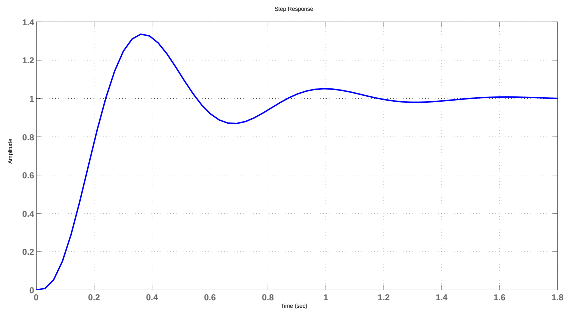
Fondamenti di Controlli Automatici - A.A. 2011/12
20 settembre 2012 - Domande Teoriche

Cognome Nome:	
Matricola:	
Corso di Laurea:	

Per ciascuno dei test a soluzione multipla segnare con una crocetta tutte le affermazioni che si ritengono giuste. In ogni quiz almeno una affermazione è corretta.

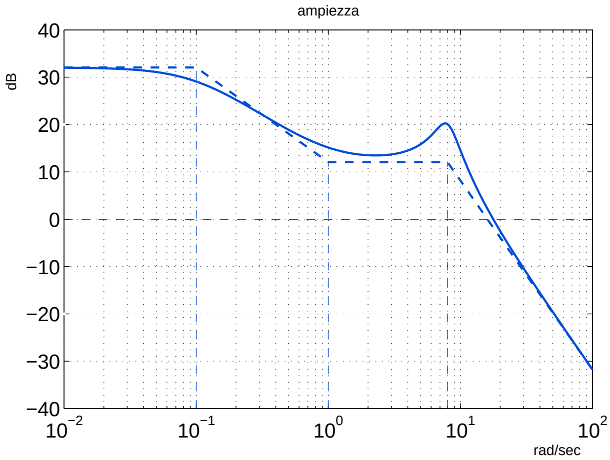
1. A partire dalla risposta al gradino mostrata in figura è possibile stimare la posizione dei poli dominanti del sistema?
   - ◯ no;
   - ◯ sì, $p \approx -3 \pm j10$;
   - ◯ sì, $p \approx -1 \pm j5$;
   - ◯ sì, $p \approx -6 \pm j20$;



2. Se al sistema $\dot{y}(t) + 4\,y(t) = 4u(t)$ si applica l' ingresso $u(t) = \sin(4t)$, a regime l'uscita sarà:
   - ◯ $y(t) = \frac{1}{\sqrt{2}} \sin(4t + 45^o)$
   - ◯ $y(t) = \frac{1}{\sqrt{2}} \sin(4t - 45^o)$
   - ◯ $y(t) = \frac{4}{\sqrt{2}} \sin(4t + 45^o)$
   - ◯ $y(t) = \frac{4}{\sqrt{2}} \sin(4t - 45^o)$

3. Sia $\mathcal{L}[f(t)] = F(s)$ la trasformata di Laplace della funzione $f(t)$. Vale la relazione:
   - ◯ $\mathcal{L}\left[\frac{df}{dt}\right] = \frac{1}{s}F(s) - f(0^-)$
   - ◯ $\mathcal{L}\left[\frac{df}{dt}\right] = sF(s)$
   - ◯ $\mathcal{L}\left[\frac{df}{dt}\right] = sF(s) - f(0^-)$
   - ◯ $\mathcal{L}\left[\frac{df}{dt}\right] = \frac{1}{s}F(s)$

4. Il diagramma di Bode delle ampiezze di figura corrisponde alla funzione di trasferimento (supposta a fase minima):
   - ◯ $G(s) = \dfrac{256(s+1)}{(s+0.1)(s^2+3.2s+64)}$
   - ◯ $G(s) = \dfrac{256(s+0.1)}{(s+1)(s^2+3.2s+64)}$
   - ◯ $G(s) = \dfrac{45(s+0.1)}{(s+1)(s^2+3.2s+64)}$
   - ◯ $G(s) = \dfrac{45(s+1)}{(s+0.1)(s^2+3.2s+64)}$



5. Il valore iniziale della risposta al gradino unitario del sistema $G(s) = \dfrac{3s^3+s^2+12}{4s^3+5s^2+s+1}$ è pari a:
   - ◯ 3/4;
   - ◯ 12;
   - ◯ ∞;
   - ◯ 0.

6. Dato il sistema $G(s) = \dfrac{(s+3)^2}{s^2(s^2+4s+25)}$ posto in retroazione unitaria negativa (che si suppone stabile) risulta

   - ◯ errore a regime nullo per ingresso a gradino
   - ◯ errore a regime limitato ma non nullo per ingresso a rampa
   - ◯ errore a regime nullo per ingresso a rampa
   - ◯ errore a regime nullo per ingresso a parabola

7. Il diagramma di Bode delle ampiezze del sistema $G(s) = \dfrac{(s+z_1)(s-z_2)}{s(s+p_1)(s+p_2)}$ con $0 < z_1 < z_2 < p_1 < p_2$, per $\omega \to \infty$ presenta:

   - ◯ pendenza di -20 db/decade
   - ◯ pendenza di -40 db/decade
   - ◯ pendenza di -60 db/decade
   - ◯ pendenza di -80 db/decade

8. Si consideri un'equazione caratteristica nella quale compaiono solamente le potenze pari di s. Utilizzando il criterio di Routh è possibile affermare che l'equazione caratteristica:

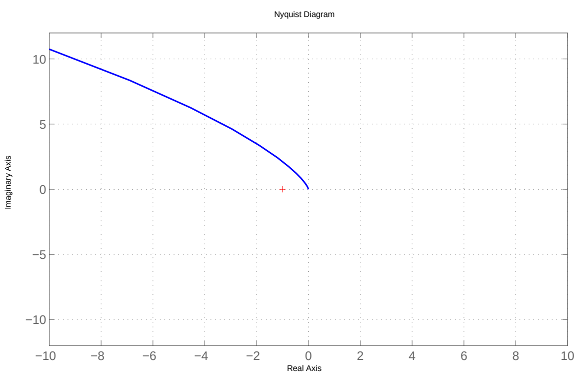
   - ◯ ha soluzioni simmetriche rispetto all'origine
   - ◯ ha lo stesso numero di radici a parte reale strettamente positiva e strettamente negativa
   - ◯ ha un polo nell'origine
   - ◯ ha tutti le radici a parte reale positiva

9. Il margine di fase del sistema $G(s) = \dfrac{1}{s^2}$:

   - ◯ vale 0
   - ◯ vale $\pi/2$
   - ◯ vale π
   - ◯ non è definibile

10. Il sistema $G(s) = \dfrac{1}{s^2(1+\tau s)}$, $\tau > 0$, di cui in figura è riportato il diagramma di Nyquist per valori positivi delle ω, posto in retroazione negativa con un guadagno k:

    - ◯ sarà stabile $\forall k$
    - ◯ sarà stabile $\forall k > 0$
    - ◯ sarà stabile $\forall k < 0$
    - ◯ sarà sempre instabile



Fondamenti di Controlli Automatici - A.A. 2011/12

20 settembre 2012 - Esercizi

Cognome Nome:	
Matricola:	
Corso di Laurea:	

a) Calcolare la trasformata di Laplace $X(s)$ dei seguenti segnali temporali $x_i(t)$:

$$x_1(t) = \frac{\delta(t)}{2} + \sin(t/2)\, e^{-t}, \qquad x_2(t) = 10 + 2t^2\, e^{-5t} + \cos\big(3(t + \tfrac{\pi}{2})\big)$$

b) Calcolare la risposta impulsiva $g_i(t)$ delle seguenti funzioni di trasferimento $G_i(s)$:

$$G_1(s) = \frac{9s^2 + 8s + 50}{s^3 + 2s^2 + 10s}, \qquad G_2(s) = \frac{2s^2 + 19s + 26}{(s+4)^2\,(s-2)}$$

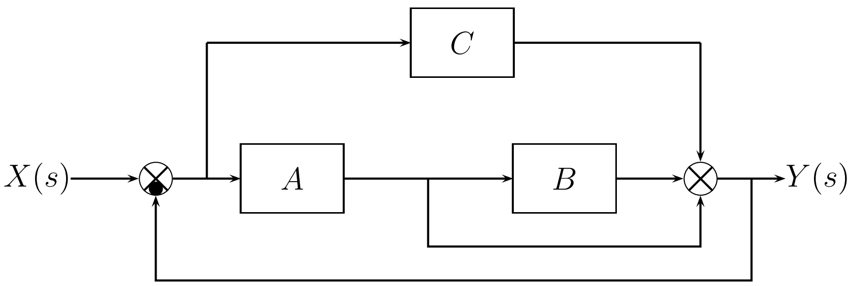
c) Data la funzione di trasferimento $G(s) = \dfrac{(1 + 0.2\,s)(s+5)^2}{10(s^2 + 6\,s + 34)(s+10)(1 + 10\,s)}$

c.1) Disegnare l'andamento qualitativo della risposta $y(t)$ a un gradino in ingresso di ampiezza 4, $x(t) = 4$.

c.2) Calcolare il valore a regime y_∞ dell'uscita $y(t)$ del sistema.

c.3) Stimare qualitativamente il tempo di assestamento T_a del sistema e il periodo T_ω dell'eventuale oscillazione smorzata.

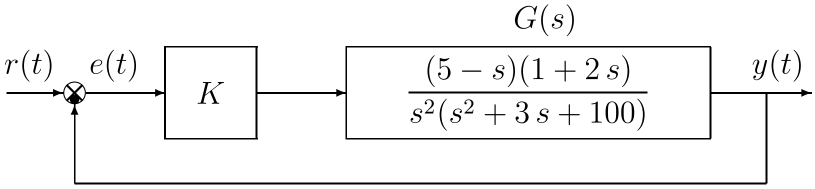
d) Dato il seguente schema a blocchi:



utilizzando la formula di Mason calcolare la funzione di trasferimento $G(s)$ che lega l'ingresso $X(s)$ all'uscita $Y(s)$:

$$G(s) = \frac{Y(s)}{X(s)} =$$

e) Sia dato il seguente sistema retroazionato:



e.1) Determinare per quali valori del parametro K il sistema retroazionato è asintoticamente stabile.

e.2) Disegnare qualitativamente il diagramma di Nyquist completo della funzione $G(s)$. Calcolare esattamente la posizione di eventuali asintoti e, se esistono, le intersezioni con l'asse reale.

e.3) Calcolare, in funzione di K, l'errore a regime $e_\infty(t)$ per ingresso a parabola $r(t) = 2\,t^2$.

e.4) Posto $K = 1$, tracciare (nello schema fornito in allegato) i diagrammi di Bode asintotici delle ampiezze e della fasi del guadagno di anello $K\,G(s)$. Indicare sui diagrammi il margine di ampiezza e il margine di fase. Infine, fornire una stima della larghezza di banda del sistema retroazionato.

f) **Non è richiesto lo svolgimento di questo esercizio agli iscritti ad Ingegneria Ambientale.**

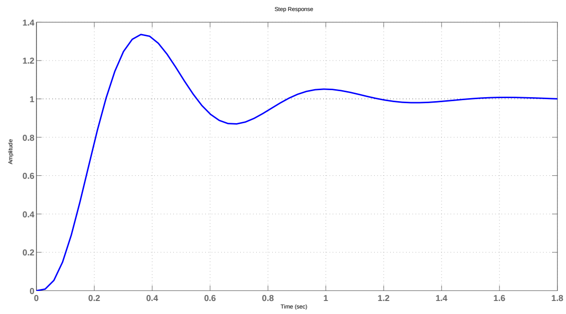
Con riferimento al sistema descritto nell'esercizio e), tracciare qualitativamente il luogo delle radici del sistema retroazionato per valori negativi del parametro K. Determinare esattamente gli asintoti, le intersezioni $\omega^\star$ con l'asse immaginario e i corrispondenti valori $K^\star$ del guadagno.

Fondamenti di Controlli Automatici - A.A. 2011/12
20 settembre 2012 - Domande Teoriche

Cognome Nome:	
Matricola:	
Corso di Laurea:	

Per ciascuno dei test a soluzione multipla segnare con una crocetta tutte le affermazioni che si ritengono giuste. In ogni quiz almeno una affermazione è corretta.

1. A partire dalla risposta al gradino mostrata in figura è possibile stimare la posizione dei poli dominanti del sistema?



○ no;
⊗ sì, $p \approx -3 \pm j10$;
○ sì, $p \approx -1 \pm j5$;
○ sì, $p \approx -6 \pm j20$;

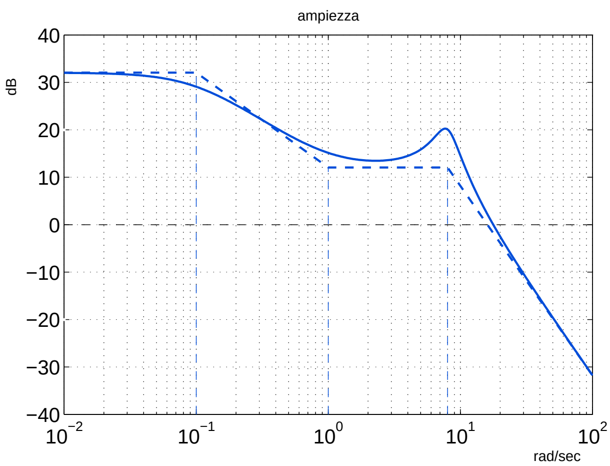
2. Se al sistema $\dot{y}(t) + 4\,y(t) = 4u(t)$ si applica l' ingresso $u(t) = \sin(4t)$, a regime l'uscita sarà:

○ $y(t) = \frac{1}{\sqrt{2}}\sin(4t + 45^o)$
⊗ $y(t) = \frac{1}{\sqrt{2}}\sin(4t - 45^o)$
○ $y(t) = \frac{4}{\sqrt{2}}\sin(4t + 45^o)$
○ $y(t) = \frac{4}{\sqrt{2}}\sin(4t - 45^o)$

3. Sia $\mathcal{L}[f(t)] = F(s)$ la trasformata di Laplace della funzione $f(t)$. Vale la relazione:

○ $\mathcal{L}\left[\frac{df}{dt}\right] = \frac{1}{s}F(s) - f(0^-)$
○ $\mathcal{L}\left[\frac{df}{dt}\right] = sF(s)$
⊗ $\mathcal{L}\left[\frac{df}{dt}\right] = sF(s) - f(0^-)$
○ $\mathcal{L}\left[\frac{df}{dt}\right] = \frac{1}{s}F(s)$

4. Il diagramma di Bode delle ampiezze di figura corrisponde alla funzione di trasferimento (supposta a fase minima):



⊗ $G(s) = \dfrac{256(s+1)}{(s+0.1)(s^2+3.2s+64)}$
○ $G(s) = \dfrac{256(s+0.1)}{(s+1)(s^2+3.2s+64)}$
○ $G(s) = \dfrac{45(s+0.1)}{(s+1)(s^2+3.2s+64)}$
○ $G(s) = \dfrac{45(s+1)}{(s+0.1)(s^2+3.2s+64)}$

5. Il valore iniziale della risposta al gradino unitario del sistema $G(s) = \dfrac{3s^3+s^2+12}{4s^3+5s^2+s+1}$ è pari a:

⊗ 3/4;
○ 12;
○ ∞;
○ 0.

6. Dato il sistema $G(s) = \dfrac{(s+3)^2}{s^2(s^2+4s+25)}$ posto in retroazione unitaria negativa (che si suppone stabile) risulta

   - ⊗ errore a regime nullo per ingresso a gradino
   - ○ errore a regime limitato ma non nullo per ingresso a rampa
   - ⊗ errore a regime nullo per ingresso a rampa
   - ○ errore a regime nullo per ingresso a parabola

7. Il diagramma di Bode delle ampiezze del sistema $G(s) = \dfrac{(s+z_1)(s-z_2)}{s(s+p_1)(s+p_2)}$ con $0 < z_1 < z_2 < p_1 < p_2$, per $\omega \to \infty$ presenta:

   - ⊗ pendenza di -20 db/decade
   - ○ pendenza di -40 db/decade
   - ○ pendenza di -60 db/decade
   - ○ pendenza di -80 db/decade

8. Si consideri un'equazione caratteristica nella quale compaiono solamente le potenze pari di s. Utilizzando il criterio di Routh è possibile affermare che l'equazione caratteristica:

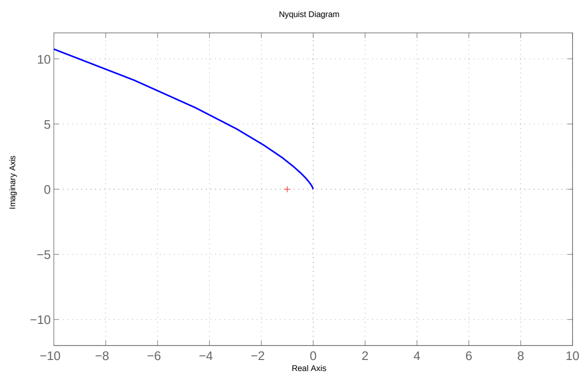
   - ⊗ ha soluzioni simmetriche rispetto all'origine
   - ⊗ ha lo stesso numero di radici a parte reale strettamente positiva e strettamente negativa
   - ○ ha un polo nell'origine
   - ○ ha tutti le radici a parte reale positiva

9. Il margine di fase del sistema $G(s) = \dfrac{1}{s^2}$:

   - ⊗ vale 0
   - ○ vale $\pi/2$
   - ○ vale π
   - ○ non è definibile

10. Il sistema $G(s) = \dfrac{1}{s^2(1+\tau s)}$, $\tau > 0$, di cui in figura è riportato il diagramma di Nyquist per valori positivi delle ω, posto in retroazione negativa con un guadagno k:

   - ○ sarà stabile $\forall k$
   - ○ sarà stabile $\forall k > 0$
   - ○ sarà stabile $\forall k < 0$
   - ⊗ sarà sempre instabile



Fondamenti di Controlli Automatici - A.A. 2011/12

20 settembre 2012 - Esercizi

Cognome Nome:	
Matricola:	
Corso di Laurea:	

a) Calcolare la trasformata di Laplace $X(s)$ dei seguenti segnali temporali $x_i(t)$:

$$x_1(t) = \frac{\delta(t)}{2} + \sin(t/2)\, e^{-t}, \qquad x_2(t) = 10 + 2t^2\, e^{-5t} + \cos\big(3(t + \tfrac{\pi}{2})\big)$$

Soluzione:

$$X_1(s) = \frac{1}{2} + \frac{\frac{1}{2}}{\left[(s+1)^2 + \frac{1}{2^2}\right]}, \qquad X_2(s) = \frac{10}{s} + \frac{4}{(s+5)^3} + \frac{s}{s^2+3^2} e^{\frac{\pi}{2}s}$$

b) Calcolare la risposta impulsiva $g_i(t)$ delle seguenti funzioni di trasferimento $G_i(s)$:

$$G_1(s) = \frac{9s^2 + 8s + 50}{s^3 + 2s^2 + 10s}, \qquad G_2(s) = \frac{2s^2 + 19s + 26}{(s+4)^2\,(s-2)}$$

Soluzione:
La funzione $G_1(s)$ può essere scomposta in fratti semplici nel seguente modo

$$G_1(s) = \frac{5}{s} + \frac{2+j}{s+1-3j} + \frac{2-j}{s+1+3j}$$

di conseguenza la risposta impulsiva (ovvero l'anti-trasformata di Laplace) risulta

$$g_1(t) = 5 + 2\sqrt{5}e^{-t}\cos(3t + 0.4636\text{rad}) = 5 + 2\sqrt{5}e^{-t}\cos(3t + 26.56°)$$

La funzione $G_2(s)$ può essere riscritta come

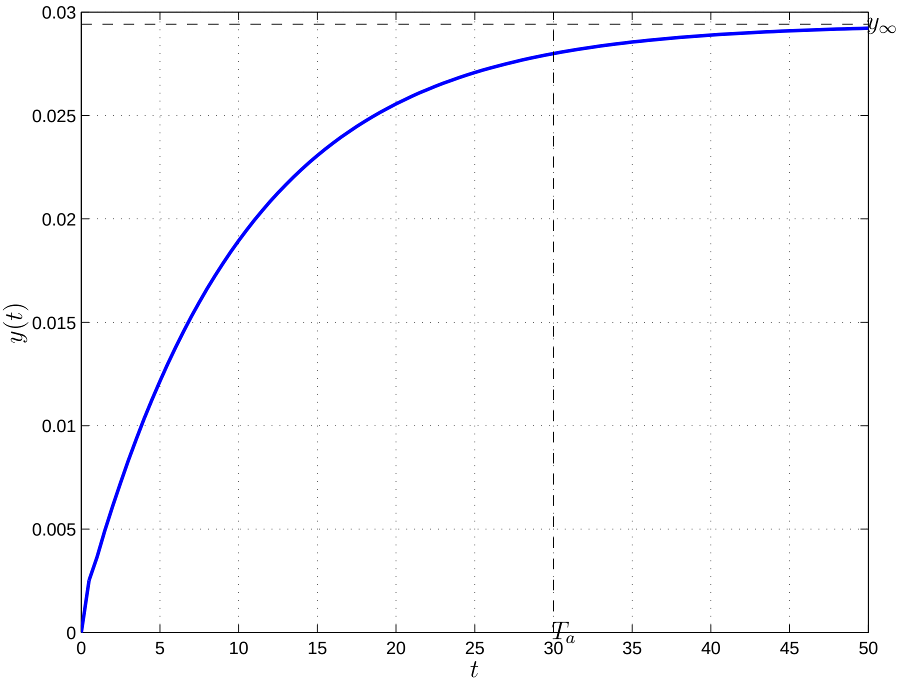
$$G_2(s) = \frac{3}{(s+4)^2} + \frac{2}{(s-2)}$$

di conseguenza la sua risposta impulsiva risulta

$$g_1(t) = 3t\, e^{-4t} + 2\, e^{2t}$$

c) Data la funzione di trasferimento $G(s) = \dfrac{(1+0.2\,s)(s+5)^2}{10(s^2+6\,s+34)(s+10)(1+10\,s)}$

c.1) Disegnare l'andamento qualitativo della risposta $y(t)$ a un gradino in ingresso di ampiezza 4, $x(t) = 4$.
Soluzione: Il sistema ha un polo dominante reale $p = -0.1$ pertanto la risposta al gradino sarà di tipo aperiodico. In figura è riportata la risposta del sistema.



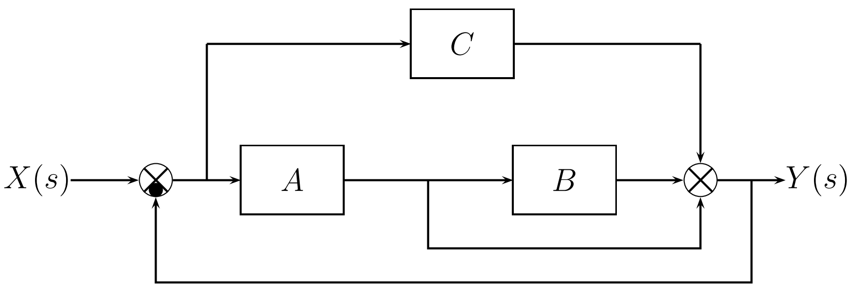
c.2) Calcolare il valore a regime y_∞ dell'uscita $y(t)$ del sistema.
Soluzione: La risposta a regime al gradino di ampiezza $A = 4$ risulta

$$y_\infty = A\,G(0) = 4 \cdot 0.0074 = 0.0296.$$

c.3) Stimare qualitativamente il tempo di assestamento T_a del sistema e il periodo T_ω dell'eventuale oscillazione smorzata.
Soluzione: Il sistema ha un polo dominante reale con costante di tempo $\tau = 10$ per cui la risposta sarà aperiodica e con un tempo di assestamento

$$T_a = 3\tau = 30 \text{ s.}$$

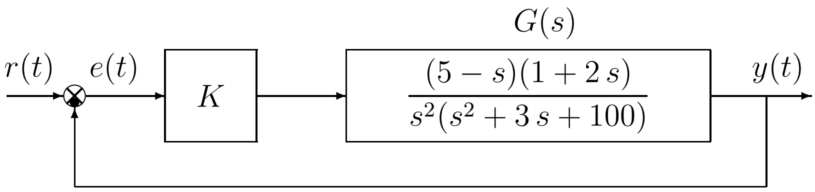
d) Dato il seguente schema a blocchi:



utilizzando la formula di Mason calcolare la funzione di trasferimento $G(s)$ che lega l'ingresso $X(s)$ all'uscita $Y(s)$:

$$G(s) = \frac{Y(s)}{X(s)} = \frac{A + AB + C}{1 + AB + A + C}$$

e) Sia dato il seguente sistema retroazionato:



e.1) Determinare per quali valori del parametro K il sistema retroazionato è asintoticamente stabile.
Soluzione: L'equazione caratteristica del sistema retroazionato è:

$$1+\frac{K(5-s)(1+2\,s)}{s^2(s^2+3\,s+100)}=0 \qquad \rightarrow \qquad s^4+3\,s^3+(100-2\,K)s^2+9Ks+5K=0.$$

La tabella di Routh ha la seguente struttura:

$$\begin{array}{c|ccc} 4 & 1 & 100-2\,K & 5K \\ 3 & 3 & 9K & \\ 2 & -15K+300 & 15K & \\ 1 & 9K(-15K+300)-45K & & \\ 0 & 15K & & \end{array}$$

Dalla riga 2 e dalla riga 0 si ricavano i seguenti vincoli:

$$K<\frac{300}{15}=20, \qquad\qquad K>0.$$

Dalla riga 1 si ottiene la seguente disequazione:

$$-135K+2655>0 \qquad \rightarrow \qquad K<\frac{2655}{135}=19.67=K^*.$$

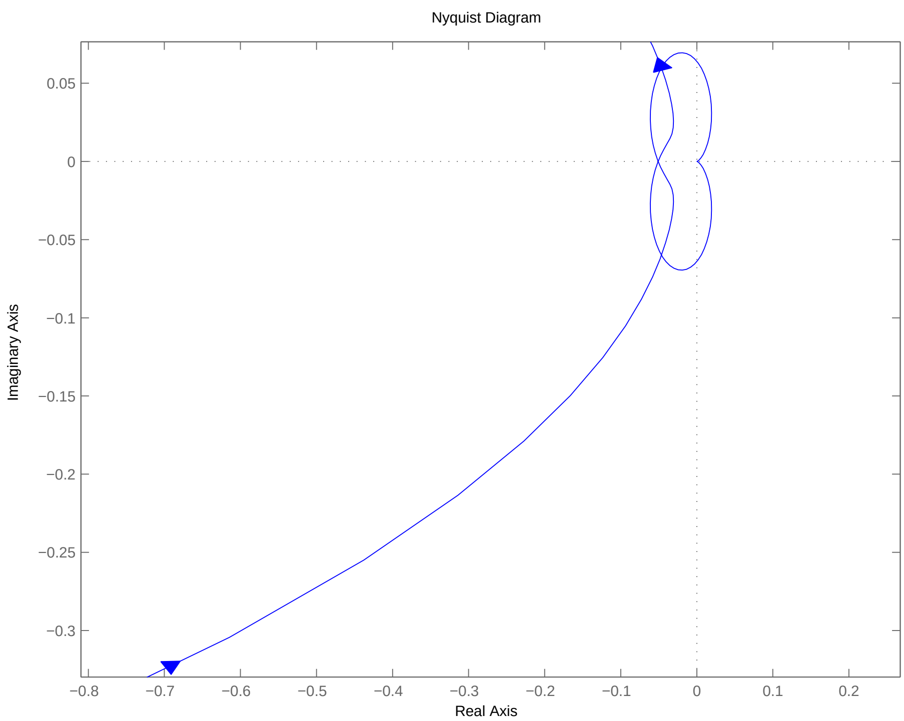
Quindi il sistema retroazionato è asintoticamente stabile per:

$$0<K<K^*=19.67.$$

La pulsazione ω^* corrispondente al valore limite K^* è:

$$\omega^*=\sqrt{3K^*}=\sqrt{59}=7.6811.$$

e.2) Disegnare qualitativamente il diagramma di Nyquist completo della funzione $G(s)$. Calcolare esattamente la posizione di eventuali asintoti e, se esistono, le intersezioni con l'asse reale.
Soluzione: Il diagramma di Nyquist qualitativo della funzione $G(s)$ è riportato in figura.



Le funzioni approssimanti $G_0(s)$ e $G_\infty(s)$ per $\omega \to 0$ ed $\omega \to \infty$ sono le seguenti:

$$G_0(s) = \frac{1}{20\,s^2}, \qquad\qquad G_\infty(s) = -\frac{2}{s^2}.$$

Le corrispondenti fasi φ_0 e φ_∞ hanno il seguente valore:

$$\varphi_0 = -\pi, \qquad\qquad \varphi_\infty = -2\,\pi.$$

Il diagramma parte all'infinito con fase iniziale $\varphi_0 = -\pi$ e giunge nell'origine con fase finale $\varphi_\infty = -2\,\pi$.
Il parametro Δ_τ vale

$$\Delta_\tau = -\frac{1}{5} + 2 - \frac{3}{100} = 1.77 > 0$$

pertanto il diagramma parte in anticipo rispetto alla fase iniziale φ_0.
Il parametro Δ_p vale

$$\Delta_p = 5 - \frac{1}{2} + 3 = 7.5 > 0$$

pertanto il diagramma arriva in anticipo rispetto alla fase finale φ_∞. Lo sfasamento complessivo è $\Delta\varphi = -\pi$.
Essendo il sistema di tipo 2, il diagramma di Nyquist non presenta asintoti verticali. Dal diagramma risulta inoltre esistere un'intersezione con l'asse reale negativo, che in virtù dell'analisi svolta con Routh al primo punto risulta essere pari a

$$\sigma^\star = -1/K^\star = -1/19.67 = -0.05$$

e.3) Calcolare, in funzione di K, l'errore a regime $e_\infty(t)$ per ingresso a parabola $r(t) = 2\,t^2$.
Il sistema $G(s)$ è tipo 2 per cui segnale di ingresso $r(t) = 2t^2 = R_0\frac{t^2}{2}$ può essere inseguito solo con errore a regime non nullo:

$$e_\infty(t) = \frac{R_0}{K_a} = \frac{4}{\frac{5\,K}{100}} = \frac{80}{K}.$$

e.4) Posto $K = 1$, tracciare (nello schema fornito in allegato) i diagrammi di Bode asintotici delle ampiezze e della fasi del guadagno di anello $K\,G(s)$. Indicare sui diagrammi il margine di ampiezza e il margine di fase. Infine, fornire una stima della larghezza di banda del sistema retroazionato.
<u>Soluzione</u>:

I diagrammi di Bode delle ampiezze e delle fasi della funzione $G(s)$ sono mostrati in Fig. 1.

Sul diagramma asintotico delle ampiezze, il guadagno β in corrispondenza della pulsazione $\omega = 0.5$ e il guadagno γ in corrispondenza della pulsazione $\omega = 10$ sono:

$$\beta = \frac{1}{5} \simeq -14\text{dB}, \qquad\qquad \gamma = \frac{1}{50} \simeq -34\text{dB}.$$

Il coefficiente di smorzamento della coppia di poli complessi coniugati è $\delta = 0.15$ da cui si ricava $M_{\omega_m} = \frac{1}{2\delta} = 3.33 \simeq 10.46$dB.
Il margine di ampiezza risulta : $M_a = 19.72(= 25.9dB)$ per $\omega = 7.68$ rad/s, e il margine di fase: $M_f = 22.1^o$ per $\omega = 0.235$ rad/s. La banda del sistema retroazionato può essere stimata sulla base della pulsazione di incrocio del sistema in catena aperta e sarà quindi [0, 0.21] rad/s.

f) **Non è richiesto lo svolgimento di questo esercizio agli iscritti ad Ingegneria Ambientale.**

Con riferimento al sistema descritto nell'esercizio e), tracciare qualitativamente il luogo delle radici del sistema retroazionato per valori <u>negativi</u> del parametro K. Determinare esattamente gli asintoti, le intersezioni $\omega^\star$ con l'asse immaginario e i corrispondenti valori $K^\star$ del guadagno.

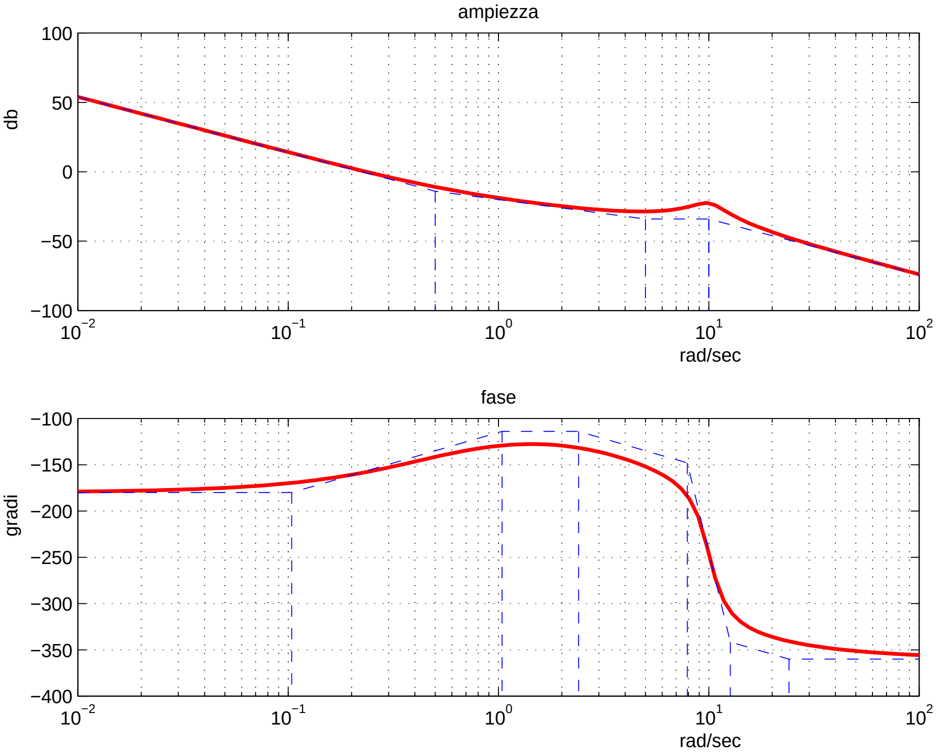


Figura 1: Diagrammi di Bode della funzione $G(s)$.

Soluzione: Il guadagno della $G(s)$ nella forma poli-zeri è negativo, pertanto il guadagno $K_2 = -2\,K$ quando $K < 0$ sarà positivo. Pertanto il luogo delle radici verrà tracciato per $K_2 > 0$. Gli asintoti sono 2, essendo 2 il grado relativo, e il centro degli asintoti è il punto di ascissa

$$\sigma_a = \frac{1}{2}(-3 - 5 + 0.5) = -3.75$$

Il luogo delle radici finale per valori positivi di K_2 è riportato nella seguente figura. Dall'analisi svolta mediante il criterio di Routh, risulta che il sistema per $K < 0$ è instabile, come si può osservare nel luogo delle radici in cui un ramo uscente da uno dei due poli nell'origine passa subito al semipiano destro.

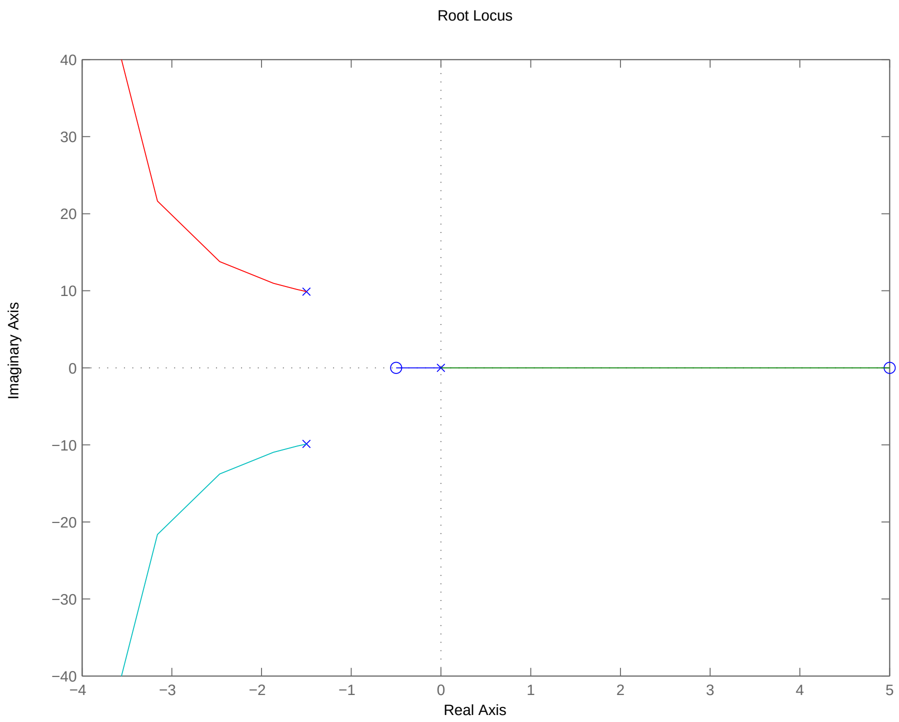


Figura 2: Luogo delle radici

Diagrammi di Bode

Cognome Nome:	
Matricola:	
Corso di Laurea:	

Bode Plot