

Sviluppo in serie di Fourier

- Consideriamo una funzione periodica $\overline{f}$ di periodo T :

$$\overline{f}(t) = \overline{f}(t + T) \quad \forall t$$

- Qualunque funzione periodica di periodo T può essere rappresentata mediante lo sviluppo in serie di Fourier:

$$\overline{f}(t) = \sum_{n=-\infty}^{n=\infty} c_n e^{jn\omega_0 t}$$

dove

$$\omega_0 = \frac{2\pi}{T} \quad e^{j\omega t} = \cos(\omega t) + j \sin(\omega t)$$

- Lo sviluppo in serie di Fourier può essere rappresentato con formule equivalenti:

$$\overline{f}(t) = \sum_{n=-\infty}^{n=\infty} c_n e^{jn\omega_0 t}$$

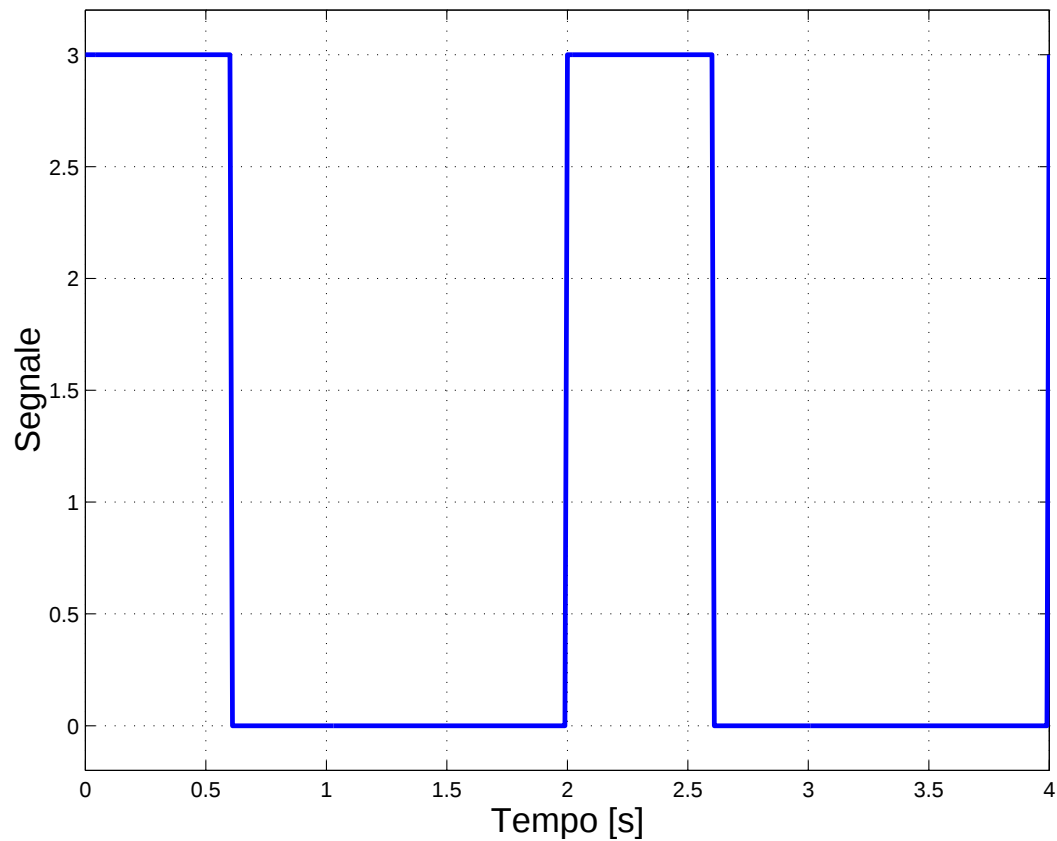
$$\overline{f}(t) = a_0 + \sum_{n=1}^{n=\infty} r_n \cos(n\omega_0 t + \varphi_n)$$

$$\overline{f}(t) = a_0 + \sum_{n=1}^{n=\infty} a_n \cos(n\omega_0 t) + b_n \sin(n\omega_0 t)$$

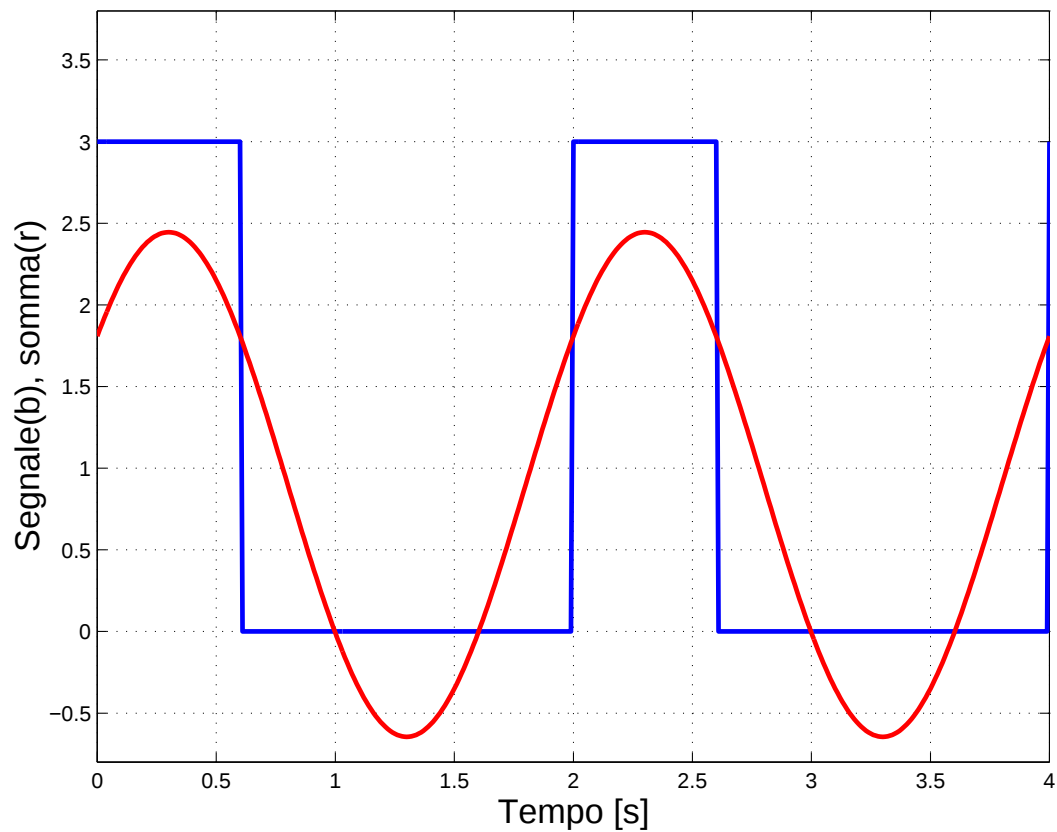
- Il termine costante a_0 è detto componente continua e coincide con il valore medio di $\overline{f}(t)$ in un periodo.
- Qualunque funzione periodica è quindi “scomponibile” nella somma di infinite funzioni sinusoidali con periodo ∞ (componente continua), T , $T/2, \dots, T/n, \dots$ o equivalentemente con pulsazione $0, \omega_0, 2\omega_0, \dots, n\omega_0, \dots$
- Le componenti sinusoidali di un segnale periodico sono dette armoniche. La sinusoide $r_1 \cos(\omega_0 t + \varphi_1)$ avente lo stesso periodo della funzione $\overline{f}(t)$ è detta armonica fondamentale. La sinusoide $r_n \cos(n\omega_0 t + \varphi_n)$ si dice n-esima armonica.

Consideriamo come esempio un impulso rettangolare periodico:

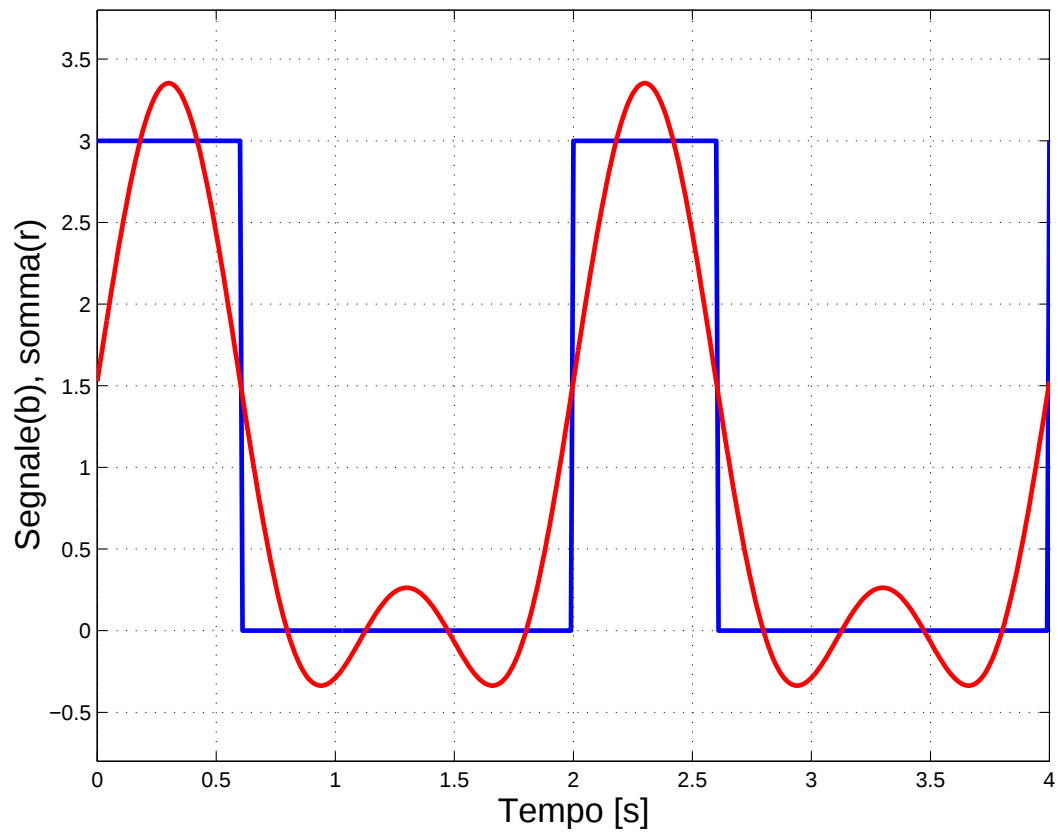
Esempio di segnale periodico



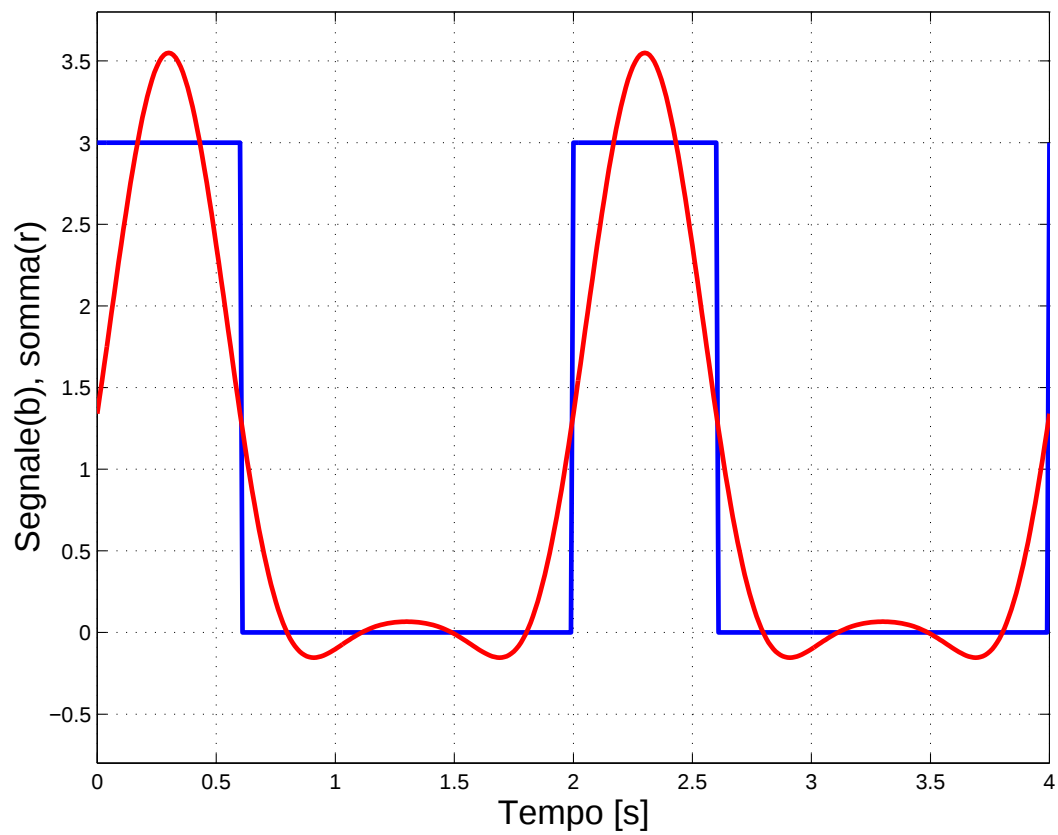
Segnale periodico e somma delle armoniche 0...1



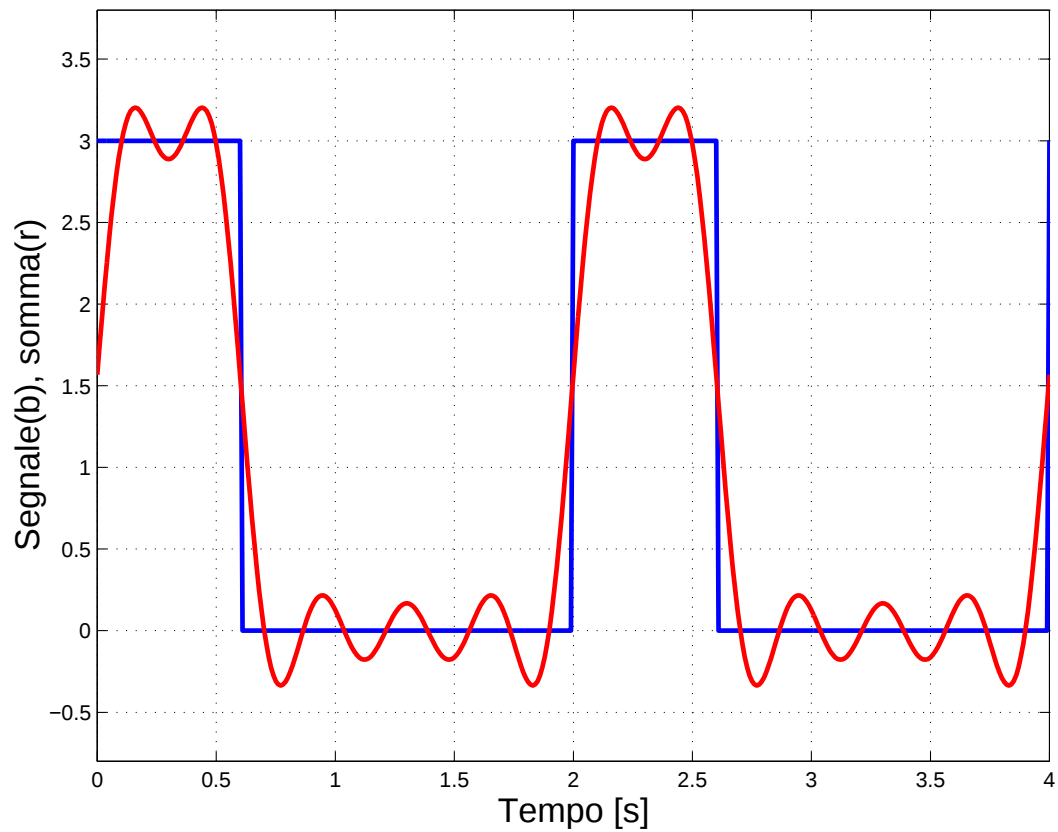
Segnale periodico e somma delle armoniche 0...2



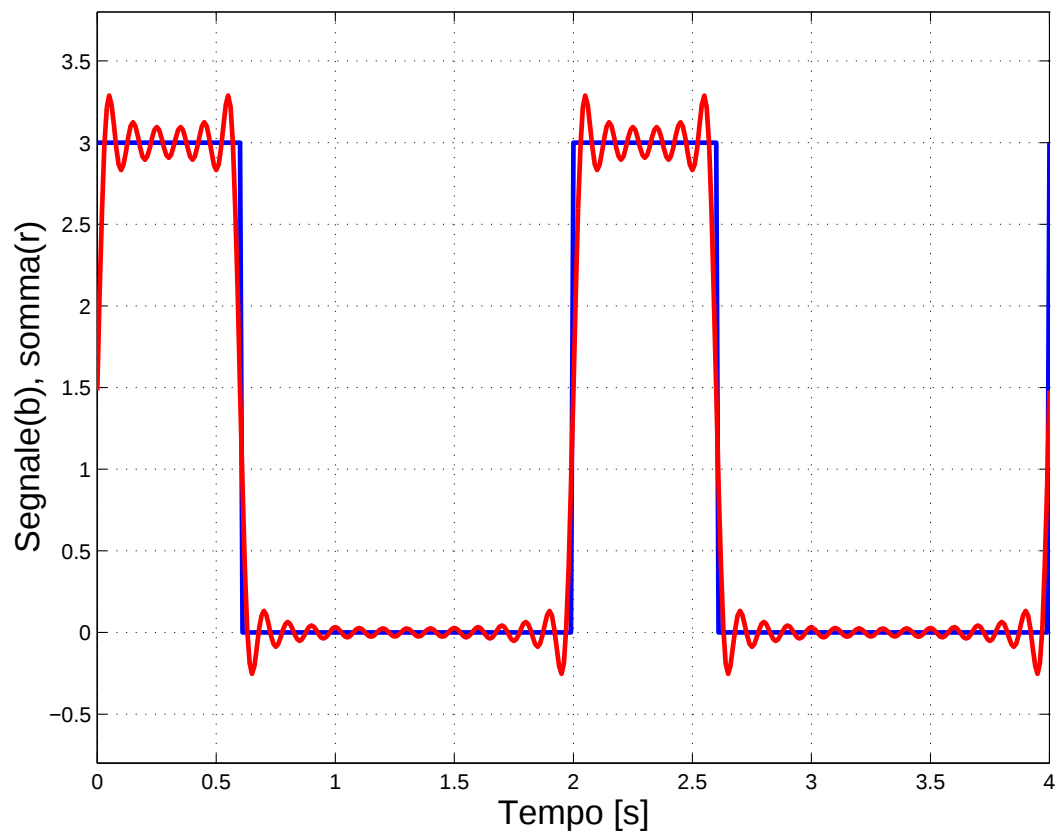
Segnale periodico e somma delle armoniche 0...3



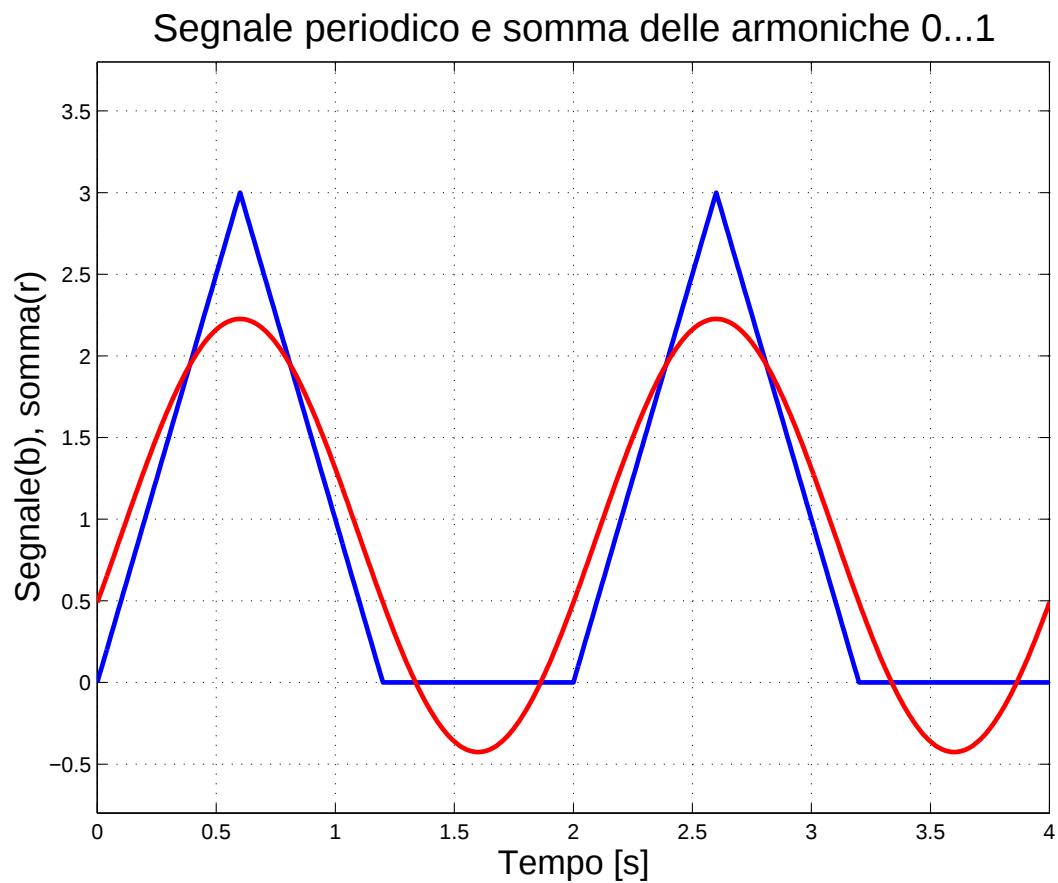
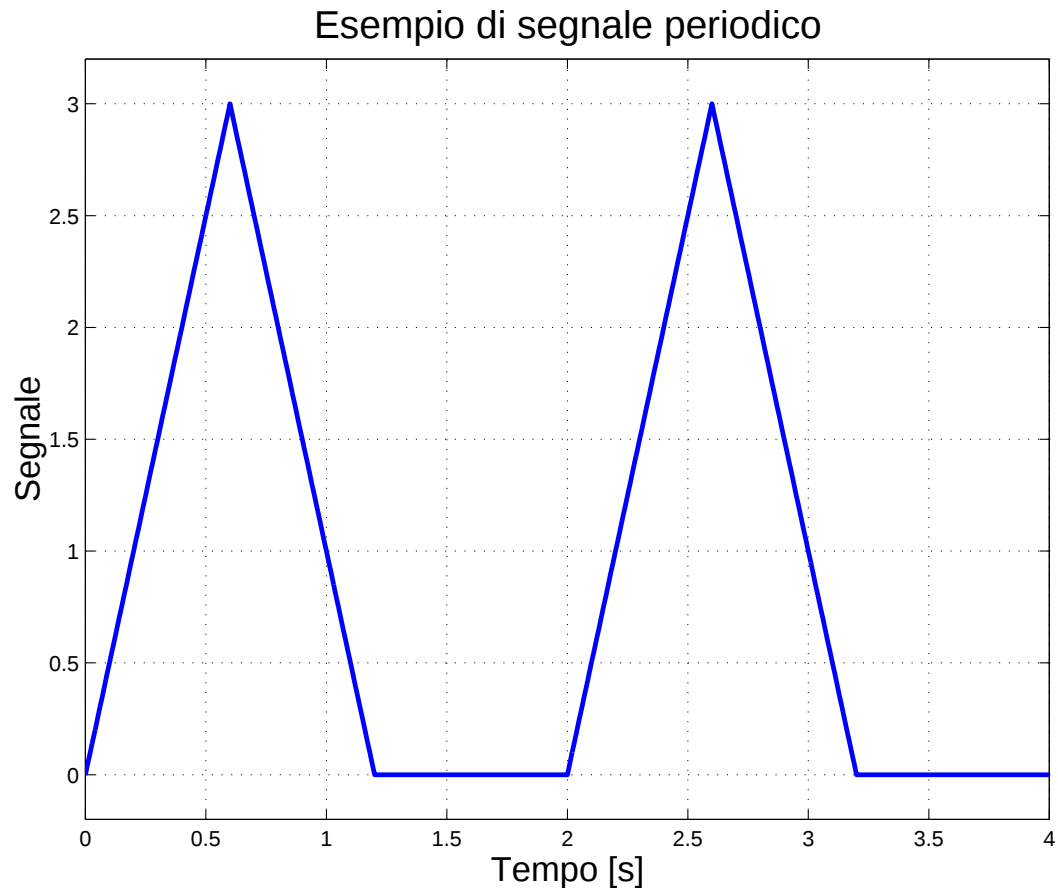
Segnale periodico e somma delle armoniche 0...5



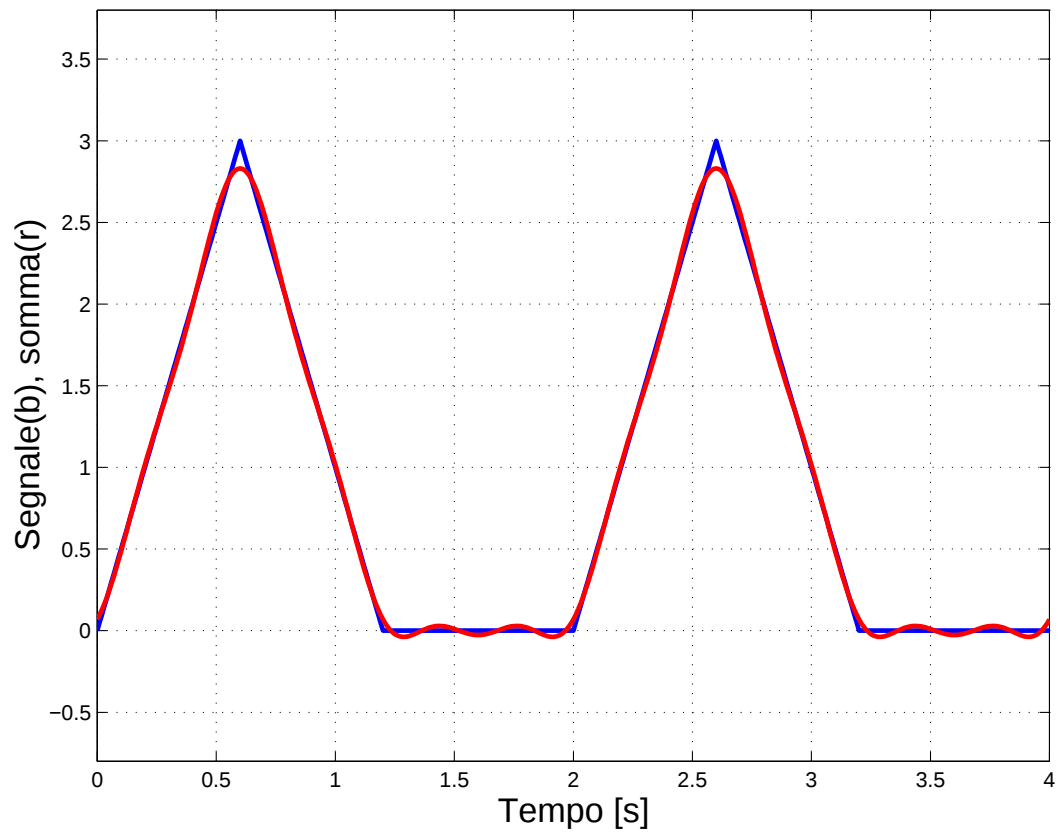
Segnale periodico e somma delle armoniche 0...20



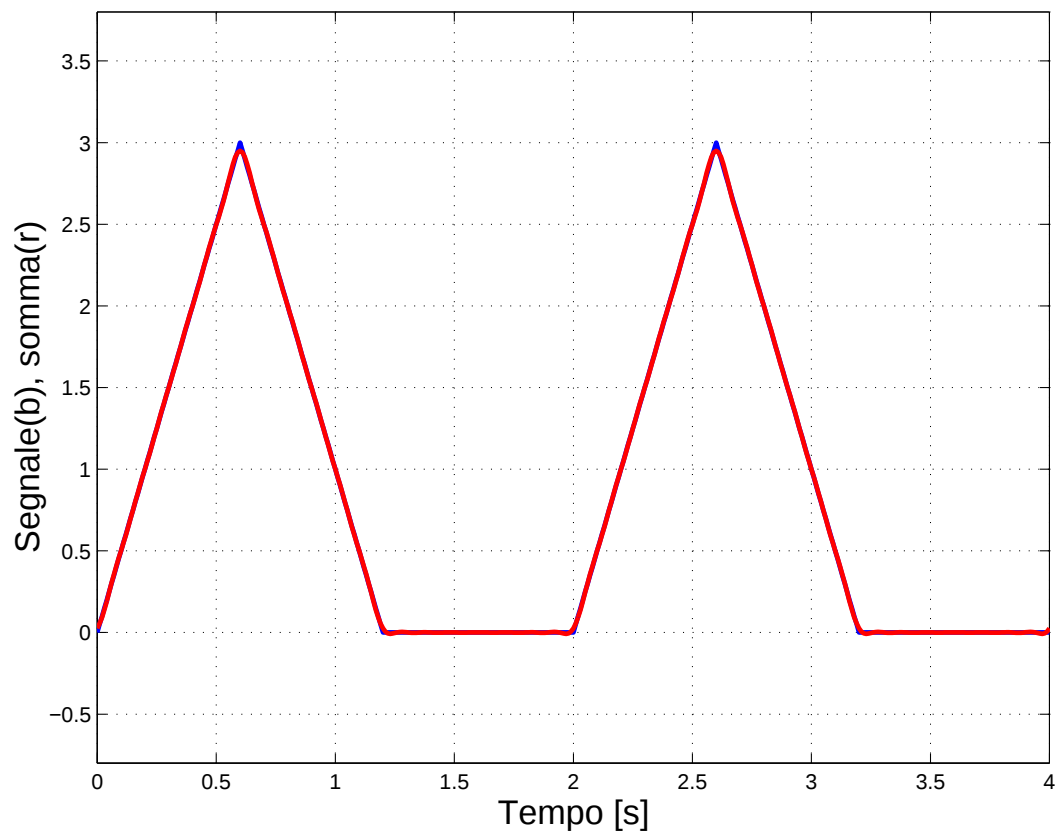
Consideriamo come esempio un impulso triangolare periodico:



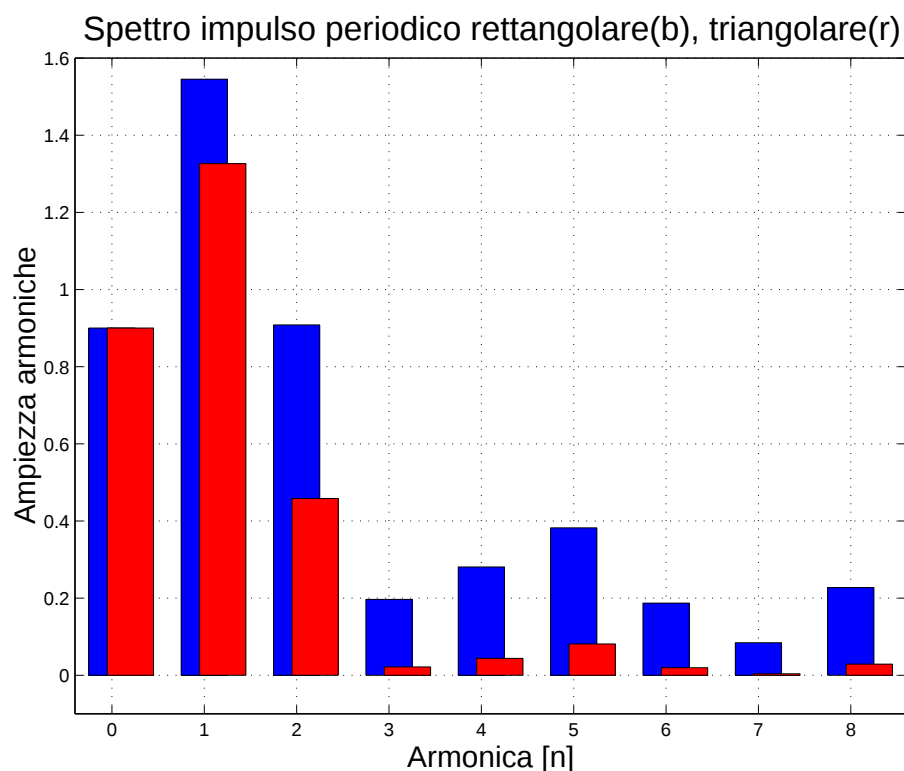
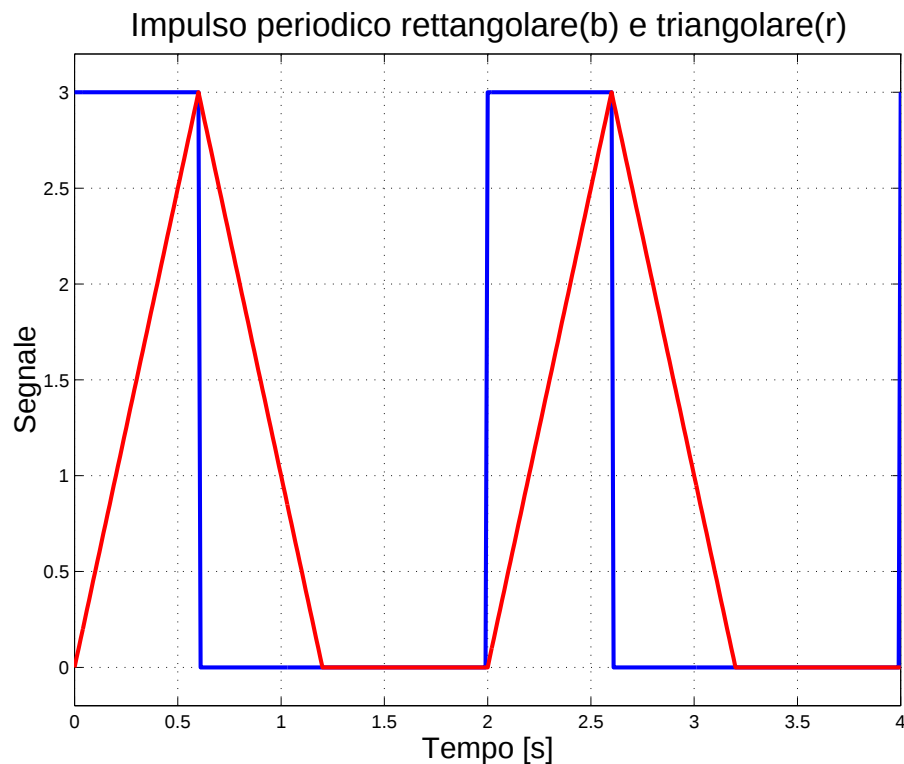
Segnale periodico e somma delle armoniche 0...5



Segnale periodico e somma delle armoniche 0...20



- Tipicamente le prime armoniche di un segnale periodico presentano un'ampiezza r_n superiore rispetto alle armoniche con pulsazione più elevata.
- Le armoniche ad alta frequenza di segnali che variano rapidamente hanno tipicamente un'ampiezza maggiore rispetto alle corrispondenti armoniche di segnali che variano lentamente.



Trasformata di Fourier

- Anche le funzioni $f(t)$ non periodiche si possono scomporre nella “somma” di funzioni sinusoidali. In questo caso si parla di trasformata di Fourier:

$$F(j\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) e^{-j\omega t} dt$$

$F(j\omega)$ è una funzione complessa della variabile reale ω .

- La funzione $F(j\omega)$ si dice spettro di $f(t)$. Il modulo di $F(j\omega)$ è detto spettro di ampiezza. L'argomento di $F(j\omega)$ è detto spettro di fase.
- Detta $F(s)$ la trasformata di Laplace di $f(t)$, la trasformata di Fourier si ottiene direttamente come:

$$F(j\omega) = F(s)|_{s=j\omega}$$

- La funzione $f(t)$ si ricava dallo spettro $F(j\omega)$ tramite l'antitrasformata di Fourier:

$$f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} F(j\omega) e^{j\omega t} d\omega$$

L'antitrasformata di Fourier è l'analogo per le funzioni non periodiche della serie di Fourier:

$$\bar{f}(t) = \sum_{n=-\infty}^{n=\infty} c_n e^{jn\omega_0 t}$$

- Per le funzioni $f(t)$ reali è sufficiente conoscere $F(j\omega)$ per $\omega \geq 0$ in quanto vale la relazione:

$$f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{+\infty} [F(j\omega) e^{j\omega t} + F^*(j\omega) e^{-j\omega t}] d\omega$$

- Lo spettro $F(j\omega)$ si rappresenta solitamente con due grafici:
 - 1) Il diagramma delle ampiezze rappresenta il modulo $|F(j\omega)|$ espresso solitamente in dB in funzione del $\log_{10} \omega$.

$$|F(j\omega)|_{dB} = 20 \text{Log}_{10} |F(j\omega)|$$
 - 2) Il diagramma delle fasi rappresenta $\arg F(j\omega)$ (in radianti o in gradi) in funzione del $\log_{10} \omega$.

- Mentre per i segnali periodici si ha uno spettro discreto, per i segnali non periodici lo spettro è continuo.
- Valgono comunque considerazioni analoghe a quelle dei segnali periodici. Tipicamente segnali che variano rapidamente hanno spettri di ampiezza significativi anche alle alte frequenze.

