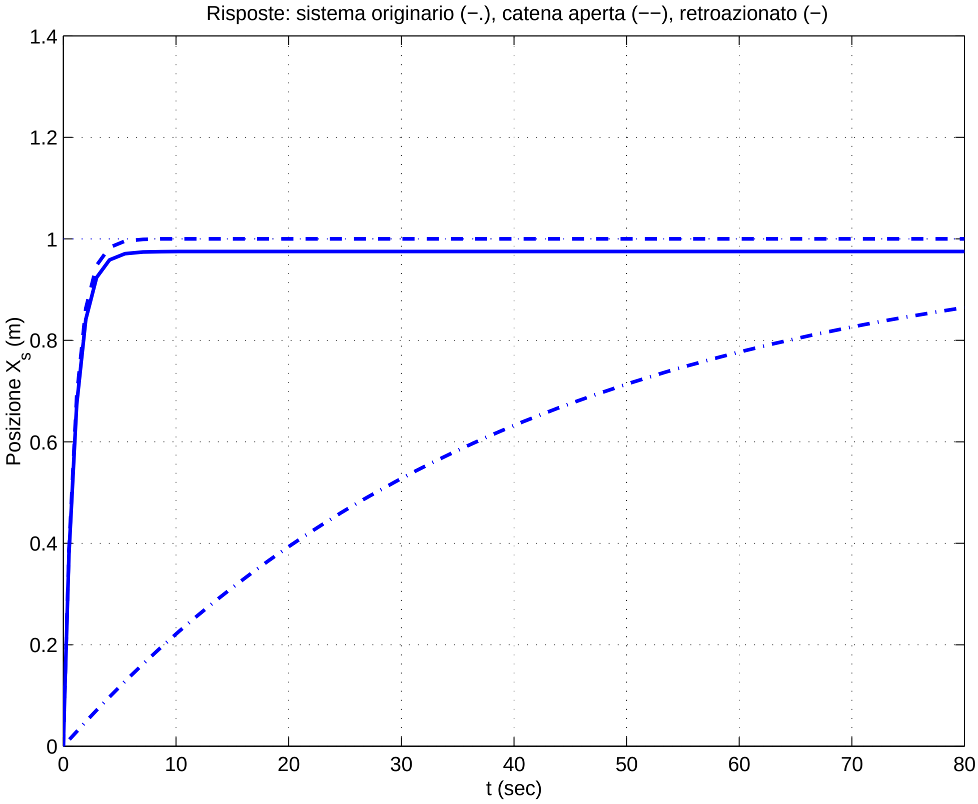
Esempio. Si faccia riferimento al seguenti schema Simulink:



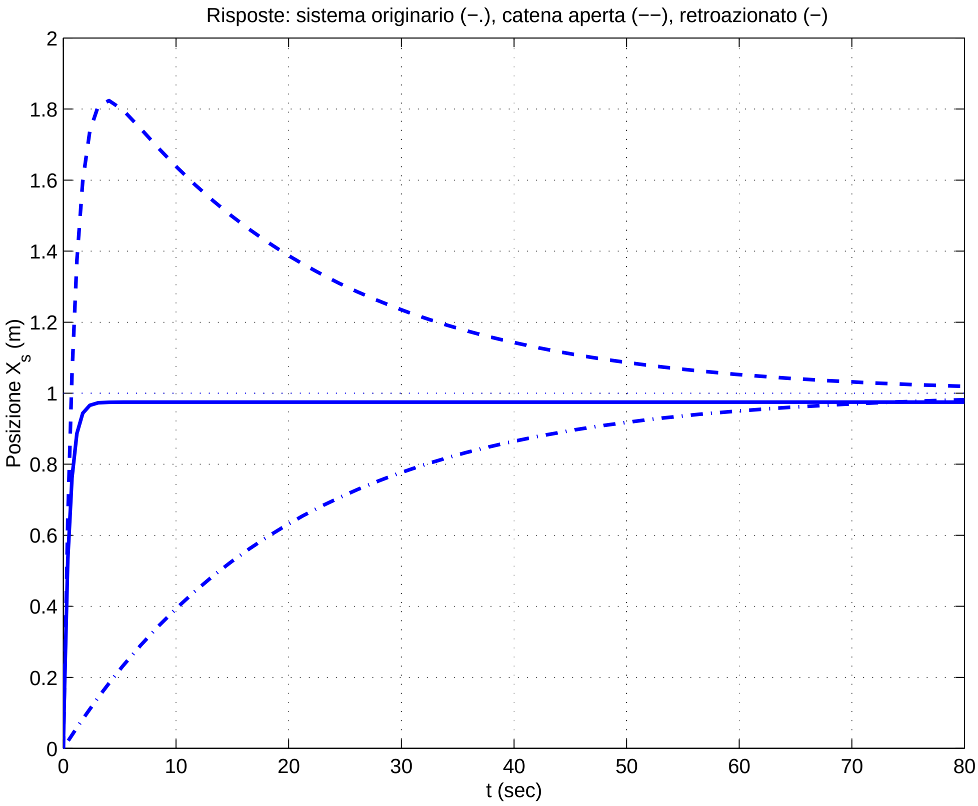
Tale schema viene attivato dalla seguente funzione Matlab (variazione.m):

```
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
%   variazione.M                                                        %
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%

r0=1;            % ampiezza del gradino
d0=0.0;          % disturbo sull'uscita
tau0=40;         % valore nominale della costante di tempo del sistema
tau=tau0;        % valore REALE della costante di tempo del sistema
tau1=1;          % costante di tempo desiderata dal sistema controllato
k=tau0/tau1 -1; % valore del guadagno che garantisce la costante di tempo desiderata
tfin=2*tau0;     % durata della simulazione
sim('variazionemdl',tfin);      % simulazione del sistema

figure(1); clf;
lw=1.8;          % Spessore della linea
plot(t,r,':'); hold on
h=plot(t,y,'-.');   set(h,'linewidth',lw)
h=plot(t,yca,'--'); set(h,'linewidth',lw)
h=plot(t,ycc,'-');  set(h,'linewidth',lw)
title('Risposte: sistema originario (-.), catena aperta (--), retroazionato (-)');
xlabel('t (sec)');
ylabel('Posizione X_s (m)');
grid on;
zoom on
```

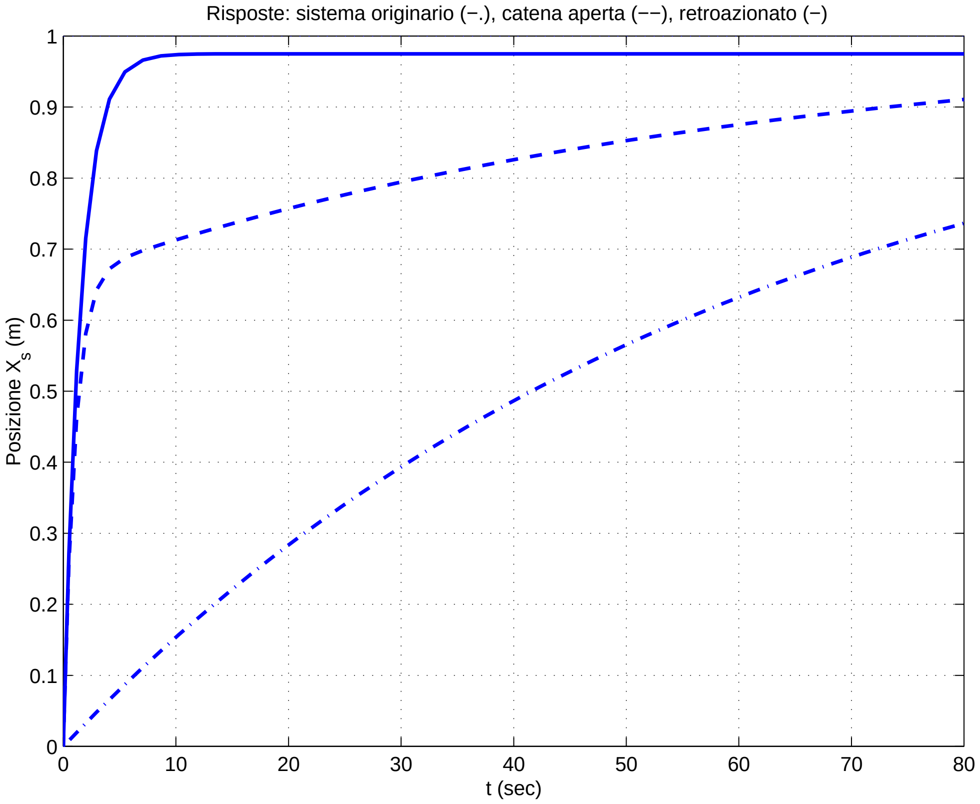
La risposta dei 3 sistemi nel caso nominale è la seguente:



Se il parametro τ subisce una variazione negativa del 50% ($\tau = 0.5\tau_0$) si ottengono le seguenti risposte al gradino:



Se il parametro τ subisce una variazione positiva del 50% ($\tau = 1.5\tau_0$) si ottengono le seguenti risposte al gradino:



Le risposte al gradino che si ottengono in condizione nominale ($\tau = \tau_0$) quando è presente un disturbo sull'uscita $d_0 = 0.5$ sono le seguenti: