Banda passante di un sistema lineare

- Consideriamo un sistema lineare con funzione di trasferimento $G(s)$. La funzione di risposta armonica del sistema lineare è $G(j\omega)$.
- Applichiamo in ingresso al sistema lineare un segnale $x(t)$ con spettro $X(j\omega)$. Lo spettro $Y(j\omega)$ della risposta $y(t)$ si ottiene come:

$$Y(j\omega) = G(j\omega)\,X(j\omega)$$

- Gli spettri di ampiezza e fase della risposta $y(t)$ risultano quindi:

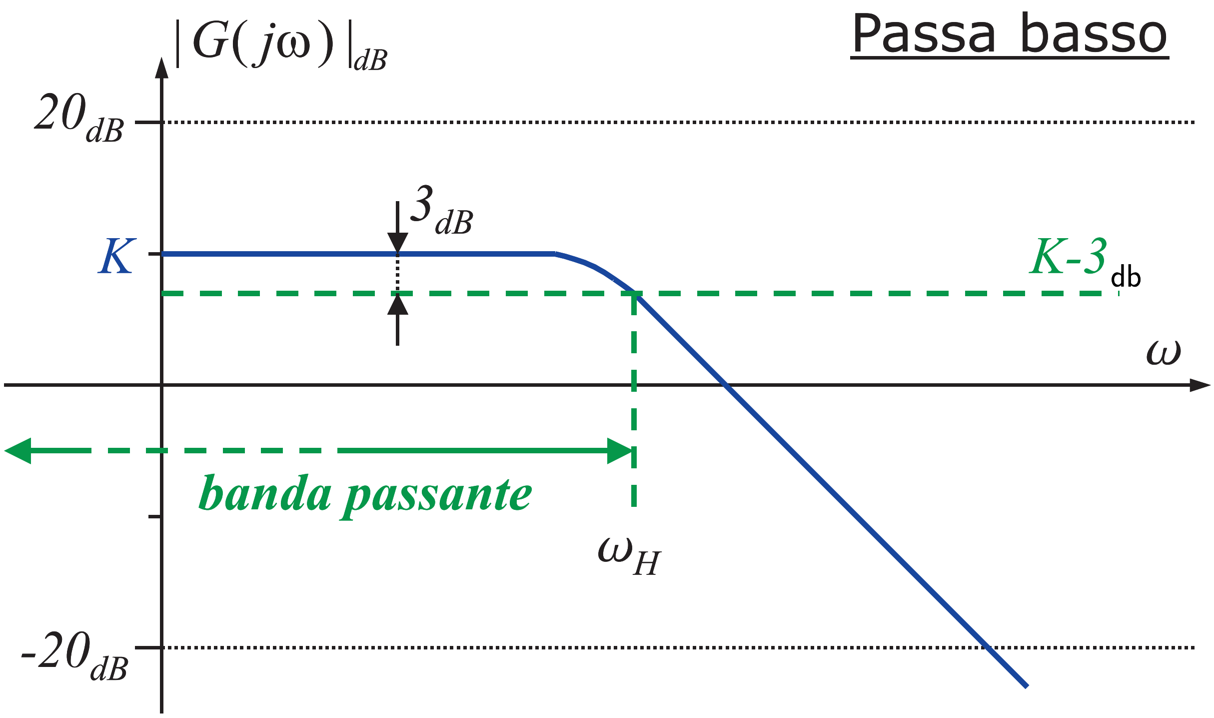
$$\begin{aligned} |Y(j\omega)|_{dB} &= |G(j\omega)|_{dB} + |X(j\omega)|_{dB} \\ \angle Y(j\omega) &= \angle G(j\omega) + \angle X(j\omega) \end{aligned}$$

- Lo spettro $Y(j\omega)$ della risposta è dunque una versione, alterata dalla funzione di risposta armonica $G(j\omega)$, dello spettro $X(j\omega)$ del segnale di ingresso. Si dice che il sistema lineare *filtra* il segnale di ingresso.
- Le differenze nello spettro equivalgono a differenze nella risposta temporale. Il sistema lineare riuscirà a inseguire esattamente l'andamento del segnale di ingresso, ovvero $y(t) = K\,x(t)$ ($K > 0$), se e solo se:

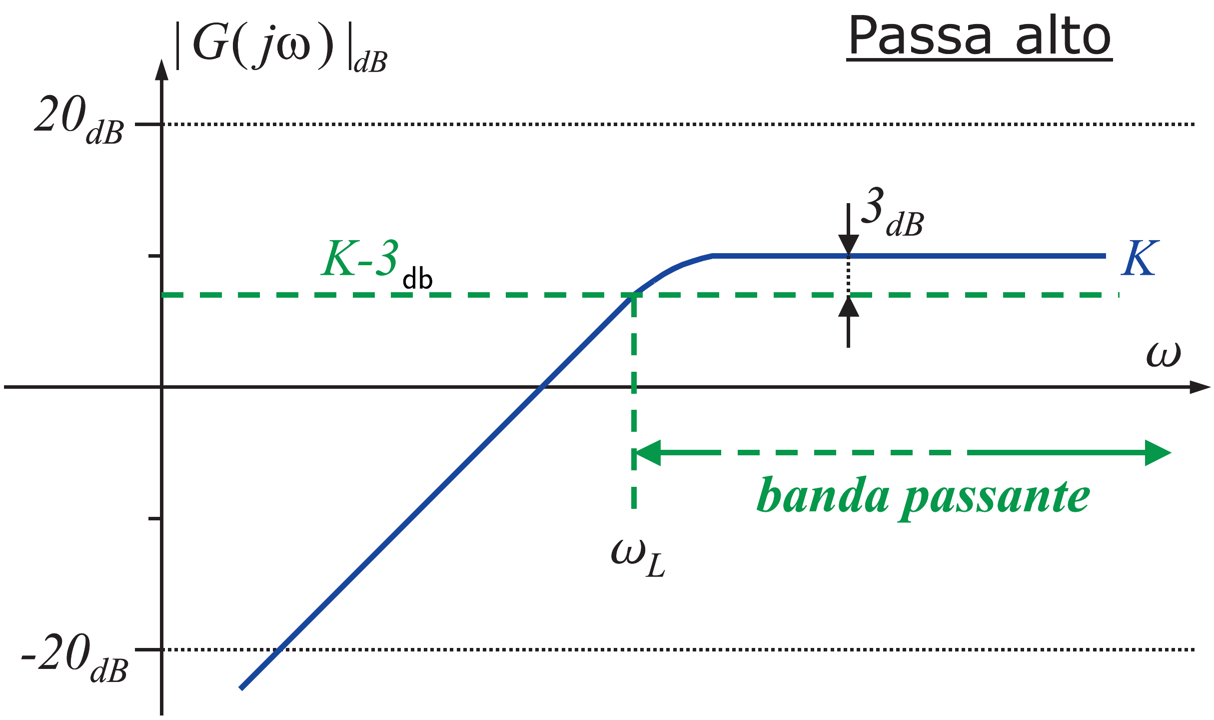
$$|G(j\omega)| = K \qquad e \qquad \angle G(j\omega) = 0$$

- Le differenze tra la risposta $y(t)$ e il segnale di ingresso $x(t)$ sono tanto maggiori quanto più $|G(j\omega)| \neq K$ e $\angle G(j\omega) \neq 0$.
- Per molti sistemi lineari esiste solo un intervallo di pulsazioni ω per il quale vale la relazione $|G(j\omega)| \simeq K$ e $\angle G(j\omega) \simeq 0$. Questo intervallo di valori di ω si chiama *banda passante*.
- Per convenzione la banda passante (nella maggior parte dei casi di interesse pratico) è data dai valori di ω per i quali $|G(j\omega)|_{dB} \geq K - 3_{dB}$.
- Tipicamente la banda passante è data da un intervallo di valori del tipo $\omega_L \leq \omega \leq \omega_H$ con ω_L e ω_H dette *pulsazioni di taglio*.
- NOTA BENE: sottrarre 3_{dB} equivale ad una riduzione di ampiezza pari al 30%!

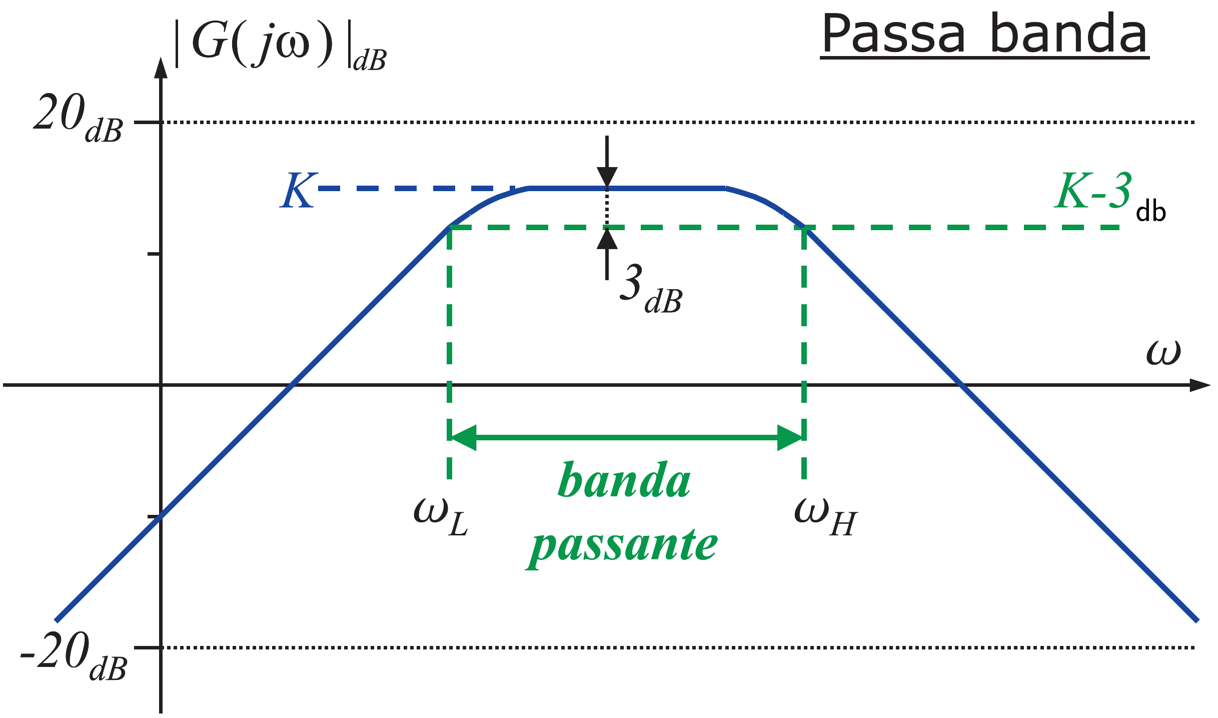
- Sistema di tipo *passa basso*. Banda passante $0 \leq \omega \leq \omega_H$.



- Sistema di tipo *passa alto*. Banda passante $\omega_L \leq \omega \leq \infty$.

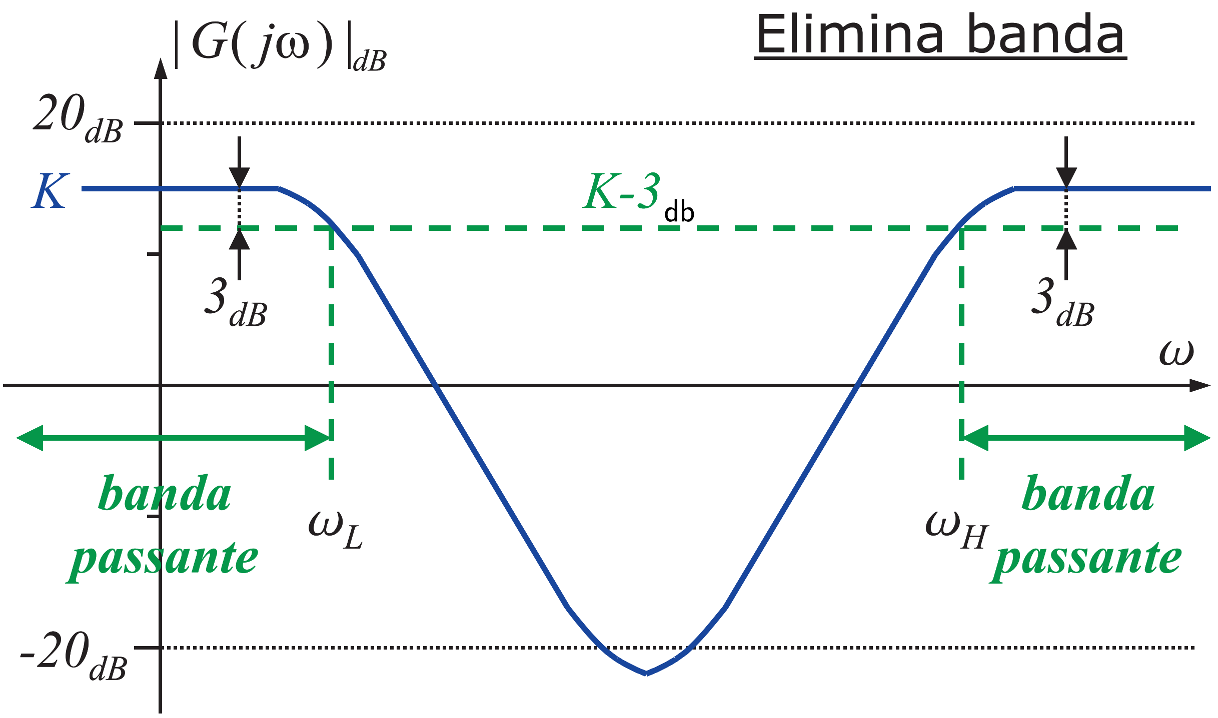


- Sistema di tipo *passa banda*. Banda passante $\omega_L \leq \omega \leq \omega_H$.



- Sistema di tipo *elimina banda*.

  Banda passante $0 \leq \omega \leq \omega_L$ e $\omega_H \leq \omega \leq \infty$.



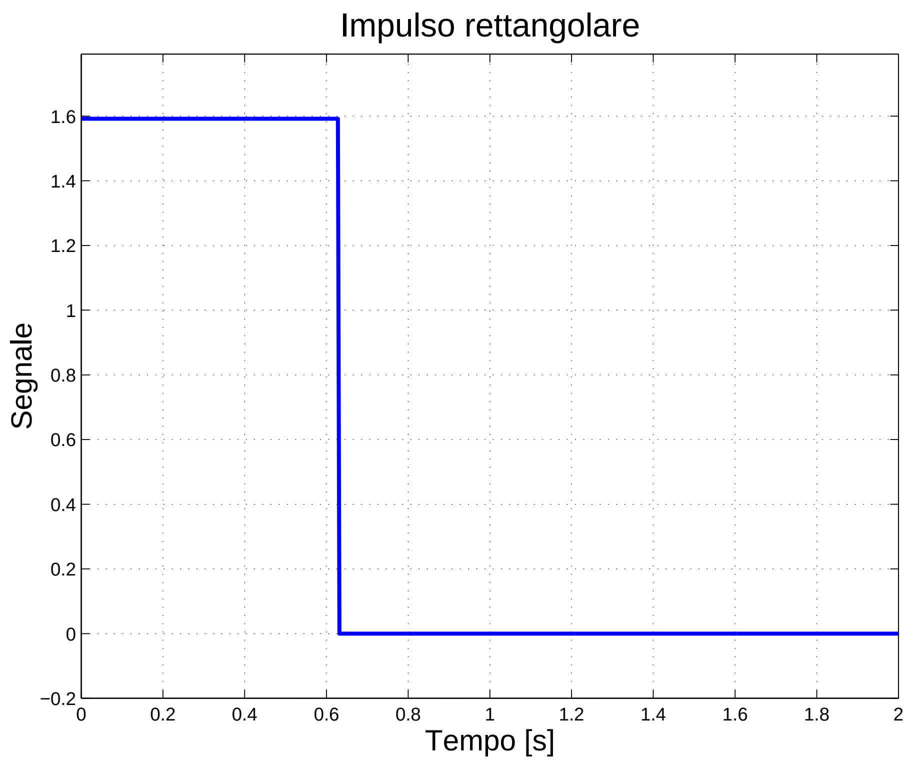
- Consideriamo un sistema del primo ordine con guadagno statico unitario:

$$G(s) = \frac{1}{1 + \tau\, s}$$

- I sistemi del primo ordine sono di tipo passa basso e la loro banda passante è $0 \leq \omega \leq \omega_H$ con:

$$\omega_H = \frac{1}{\tau}$$

- Applichiamo in ingresso al sistema $G(s)$ un impulso rettangolare $x(t)$ di durata t_0 e ampiezza $1/t_0$ (quindi area unitaria). Sia ad esempio $t_0 = 2\pi/10$:



- La trasformata di Laplace $X(s)$ del segnale di ingresso $x(t)$ risulta:

$$X(s) = \frac{1}{t_0\, s} \left(1 - e^{-t_0\, s}\right)$$

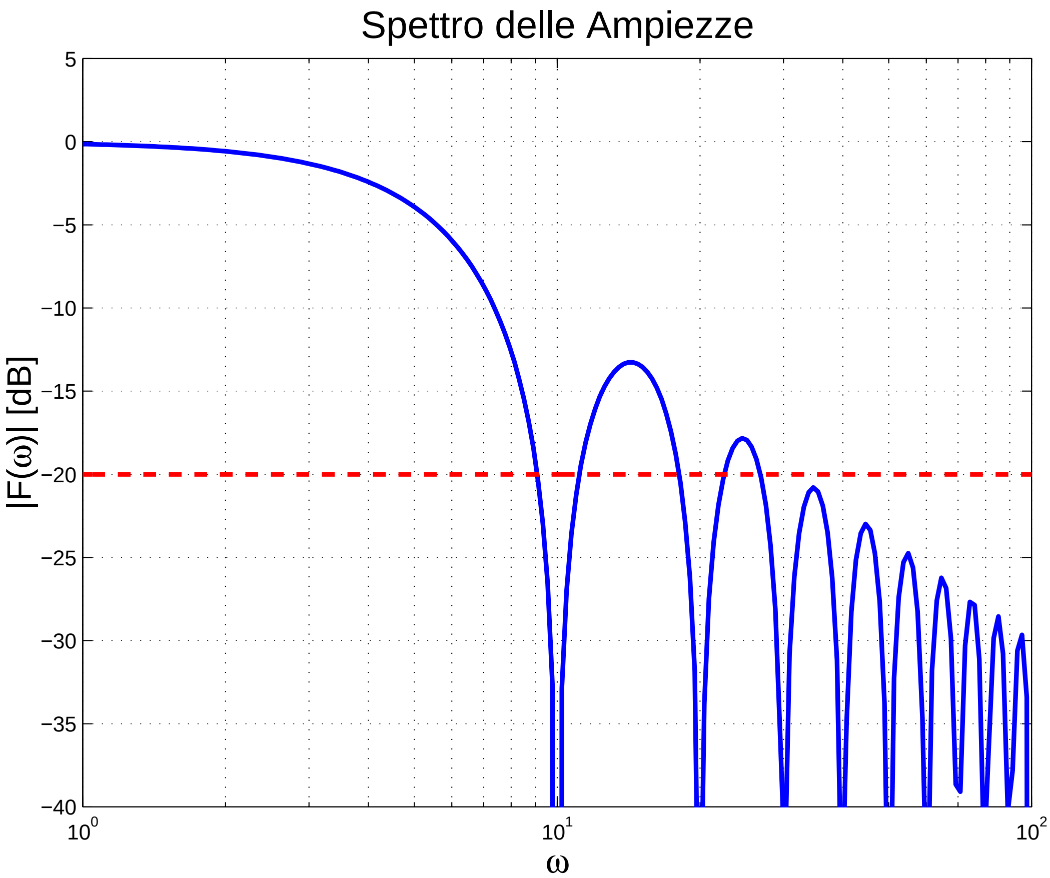
- Lo spettro $X(j\omega)$ del segnale di ingresso $x(t)$ risulta quindi:

$$X(j\omega) = \frac{1}{t_0\, j\omega} \left(1 - e^{-j\omega\, t_0}\right)$$

- Lo spettro $X(j\omega)$ del segnale di ingresso $x(t)$ risulta:

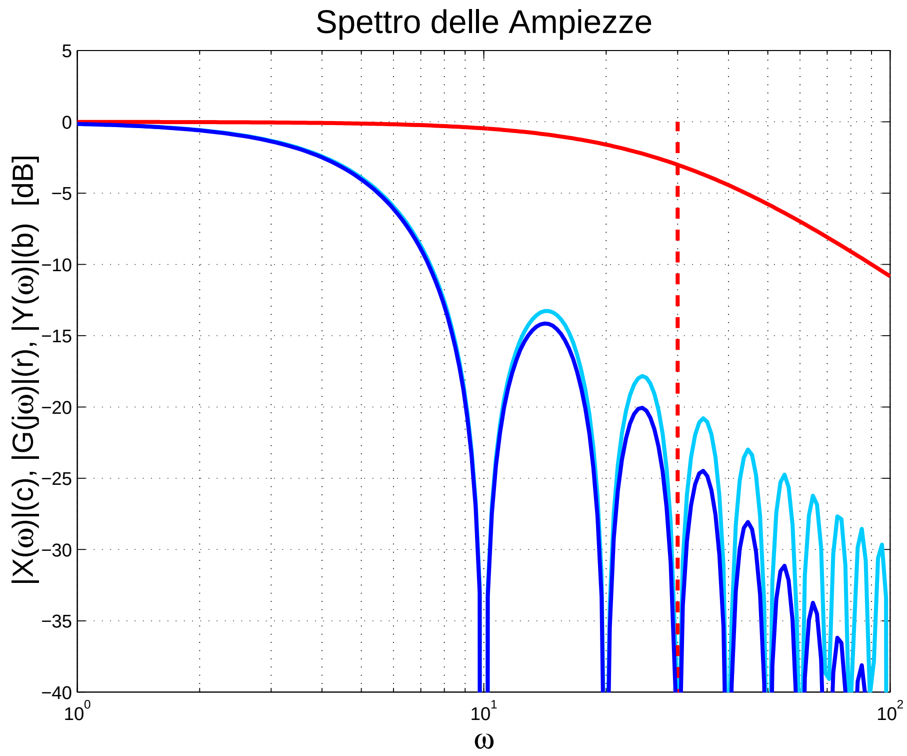
$$X(j\omega) = \frac{1}{t_0\, j\omega}\left(1 - e^{-j\omega\, t_0}\right)$$

- Per $t_0 = 2\pi/10$ lo spettro $X(j\omega)$ risulta:

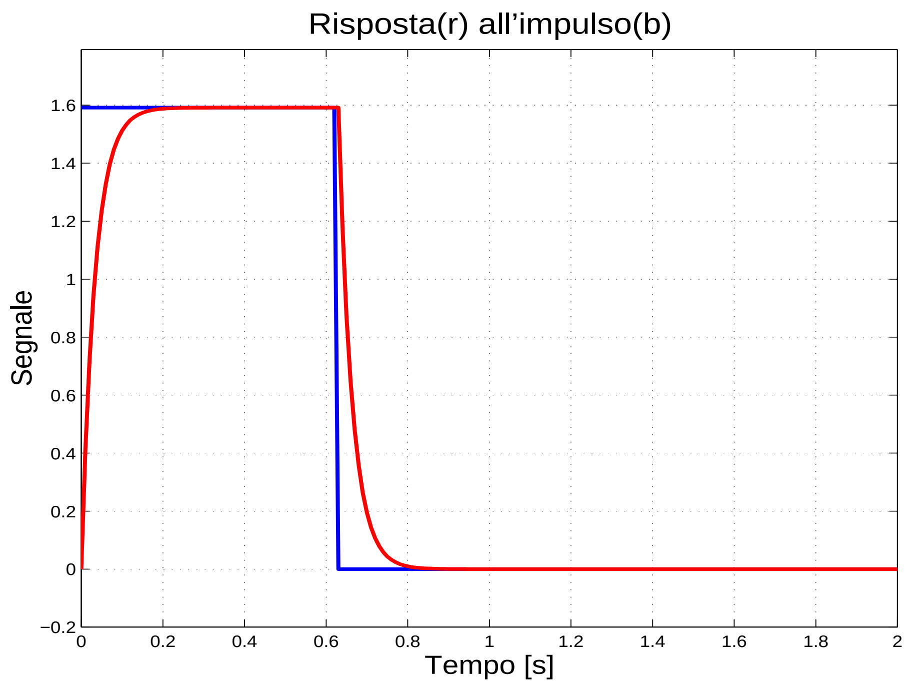


Lo spettro si annulla per $\omega = n\,\omega_0$ con $\omega_0 = 2\pi/t_0$. Per $\omega > 3\omega_0$ lo spettro delle ampiezze del segnale è inferiore a $1/10$ rispetto allo spettro alle basse pulsazioni.

- Sia $\omega_H = 30 = 3\omega_0$. Lo spettro $Y(j\omega)$ della risposta $y(t)$ risulta:

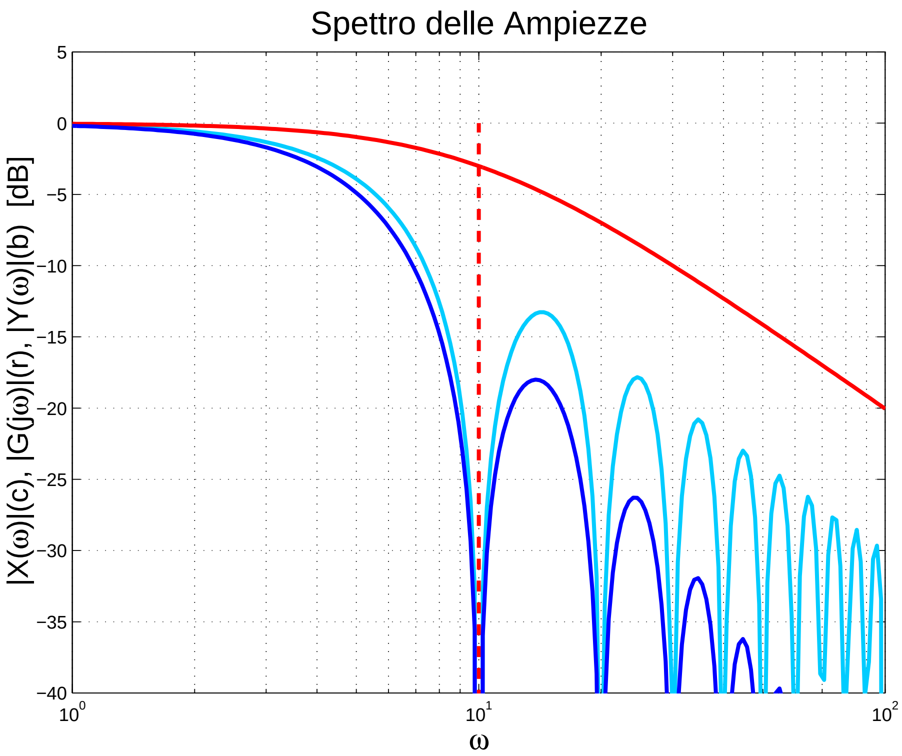


- L'andamento temporale della risposta nel tempo risulta:

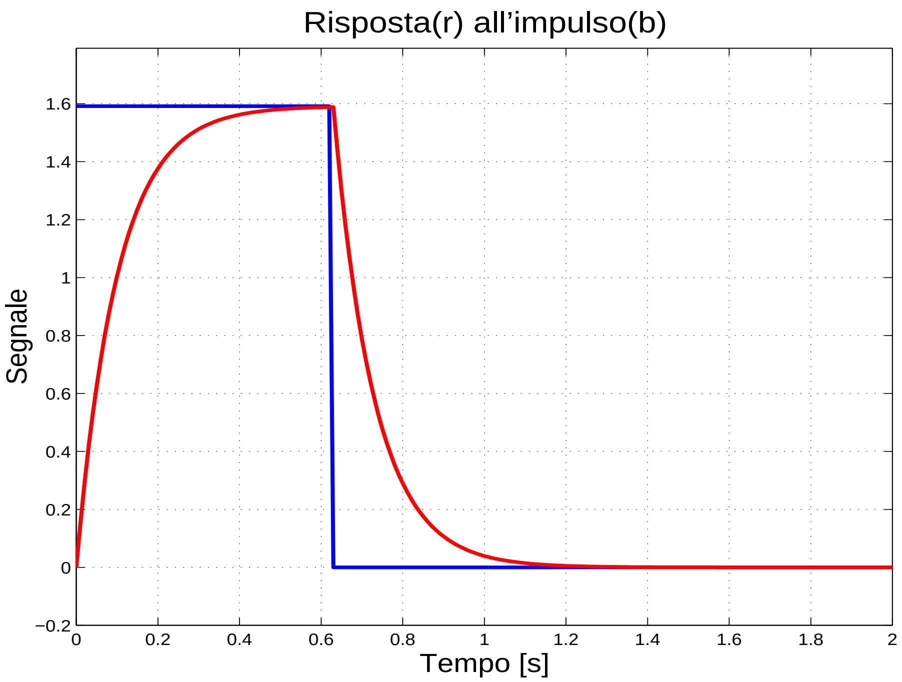


- Le principali componenti spettrali (per $\omega < 2\omega_0$) passano praticamente invariate all'uscita del sistema lineare. Invece le componenti spettrali per $\omega > \omega_H$ sono attenuate dal sistema del primo ordine. Quindi la risposta $y(t)$ non può essere veloce come il segnale di ingresso $x(t)$, ma si mantiene una buona similitudine fra i due segnali.

- Sia $\omega_H = 10 = \omega_0$. Lo spettro $Y(j\omega)$ della risposta $y(t)$ risulta:

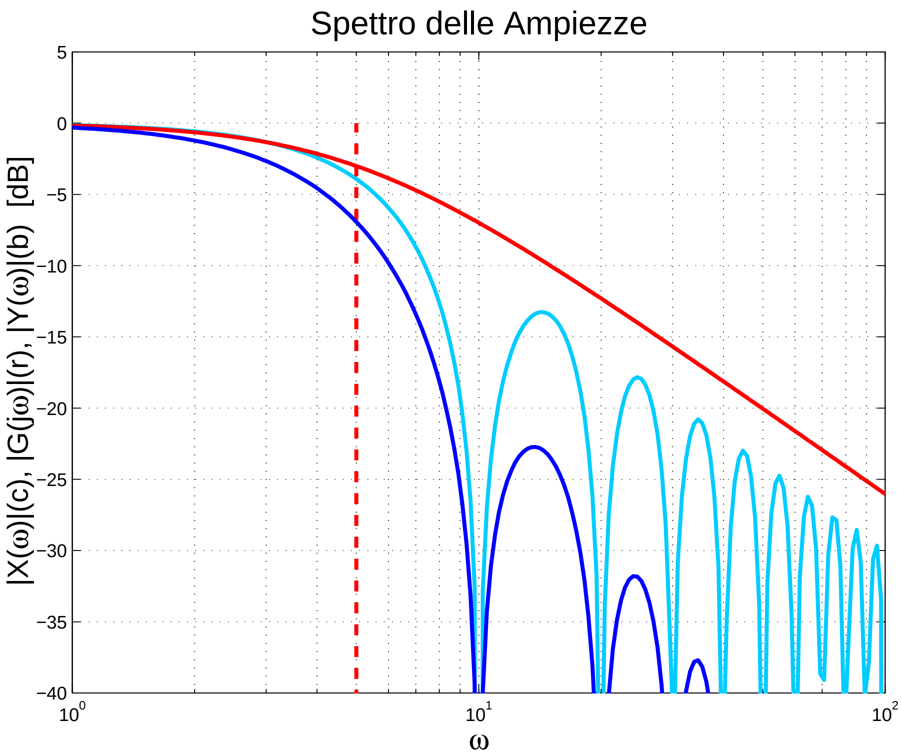


- L'andamento temporale della risposta nel tempo risulta:

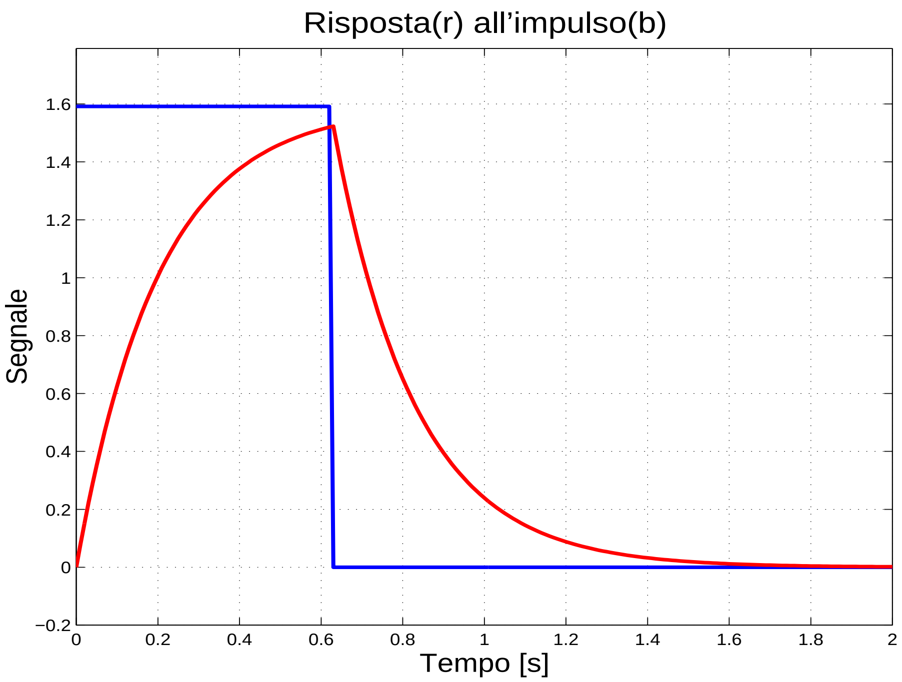


- Rispetto al caso precedente anche una parte delle principali componenti spettrali (per $\omega_0 < \omega < 2\omega_0$) è attenuata dal sistema del primo ordine. In $Y(j\omega)$ si perde buona parte del contenuto in alta frequenza del segnale di ingresso quindi la risposta $y(t)$ è piuttosto lenta.

- Sia $\omega_H = 5 = \omega_0/2$. Lo spettro $Y(j\omega)$ della risposta $y(t)$ risulta:

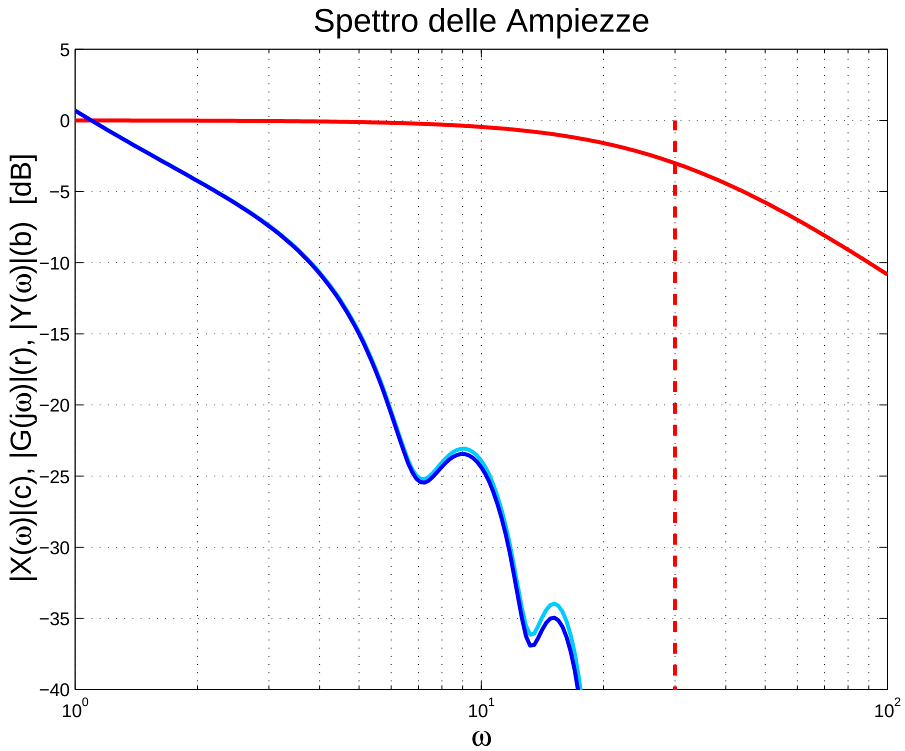


- L'andamento temporale della risposta nel tempo risulta:

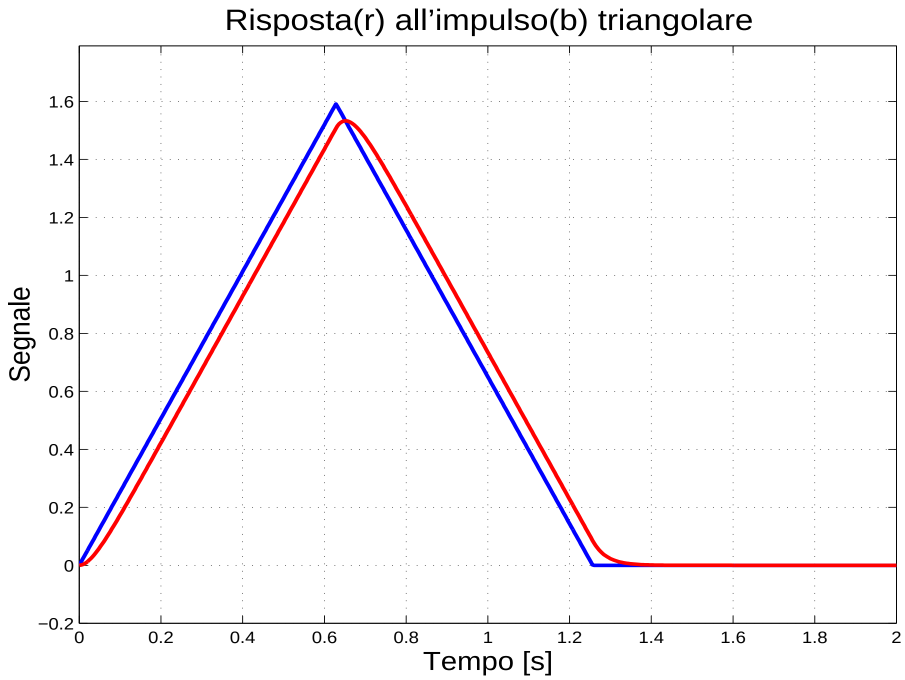


- In questo caso anche le componenti spettrali a bassa frequenza sono attenuate dal sistema del primo ordine e quelle in alta frequenza sono sostanzialmente scomparse. La risposta $y(t)$ è molto lenta e non riesce a seguire per nulla l'ingresso $x(t)$.

- Applichiamo in ingresso al sistema $G(s)$ un impulso triangolare $x(t)$ di durata $2t_0$ e ampiezza $1/t_0$ (area unitaria). Sia ad esempio $t_0 = 2\pi/10$.
- Sia $\omega_H = 30$. Lo spettro $Y(j\omega)$ della risposta $y(t)$ risulta:

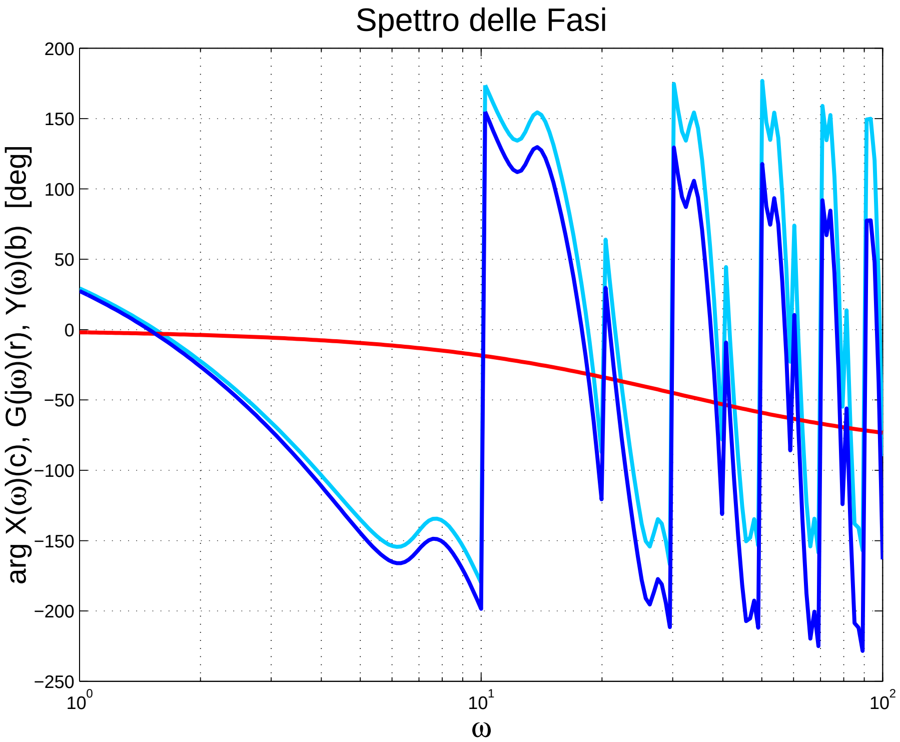


- L'andamento temporale della risposta nel tempo risulta:



- Lo spettro delle ampiezze di $Y(j\omega)$ è sostanzialmente identico allo spettro di $X(j\omega)$ a cosa è dovuto allora il ritardo di $y(t)$ rispetto a $x(t)$?

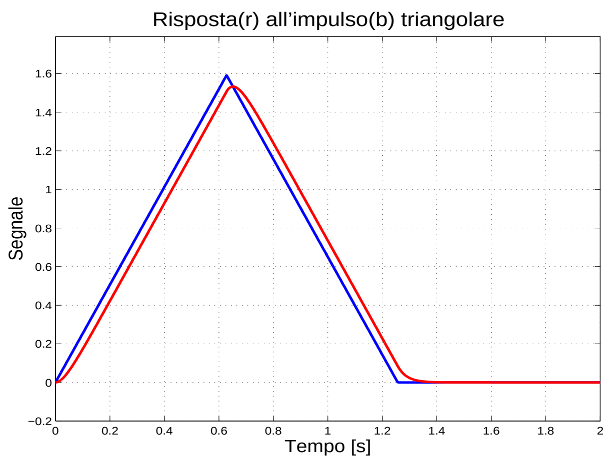
- Lo spettro delle fasi della risposta $y(t)$ risulta:



- Mentre lo spettro delle ampiezze di $Y(j\omega)$ è sostanzialmente identico allo spettro di $X(j\omega)$, i due spettri delle fasi differiscono fra loro, anche per pulsazioni relativamente piccole. In particolare lo spettro di fase di $Y(j\omega)$ presenta angoli minori rispetto allo spettro di fase di $X(j\omega)$.

- Si parla in questo caso di *sfasamento in ritardo* o di *ritardo di fase* della fase del segnale di uscita rispetto a quella del segnale di ingresso.

- Qualitativamente un ritardo di fase introdotto da un sistema lineare induce un ritardo fra il segnale di ingresso e il segnale di uscita.

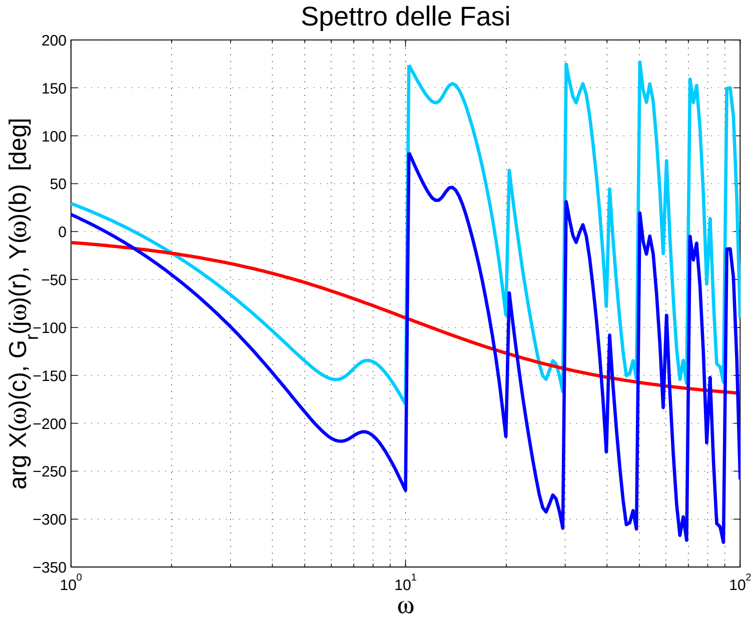


- Si consideri ad esempio il sistema a fase non minima:

$$G_r(s) = \frac{a - s}{a + s}$$

avente modulo unitario a tutte le pulsazioni (quindi banda infinita), ma che introduce un ritardo di fase da 0 a -180^o.

- Gli spettri delle ampiezze di $X(j\omega)$ e di $Y(j\omega)$ sono identici essendo $|G_r(j\omega)| = 1$ per $\forall\omega$. Lo spettro delle fasi (per $a = 10$) della risposta $y(t)$ risulta:



- Il ritardo di fase introdotto dal sistema $G_r(s)$ si traduce in un ritardo del segnale $y(t)$ rispetto a $x(t)$, oltre ad un andamento in *controfase* in seguito ai cambi di derivata del segnale di ingresso: