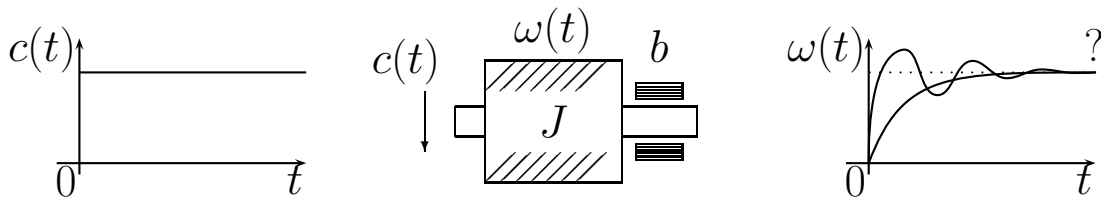


Esempi di modelli fisici

1) Dinamica del rotore di un motore elettrico.

Si consideri un elemento meccanico con inerzia J , coefficiente di attrito lineare b che ruota alla velocità angolare ω al quale venga applicata una coppia esterna $c(t)$.



L'equazione differenziale che caratterizza il sistema è quella che si ricava dalla legge di conservazione della quantità di moto angolare:

$$\frac{d[J\omega(t)]}{dt} = c(t) - b\omega(t) \quad \Leftrightarrow \quad J\dot{\omega}(t) + b\omega(t) = c(t)$$

Partendo da condizioni iniziali nulle e applicando Laplace si ottiene:

$$J s \omega(s) + b\omega(s) = C(s) \quad \Leftrightarrow \quad \omega(s) = \frac{1}{b + J s} C(s)$$

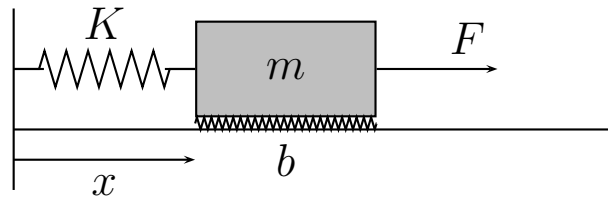
per cui il sistema fisico può essere descritto nel modo seguente:

$$\begin{array}{ccc}
 & G(s) & \\
 C(s) & \boxed{\frac{1}{b + J s}} & \omega(s) \\
 \xrightarrow{c(t)} & & \xrightarrow{\omega(t)}
 \end{array}$$

dove $G(s)$ è la funzione di trasferimento che descrive il sistema fisico:

$$G(s) = \frac{1}{b + J s}$$

2) Sistema massa-molla-smorzatore.



- Variabili e parametri del sistema fisico:

$x(t)$: posizione	m : massa
$\dot{x}(t)$: velocità	K : rigidità della molla
$\ddot{x}(t)$: accelerazione	b : Coefficiente di attrito lineare
$F(t)$: forza applicata	$P(t)$: Quantità di moto

- Legge di conservazione della quantità di moto $P(t) = m \dot{x}(t)$:

$$\frac{d}{dt}[P(t)] = \sum_i F_i(t) \quad \rightarrow \quad m \frac{d}{dt}[\dot{x}(t)] = \sum_i F_i(t)$$

- Si ottiene quindi la seguente equazione differenziale:

$$\frac{d}{dt}[m \dot{x}(t)] = F - b \dot{x}(t) - K x(t)$$

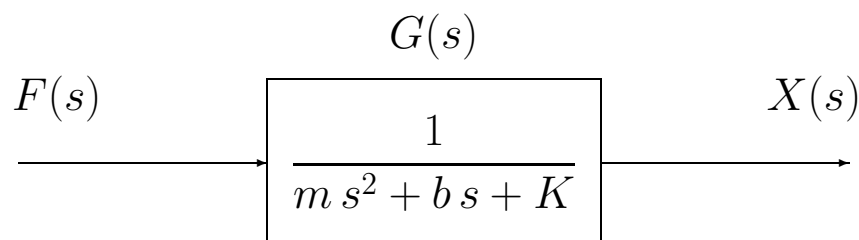
che può essere riscritta nel seguente modo:

$$m \ddot{x}(t) + b \dot{x}(t) + K x(t) = F(t)$$

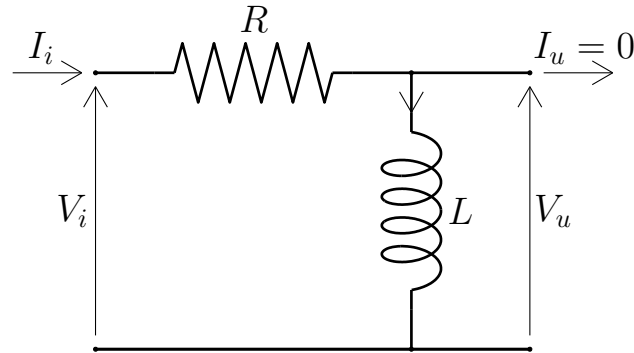
- Utilizzando le trasformate di Laplace ($x(0) = \dot{x}(0) = 0$) si ha:

$$m s^2 X(s) + b s X(s) + K X(s) = F(s) \quad \Leftrightarrow \quad X(s) = \frac{F(s)}{m s^2 + b s + K}$$

Il sistema può quindi essere rappresentato nel modo seguente:



3) Sistema elettrico RL.



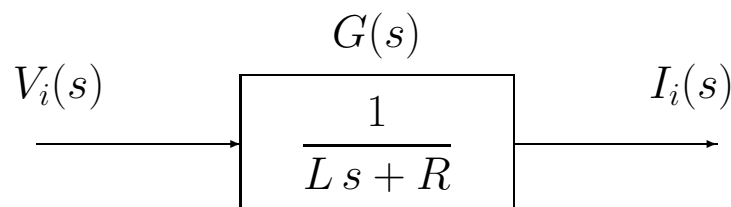
- Legge fisica: la variazione del flusso concatenato $\phi_c(t) = LI_i(t)$ è uguale alla tensione $V_u(t)$ applicata ai capi dell'induttanza.

$$\frac{d}{dt}[\phi_c(t)] = V_u(t) \quad \rightarrow \quad L \frac{d}{dt}[I_i(t)] = V_i(t) - R I_i(t)$$

- Applicando la trasformata di Laplace, con condizioni iniziali nulle, si ha:

$$L s I_i(s) + R I_i(s) = V_i(s) \quad \Leftrightarrow \quad I_i(s) = \underbrace{\frac{1}{L s + R}}_{G(s)} V_i(s)$$

- Il sistema può quindi essere rappresentato nel modo seguente:

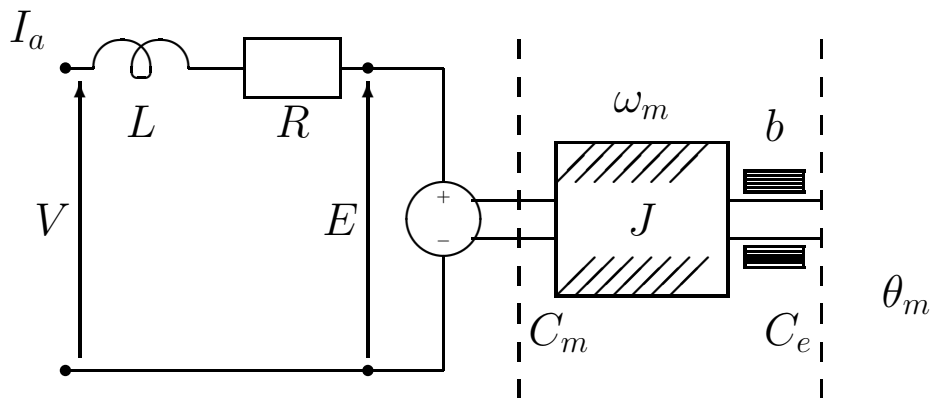


- Il legame tra la tensione di ingresso $V_i(t)$ e la tensione di uscita $V_u(t)$ è descritto dalla seguente funzione di trasferimento (si utilizza la regola del partitore di tensione su impedenze complesse):

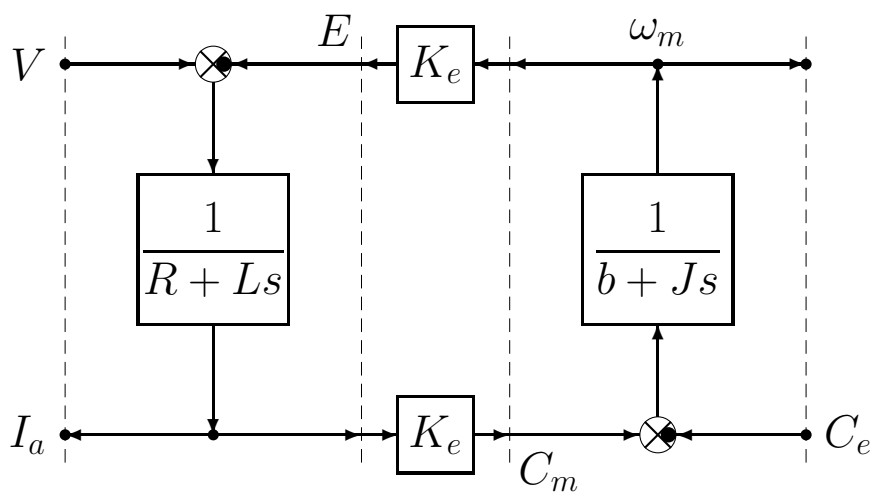
$$G_1(s) = \frac{V_u(s)}{V_i(s)} = \frac{L s}{L s + R}$$

e quindi dalle seguente equazione differenziale:

$$L \dot{V}_u(t) + R V_u(t) = L \dot{V}_i(t)$$

4) Motore elettrico in corrente continua.

- Schema a blocchi POG del motore:



Il sistema è descritto dalle seguenti 2 equazioni differenziali:

$$\begin{cases} L\dot{I}_a = -RI_a - K_e\omega_m + V \\ J\dot{\omega}_m = K_eI_a - b\omega_m - C_e \end{cases}$$

- Per il principio di conservazione dell'energia, la costante K_e è sia la costante di proporzionalità che lega la corrente di armatura I_a alla coppia motrice C_m , sia la costante di proporzionalità che lega la forza contromotrice E alla velocità angolare ω_m :

$$C_m = K_eI_a \quad E = K_e\omega_m$$

- Riducendo “in forma minima” il sistema (vedi “Formula di Mason”) si ottiene il seguente legame tra la variabile di uscita $\omega_m(t)$ e le variabili di ingresso $V(t)$ e $C_e(t)$:

$$\omega_m(s) = G_1(s)V(s) + G_2(s)C_e(s)$$

dove $G_1(s)$ lega l'ingresso di controllo $V(t)$ all'uscita $\omega_m(t)$

$$G_1(s) = \frac{K_e}{(R + L s)(b + J s) + K_e^2}$$

mentre $G_2(s)$ lega l'ingresso di disturbo $C_e(t)$ all'uscita $\omega_m(t)$:

$$G_2(s) = \frac{-(R + L s)}{(R + L s)(b + J s) + K_e^2}$$

- La precedente relazione può essere riscritta come

$$[L J s^2 + (R J + L b)s + R b + K_e^2] \omega_m(s) = K_e V(s) - (R + L s)C_e(s)$$

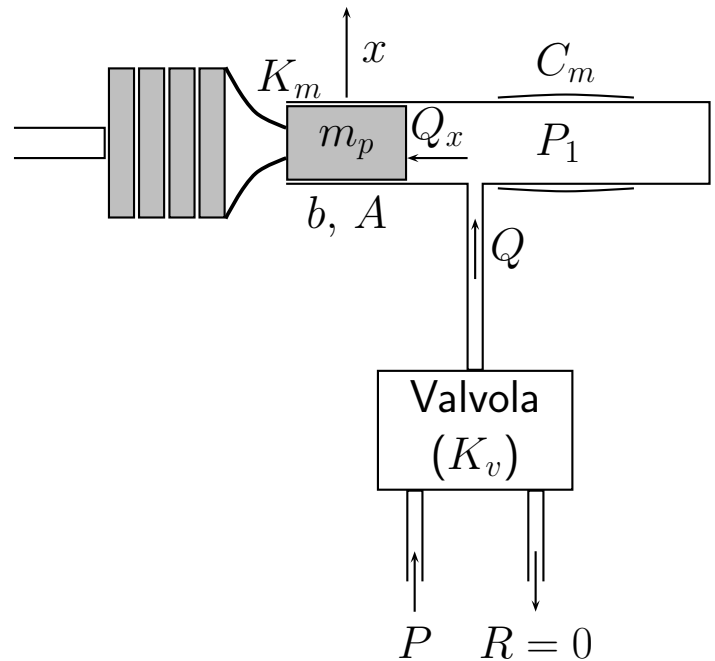
che corrisponde alla seguente equazione differenziale del secondo ordine:

$$L J \ddot{\omega}_m + (R J + L b)\dot{\omega}_m + (R b + K_e^2)\omega_m = K_e V - R C_e - L \dot{C}_e$$

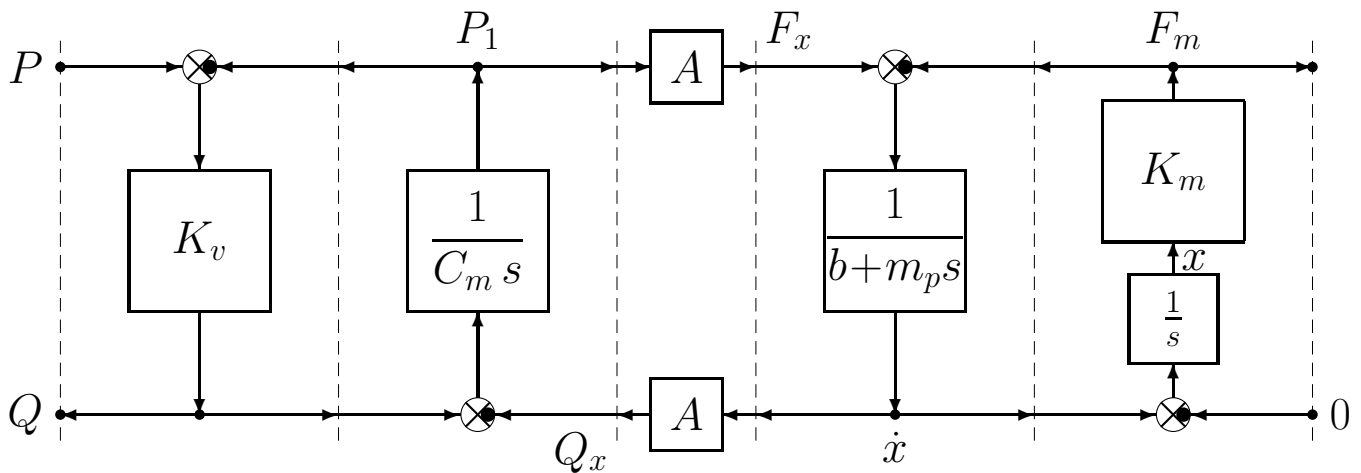
5) Frizione idraulica.

Si consideri il seguente modello idraulico semplificato di una frizione:

- P Pressione di alimentazione
- Q Portata volumetrica nella valvola
- K_v Costante di prop. della valvola
- C_m Capacità idraulica del cilindro
- P_1 Pressione all'interno del cilindro
- A Sezione del pistone
- x Posizione del pistone
- \dot{x} Velocità del pistone
- m_p Massa del pistone
- b Attrito lineare del pistone
- K_m Rigidità della molla
- F_m Forza della molla sul pistone



- Uno schema a blocchi che descrive la dinamica del sistema è il seguente:



- Riducendo il sistema in forma minima si ottiene la seguente f.d.t. $G(s)$:

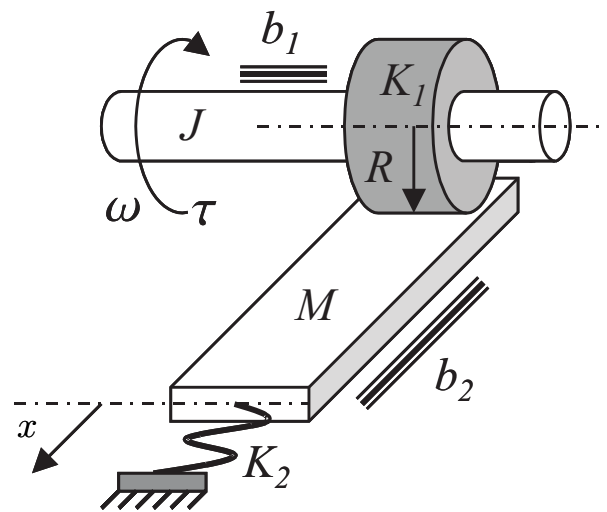
$$G(s) = \frac{F_m(s)}{P(s)} = \frac{AK_m K_v}{C_m m_p s^3 + (C_m b + K_v m_p) s^2 + (A^2 + C_m K_m + K_v b) s + K_m K_v}$$

a cui corrisponde la seguente equazione differenziale del terzo ordine:

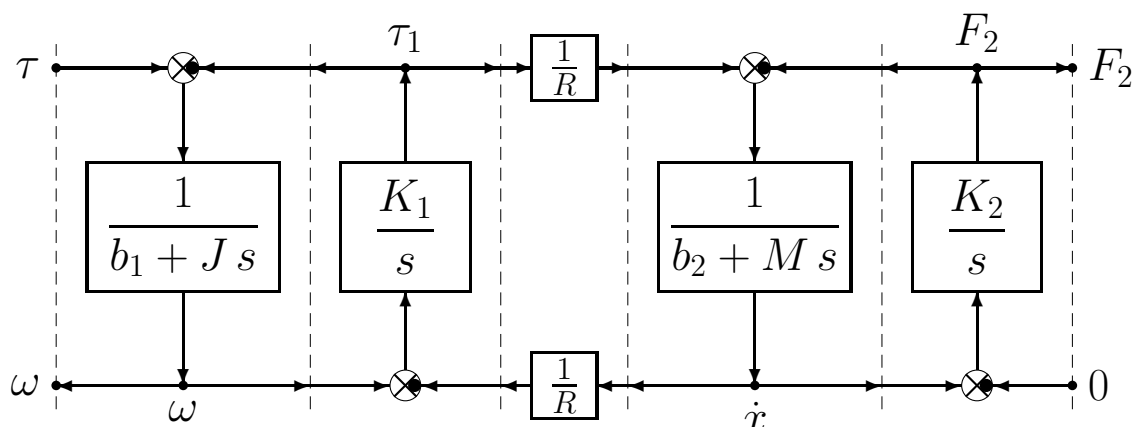
$$C_m m_p \ddot{F}_m + (C_m b + K_v m_p) \dot{F}_m + (A^2 + C_m K_m + K_v b) F_m + K_m K_v F_m = AK_m K_v P(t)$$

6) Sistema meccanico di trasmissione.

Si consideri il sistema meccanico mostrato in figura, costituito da un albero di inerzia J , che ruota a velocità ω , a cui è applicata la coppia esterna τ . Tramite un rullo elastico avente rigidità torsionale K_1 e raggio costante R , l'albero spinge una massa M che comprime una molla lineare con coefficiente di rigidità K_2 .



Un possibile schema a blocchi che descrive la dinamica del sistema è il seguente:



La funzione di trasferimento $G(s)$ che lega l'ingresso τ all'uscita F_2 si calcola facilmente utilizzando la formula di Mason :

$$G(s) = \frac{K_1 K_2 R}{a_4 s^4 + a_3 s^3 + a_2 s^2 + a_1 s + a_0}$$

dove:

$$a_4 = J M R^2$$

$$a_3 = (b_2 J + b_1 M) R^2$$

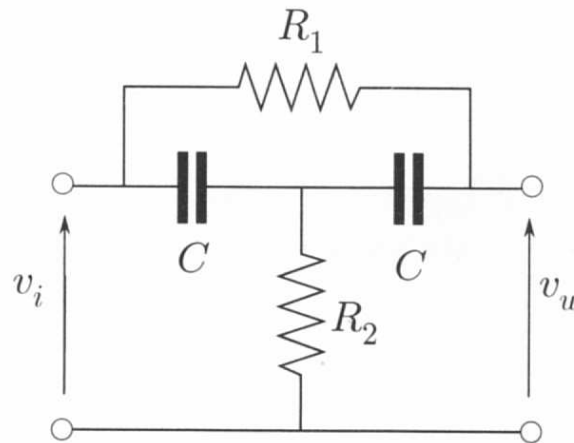
$$a_2 = J K_1 + b_1 b_2 R^2 + J K_2 R^2 + K_1 M R^2$$

$$a_1 = b_1 K_1 + b_2 K_1 R^2 + b_1 K_2 R^2$$

$$a_0 = K_1 K_2 R^2$$

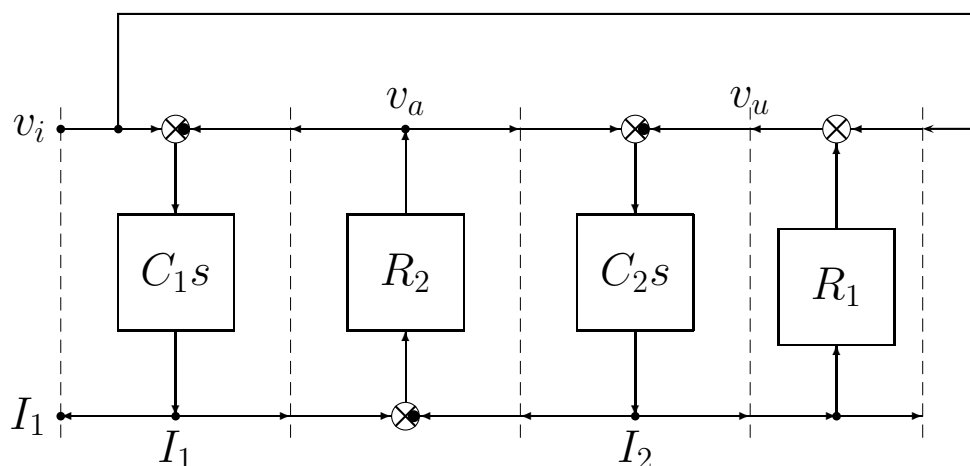
Rete elettrica a T

Sia data la seguente rete elettrica a T:



Supponendo che la corrente I_u assorbita in uscita sia nulla, $I_u = 0$, si determini la funzione di trasferimento $G(s)$ che lega la tensione di ingresso $V_i(s)$ alla tensione di uscita $V_u(s)$.

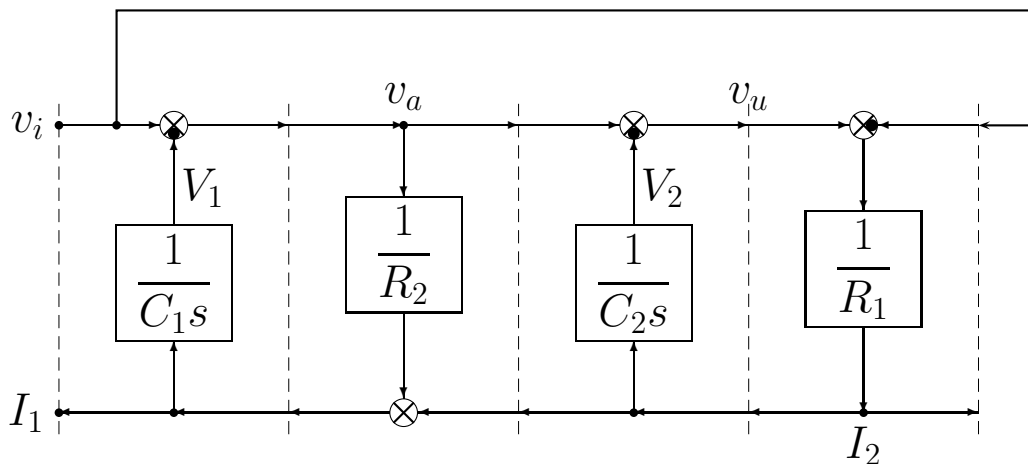
Un possibile schema a blocchi (non utilizzabile in simulazione) che descrive la dinamica del sistema è il seguente:



La funzione di trasferimento si determina facilmente utilizzando Mason:

$$G(s) = \frac{V_u(s)}{V_i(s)} = \frac{1 + R_2(C_1 + C_2)s + C_1 C_2 R_1 R_2 s^2}{1 + C_1 R_2 s + C_2 R_2 s + C_2 R_1 s + C_1 C_2 R_1 R_2 s^2}$$

Invertendo due dei tre anelli del sistema si ottiene uno schema a blocchi utilizzabile anche in simulazione:



Una corrispondente descrizione nello spazio degli stati è la seguente:

$$\begin{bmatrix} \dot{V}_1 \\ \dot{V}_2 \end{bmatrix} = \overbrace{\begin{bmatrix} -\frac{1}{R_1 C_1} - \frac{1}{R_2 C_1} & -\frac{1}{R_1 C_1} \\ -\frac{1}{R_1 C_2} & -\frac{1}{R_1 C_2} \end{bmatrix}}^{\mathbf{A}} \begin{bmatrix} V_1 \\ V_2 \end{bmatrix} + \overbrace{\begin{bmatrix} \frac{1}{R_2 C_1} \\ 0 \end{bmatrix}}^{\mathbf{B}} v_i$$

$$v_u = \underbrace{\begin{bmatrix} -1 & -1 \end{bmatrix}}_{\mathbf{C}} \begin{bmatrix} V_1 \\ V_2 \end{bmatrix} + \underbrace{\begin{bmatrix} 1 \end{bmatrix}}_{\mathbf{D}} v_i$$

Il determinante del grafo Δ è proporzionale al determinante della matrice $(s\mathbf{I} - \mathbf{A})$:

$$\det(s\mathbf{I} - \mathbf{A}) = \frac{1 + C_1 R_2 s + C_2 R_2 s + C_2 R_1 s + C_1 C_2 R_1 R_2 s^2}{C_1 C_2 R_1 R_2}$$

Si noti che la funzione di trasferimento $G(s)$ può essere calcolata anche utilizzando la seguente formula:

$$G(s) = \mathbf{C}(s\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}\mathbf{B} + \mathbf{D}$$