

**Fondamenti di Controlli Automatici -  
A.A. 2011/12  
13 febbraio 2013 - Domande Teoriche**

Nome:	
Nr. Mat.	
Firma:	

Per ciascuno dei test a soluzione multipla segnare con una crocetta tutte le affermazioni che si ritengono giuste. In ogni quiz almeno una affermazione è corretta.

1. La massima sovraelongazione percentuale  $S$  del sistema  $G(s) = \frac{1}{s^2 + 4s + 4}$  in risposta ad un ingresso a gradino è:
  - $S = 0\%$
  - $S = 20\%$
  - $S = 50\%$
  - $S = 100\%$
2. Condizione sufficiente affinché un sistema lineare sia instabile è che abbia tutti i poli:
  - a parte reale negativa
  - a parte reale negativa tranne uno a parte reale nulla con molteplicità maggiore di uno
  - a parte reale negativa tranne uno a parte reale nulla con molteplicità unitaria
3. Se la funzione d'anello  $L(s)$  di un sistema retroazionato presenta un polo doppio nell'origine:
  - l'errore a regime per ingresso a gradino è nullo
  - l'errore a regime per ingresso a rampa è nullo
  - l'errore a regime per ingresso a rampa è diverso da zero e costante
  - l'errore a regime per ingresso a parabola è infinito
4. La funzione di trasferimento  $G(s) = \frac{Y(s)}{X(s)}$  corrispondente all'equazione differenziale  $6\ddot{y}(t) + y(t) = 3\dot{x}(t) + 4x(t)$  è:
  - $G(s) = \frac{3s + 4}{6s^2 + s}$
  - $G(s) = \frac{3s + 4}{6s + 1}$
  - $G(s) = \frac{3s + 4}{6s^2 + 1}$
  - $G(s) = \frac{6s^2 + 1}{3s + 4}$
5. In un sistema del secondo ordine a poli complessi coniugati, il coefficiente di smorzamento  $\delta$  rimane costante al variare della posizione dei poli:
  - su di un'ellisse con fuoco nell'origine
  - su di una circonferenza con centro nell'origine
  - su due semirette uscenti dall'origine
  - su di una retta parallela all'asse immaginario

6. Un sistema  $G(s)$  a fase minima di tipo 1 e con grado relativo 3 presenta nel diagramma di Bode asintotico delle ampiezze:
- una pendenza di 0 dB/decade per  $\omega \rightarrow 0$
  - una pendenza di  $-20$  dB/decade per  $\omega \rightarrow 0$
  - una pendenza di  $-40$  dB/decade per  $\omega \rightarrow \infty$
  - una pendenza di  $-60$  dB/decade per  $\omega \rightarrow \infty$
7. Il sistema  $G(s) = \frac{(s + z_1)(s + z_2)}{s(s + p_1)(s + p_2)}$  con  $0 < z_1 < z_2 < p_1 < p_2$  presenta:
- margine di fase negativo
  - margine di fase maggiore o uguale a  $\pi/2$
  - margine di ampiezza nullo
  - margine di ampiezza infinito
8. Sia  $y(t) = M(\omega) \cos(\omega t + \alpha(\omega) + \varphi_0)$  la risposta asintotica di un sistema lineare stabile all'ingresso  $x(t) = N \cos(\omega t + \varphi_0)$ . Utilizzando i simboli che caratterizzano i segnali  $x(t)$  e  $y(t)$  la "definizione" di funzione di risposta armonica  $F(\omega)$  è:
- $F(\omega) = \frac{N}{M(\omega)} e^{j\alpha(\omega)}$
  - $F(\omega) = \frac{M(\omega)}{N} e^{-j\alpha(\omega)}$
  - $F(\omega) = M(\omega) N e^{j\alpha(\omega)}$
  - $F(\omega) = \frac{M(\omega)}{N} e^{j\alpha(\omega)}$
9. Il valore iniziale della risposta all'impulso del sistema  $G(s) = \frac{s+4}{s^2+16s}$  è pari a:
- 0
  - $\infty$
  - $1/4$
  - 1
10. Il diagramma di Nyquist della funzione di trasferimento  $G(s) = \frac{s+1}{s^2(s+3)}$ :
- ha un asintoto verticale
  - ha un asintoto orizzontale
  - per  $\omega \rightarrow 0^+$  ha una fase iniziale  $\varphi_0 \in ]0, \pi[$
  - per  $\omega \rightarrow 0^+$  ha una fase iniziale  $\varphi_0 \in ]\pi, 2\pi[$

Nome:	
Nr. Mat.	
Firma:	

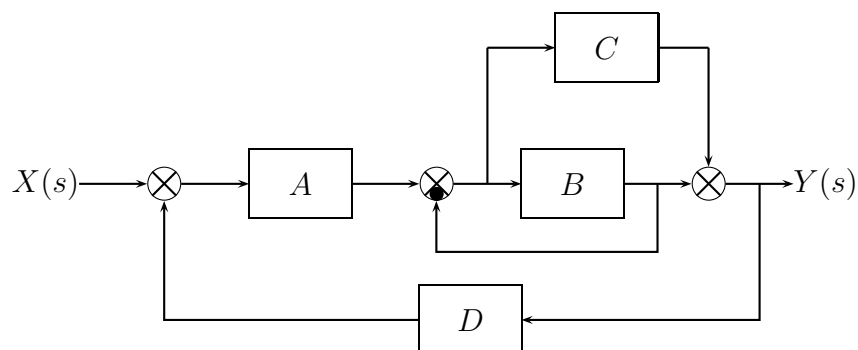
a) Determinare la trasformata di Laplace  $X_i(s)$  dei seguenti segnali temporali  $x_i(t)$ :

$$x_1(t) = (\cos(t) - \sin(3t)) e^{-t}, \quad x_2(t) = t^2 e^{-2t+1} - 5$$

b) Calcolare la risposta impulsiva  $g_i(t)$  delle seguenti funzioni di trasferimento  $G_i(s)$ :

$$G_1(s) = \frac{2s^2 + 5s + 10}{s^2 + 3s - 10}, \quad G_2(s) = \frac{-2s^3 - 8s^2 + 4s + 18}{(s + 1)^2 (s + 5) (s + 2)}$$

c) Dato il seguente schema a blocchi:



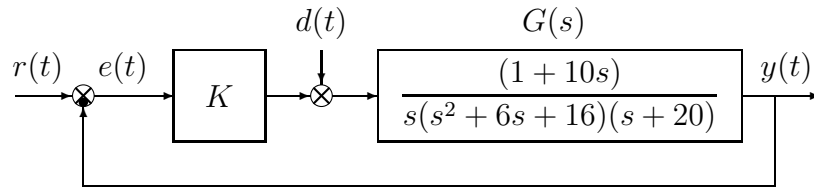
utilizzando la formula di Mason calcolare la funzione di trasferimento  $G(s)$  che lega l'ingresso  $X(s)$  all'uscita  $Y(s)$ :

$$G(s) = \frac{Y(s)}{X(s)} =$$

d) Data la funzione di trasferimento  $G(s) = \frac{(s + 1)(1 + 0.1s)}{(s^2 + 4s + 20)(1 + 0.05s)(1 + 0.01s)}$

- d.1) Disegnare l'andamento qualitativo della risposta  $y(t)$  a un gradino in ingresso di ampiezza 20,  $x(t) = 20$ .
- d.2) Calcolare il valore a regime  $y_\infty$  dell'uscita  $y(t)$  del sistema.
- d.3) Stimare qualitativamente il tempo di assestamento  $T_a$  del sistema e il periodo  $T_w$  dell'eventuale oscillazione smorzata.

e) Sia dato il seguente sistema retroazionato:



- e.1) Determinare per quali valori del parametro  $K$  il sistema retroazionato è asintoticamente stabile.
- e.2) Disegnare qualitativamente il diagramma di Nyquist completo della funzione  $G(s)$ . Calcolare esattamente la posizione di eventuali asintoti e, se esistono, le intersezioni con l'asse reale.
- e.3) Posto  $K = 100$ , calcolare l'errore a regime  $e(\infty)$  quando sul sistema retroazionato siano applicati contemporaneamente  $r(t) = 4$  e  $d(t) = \sin(t)$ .
- e.4) Considerando nuovamente  $K = 100$ , tracciare (nello schema fornito in allegato) i diagrammi di Bode asintotici delle ampiezze e della fasi del guadagno di anello  $K G(s)$ . Indicare sui diagrammi il margine di ampiezza e il margine di fase. Infine, fornire una stima della larghezza di banda del sistema retroazionato.
- f) **Non è richiesto lo svolgimento di questo esercizio agli iscritti ad Ingegneria Ambientale.**

Con riferimento al sistema descritto nell'esercizio e), tracciare qualitativamente il luogo delle radici del sistema retroazionato per valori positivi del parametro  $K$ . Determinare esattamente gli asintoti, le intersezioni  $\omega^*$  con l'asse immaginario e i corrispondenti valori  $K^*$  del guadagno.

**Fondamenti di Controlli Automatici -  
A.A. 2011/12  
13 febbraio 2013 - Domande Teoriche**

Nome:	
Nr. Mat.	
Firma:	

Per ciascuno dei test a soluzione multipla segnare con una crocetta tutte le affermazioni che si ritengono giuste. In ogni quiz almeno una affermazione è corretta.

1. La massima sovraelongazione percentuale  $S$  del sistema  $G(s) = \frac{1}{s^2 + 4s + 4}$  in risposta ad un ingresso a gradino è:
  - $S = 0\%$
  - $S = 20\%$
  - $S = 50\%$
  - $S = 100\%$
2. Condizione sufficiente affinché un sistema lineare sia instabile è che abbia tutti i poli:
  - a parte reale negativa
  - a parte reale negativa tranne uno a parte reale nulla con molteplicità maggiore di uno
  - a parte reale negativa tranne uno a parte reale nulla con molteplicità unitaria
3. Se la funzione d'anello  $L(s)$  di un sistema retroazionato presenta un polo doppio nell'origine:
  - l'errore a regime per ingresso a gradino è nullo
  - l'errore a regime per ingresso a rampa è nullo
  - l'errore a regime per ingresso a rampa è diverso da zero e costante
  - l'errore a regime per ingresso a parabola è infinito
4. La funzione di trasferimento  $G(s) = \frac{Y(s)}{X(s)}$  corrispondente all'equazione differenziale  $6\ddot{y}(t) + y(t) = 3\dot{x}(t) + 4x(t)$  è:
  - $G(s) = \frac{3s + 4}{6s^2 + s}$
  - $G(s) = \frac{3s + 4}{6s + 1}$
  - $G(s) = \frac{3s + 4}{6s^2 + 1}$
  - $G(s) = \frac{6s^2 + 1}{3s + 4}$
5. In un sistema del secondo ordine a poli complessi coniugati, il coefficiente di smorzamento  $\delta$  rimane costante al variare della posizione dei poli:
  - su di un'ellisse con fuoco nell'origine
  - su di una circonferenza con centro nell'origine
  - su due semirette uscenti dall'origine
  - su di una retta parallela all'asse immaginario

6. Un sistema  $G(s)$  a fase minima di tipo 1 e con grado relativo 3 presenta nel diagramma di Bode asintotico delle ampiezze:
- una pendenza di 0 dB/decade per  $\omega \rightarrow 0$
  - una pendenza di  $-20$  dB/decade per  $\omega \rightarrow 0$
  - una pendenza di  $-40$  dB/decade per  $\omega \rightarrow \infty$
  - una pendenza di  $-60$  dB/decade per  $\omega \rightarrow \infty$
7. Il sistema  $G(s) = \frac{(s + z_1)(s + z_2)}{s(s + p_1)(s + p_2)}$  con  $0 < z_1 < z_2 < p_1 < p_2$  presenta:
- margine di fase negativo
  - margine di fase maggiore o uguale a  $\pi/2$
  - margine di ampiezza nullo
  - margine di ampiezza infinito
8. Sia  $y(t) = M(\omega) \cos(\omega t + \alpha(\omega) + \varphi_0)$  la risposta asintotica di un sistema lineare stabile all'ingresso  $x(t) = N \cos(\omega t + \varphi_0)$ . Utilizzando i simboli che caratterizzano i segnali  $x(t)$  e  $y(t)$  la "definizione" di funzione di risposta armonica  $F(\omega)$  è:
- $F(\omega) = \frac{N}{M(\omega)} e^{j\alpha(\omega)}$
  - $F(\omega) = \frac{M(\omega)}{N} e^{-j\alpha(\omega)}$
  - $F(\omega) = M(\omega) N e^{j\alpha(\omega)}$
  - $F(\omega) = \frac{M(\omega)}{N} e^{j\alpha(\omega)}$
9. Il valore iniziale della risposta all'impulso del sistema  $G(s) = \frac{s+4}{s^2+16s}$  è pari a:
- 0
  - $\infty$
  - $1/4$
  - 1
10. Il diagramma di Nyquist della funzione di trasferimento  $G(s) = \frac{s+1}{s^2(s+3)}$ :
- ha un asintoto verticale
  - ha un asintoto orizzontale
  - per  $\omega \rightarrow 0^+$  ha una fase iniziale  $\varphi_0 \in ]0, \pi[$
  - per  $\omega \rightarrow 0^+$  ha una fase iniziale  $\varphi_0 \in ]\pi, 2\pi[$

Nome:	
Nr. Mat.	
Firma:	

a) Determinare la trasformata di Laplace  $X_i(s)$  dei seguenti segnali temporali  $x_i(t)$ :

$$x_1(t) = (\cos(t) - \sin(3t)) e^{-t}, \quad x_2(t) = t^2 e^{-2t+1} - 5$$

Soluzione:

$$X_1(s) = \frac{s+1}{(s+1)^2+1} - \frac{3}{(s+1)^2+9} \quad X_2(s) = \frac{2e}{(s+2)^3} - \frac{5}{s}$$

b) Calcolare la risposta impulsiva  $g_i(t)$  delle seguenti funzioni di trasferimento  $G_i(s)$ :

$$G_1(s) = \frac{2s^2 + 5s + 10}{s^2 + 3s - 10}, \quad G_2(s) = \frac{-2s^3 - 8s^2 + 4s + 18}{(s+1)^2(s+5)(s+2)}$$

Soluzione:

La funzione  $G_1(s)$  può essere riscritta come

$$G_1(s) = 2 + \frac{4}{s-2} - \frac{5}{s+5}$$

di conseguenza la risposta impulsiva (ovvero l'anti-trasformata di Laplace) risulta

$$g_1(t) = 2\delta(t) + 4e^{2t} - 5e^{-5t}.$$

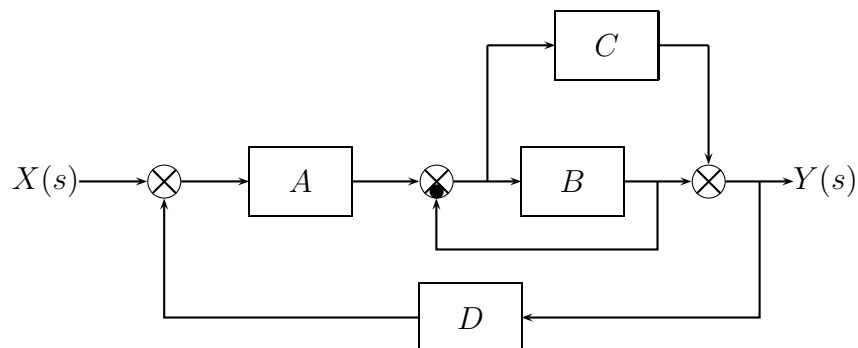
La funzione  $G_2(s)$  può essere riscritta come

$$G_2(s) = \frac{1}{s+1} + \frac{2}{(s+1)^2} - \frac{1}{s+5} - \frac{2}{s+2}$$

di conseguenza la sua risposta impulsiva risulta

$$g_2(t) = e^{-t} + 2te^{-t} - 1e^{-5t} - 2e^{-2t}$$

c) Dato il seguente schema a blocchi:



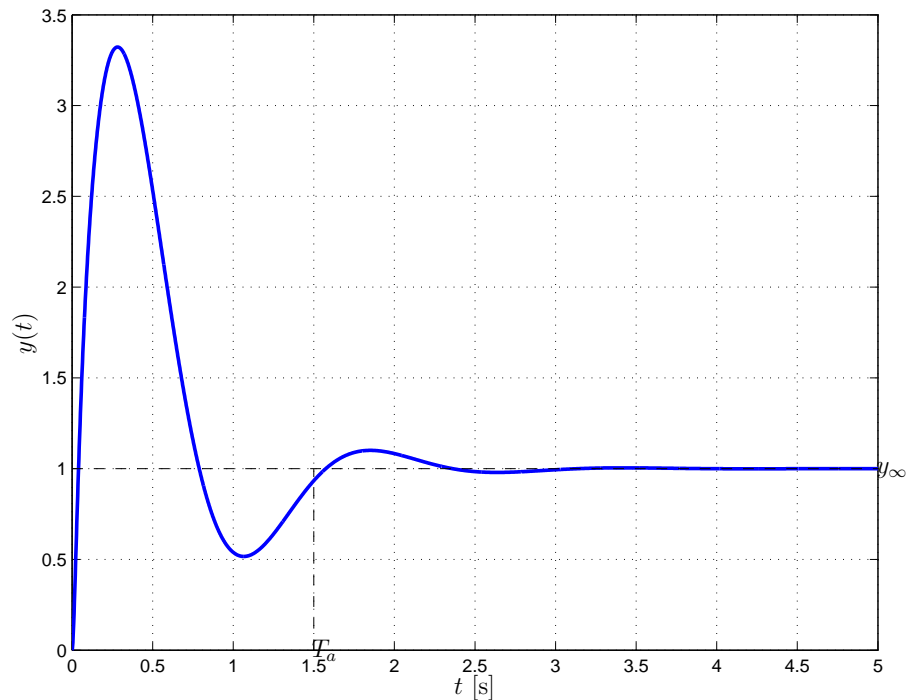
utilizzando la formula di Mason calcolare la funzione di trasferimento  $G(s)$  che lega l'ingresso  $X(s)$  all'uscita  $Y(s)$ :

$$G(s) = \frac{Y(s)}{X(s)} = \frac{AB + AC}{1 + B - ABD - ACD}$$

d) Data la funzione di trasferimento  $G(s) = \frac{(s+1)(1+0.1s)}{(s^2+4s+20)(1+0.05s)(1+0.01s)}$

d.1) Disegnare l'andamento qualitativo della risposta  $y(t)$  a un gradino in ingresso di ampiezza 20,  $x(t) = 20$ .

Soluzione: Il sistema ha una coppia di poli dominanti complessi coniugati  $p_{1,2} = -2 \pm 4j$  pertanto la risposta al gradino sarà di tipo periodico con andamento oscillatorio smorzato. In figura è riportata la risposta del sistema.



d.2) Calcolare il valore a regime  $y_\infty$  dell'uscita  $y(t)$  del sistema.

Soluzione: La risposta a regime al gradino di ampiezza  $A = 20$  risulta

$$y_\infty = A G(0) = 20 \cdot 0.05 = 1.$$

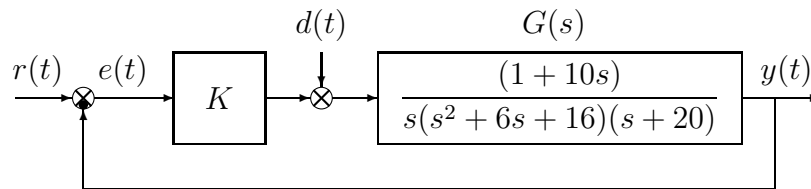
d.3) Stimare qualitativamente il tempo di assestamento  $T_a$  del sistema e il periodo  $T_\omega$  dell'eventuale oscillazione smorzata.

Soluzione: Il sistema ha una coppia di poli dominanti complessi coniugati con parte reale  $\sigma = -2$  e parte immaginaria  $\omega = 4$  per cui il tempo di assestamento  $T_a$  e il periodo dell'oscillazione  $T_\omega$  saranno

$$T_a = \frac{3}{|\sigma|} = 1.5 \text{ s},$$

$$T_\omega = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{\pi}{2} \simeq 1.57 \text{ s}$$

e) Sia dato il seguente sistema retroazionato:



e.1) Determinare per quali valori del parametro  $K$  il sistema retroazionato è asintoticamente stabile.

Soluzione: l'equazione caratteristica del sistema retroazionato è

$$1 + \frac{K(1+10s)}{s(s^2+6s+16)(s+20)} = 0 \quad \rightarrow \quad s^4 + 26s^3 + 136s^2 + (320 + 10K)s + 10K = 0$$

La corrispondente tabella di Routh è la seguente

4	1	136	$K$	
3	26	$320 + 10K$		
2	$3216 - 10K$	$26K$		$\rightarrow K < 321.6$
1	$4(257280 + 7071K - 25K^2)$			$\rightarrow -32.62 < K < 315.46$
0	$26K$			$\rightarrow K > 0$

Il sistema retroazionato è asintoticamente stabile per:

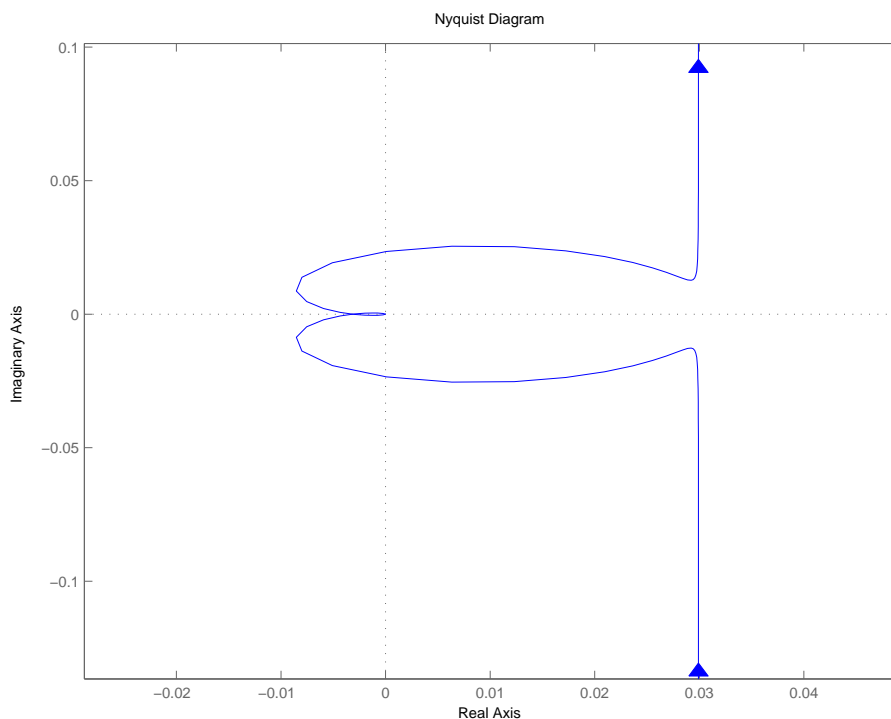
$$0 < K < K^* = 315.46$$

La pulsazione  $\omega^*$  corrispondente al valore limite  $K^*$  è:

$$\omega^* = \sqrt{\frac{320 + 10K^*}{26}} = 11.56$$

e.2) Disegnare qualitativamente il diagramma di Nyquist completo della funzione  $G(s)$ . Calcolare esattamente la posizione di eventuali asintoti e, se esistono, le intersezioni con l'asse reale.

Soluzione: Il digramma di Nyquist della funzione  $G(s)$  è riportato in figura.



La funzione approssimante per  $\omega \rightarrow 0$  è  $G_0(s) = \frac{1}{320s}$  pertanto il diagramma parte all'infinito con fase iniziale  $\varphi_0 = -\frac{\pi}{2}$ . La funzione approssimante per  $\omega \rightarrow \infty$  è  $G_\infty(s) = \frac{10}{s^3}$

e quindi il diagramma giunge nell'origine con fase finale  $\varphi_\infty = -\frac{3}{2}\pi$ . Il parametro  $\Delta_\tau$  vale  $\Delta_\tau = 10 - \left(\frac{1}{20} + \frac{6}{16}\right) = 9.575 > 0$  pertanto il diagramma parte in anticipo rispetto alla fase iniziale  $\varphi_0$ . Data la presenza di un polo nell'origine esiste un asintoto verticale per  $\omega \rightarrow 0$  la cui ascissa vale  $\sigma_a = K\Delta_\tau = \frac{1}{320}9.575 \simeq 0.03$ . Il parametro  $\Delta_p$  vale  $\Delta_p = -0.1 - (-6 - 20) = 25.9 > 0$  pertanto il diagramma arriva in anticipo rispetto alla fase finale  $\varphi_\infty$ . Lo sfasamento complessivo è  $\Delta\varphi = -\pi$ . Dal diagramma risulta inoltre esistere un'unica intersezione con l'asse reale, che in virtù dell'analisi svolta con Routh al primo punto risulta pari a

$$\sigma^* = -1/K^* = 0.0032.$$

La corrispondente pulsazione è  $\omega^* = 11.56$ .

- e.3) Posto  $K = 100$ , calcolare l'errore a regime  $e(\infty)$  quando sul sistema retroazionato siano applicati contemporaneamente  $r(t) = 4$  e  $d(t) = \sin(t)$ . Dato che il sistema è lineare e soggetto quindi alla sovrapposizione degli effetti, l'errore  $E(s)$ , espresso mediante la trasformata di Laplace, risulterà:

$$E(s) = E_r(s) + E_d(s)$$

dove  $E_r(s)$  è l'errore dovuto al riferimento mentre  $E_d(s)$  è l'errore dovuto al disturbo. Senza fare alcun calcolo si può dire che a regime  $e_r(\infty)$  sarà nullo, in quanto si considera un ingresso a gradino in un sistema di tipo 1 (cioè con un polo nell'origine). Di conseguenza il calcolo dell'errore a regime si riduce a quello dovuto al segnale  $d(t)$ :

$$E(s) = F_d(s)D(s)$$

dove  $D(s)$  è la trasformata di Laplace di  $d(t)$  e  $F_d(s)$  è la funzione di trasferimento tra  $D(s)$  e  $E(s)$  che vale

$$F_d(s) = -\frac{G(s)}{1 + KG(s)} = -\frac{(10s + 1)}{s^4 + 26s^3 + 136s^2 + 1320s + 100}.$$

Essendo  $d(t)$  un segnale sinusoidale, per trovarne la risposta a regime si sfrutta il concetto di risposta armonica, per cui

$$e_d(t) = |F_d(j1)| \sin(t + \arg\{F_d(j1)\})$$

con  $|F_d(j1)| = 0.0078$  e  $\arg\{F_d(j1)\} = 172.74^\circ$ . In conclusione

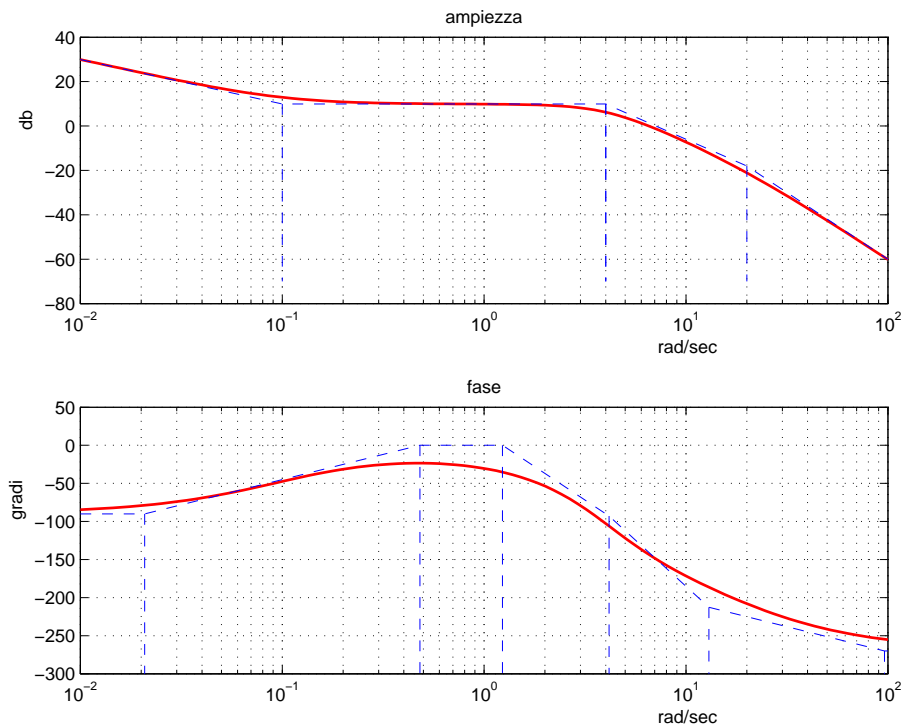
$$e(\infty) = e_d(\infty) = 0.0078 \sin(t + 172.74^\circ)$$

- e.4) Considerando nuovamente  $K = 100$ , tracciare (nello schema fornito in allegato) i diagrammi di Bode asintotici delle ampiezze e della fasi del guadagno di anello  $KG(s)$ .

Indicare sui diagrammi il margine di ampiezza e il margine di fase. Infine, fornire una stima della larghezza di banda del sistema retroazionato.

Soluzione:

In figura sono riportati i diagrammi di Bode del sistema. Sul diagramma asintotico delle ampiezze il guadagno  $\beta$  in corrispondenza della pulsazione  $\omega = 0.1$  è  $\beta = \frac{K}{320 \cdot 0.1} = 3.125 = 9.9$  dB. Il coefficiente di smorzamento della coppia di poli complessi coniugati è  $\delta = 0.75$ .



Il margine di ampiezza risulta :  $M_a = 9.98\text{dB}$  per  $\omega = 11.6 \text{ rad/sec}$ , e il margine di fase:  $M_f = 36.7^\circ$  per  $\omega = 6.54 \text{ rad/sec}$ . La banda del sistema retroazionato può essere stimata sulla base della pulsazione di incrocio del sistema in catena aperta e sarà quindi circa  $[0, 7] \text{ rad/sec}$ .

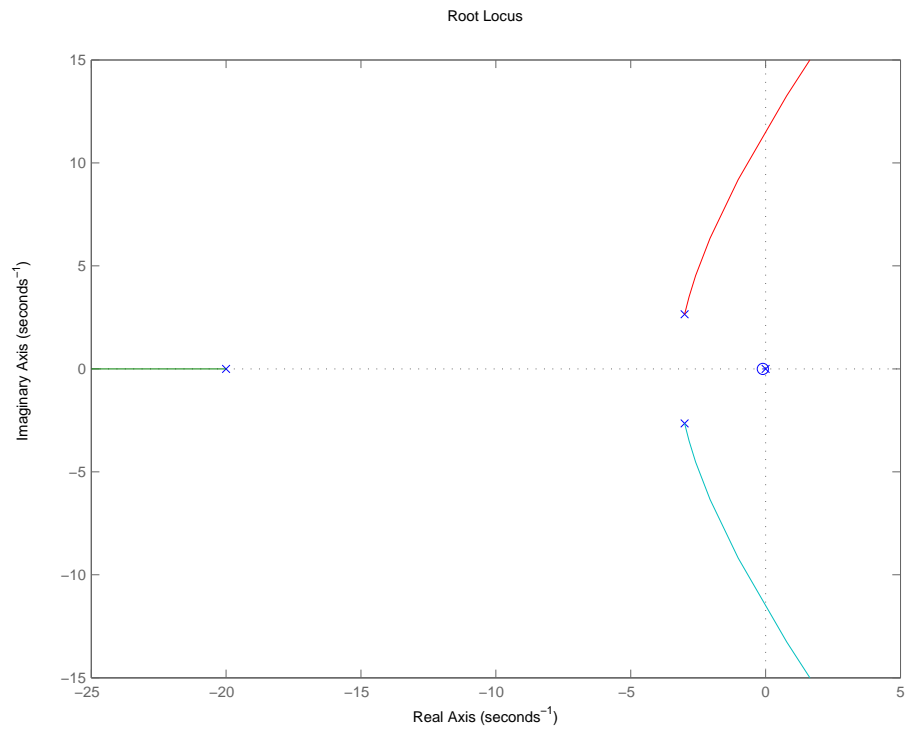
f) **Non è richiesto lo svolgimento di questo esercizio agli iscritti ad Ingegneria Ambientale.**

Con riferimento al sistema descritto nell'esercizio e), tracciare qualitativamente il luogo delle radici del sistema retroazionato per valori positivi del parametro  $K$ . Determinare esattamente gli asintoti, le intersezioni  $\omega^*$  con l'asse immaginario e i corrispondenti valori  $K^*$  del guadagno.

Soluzione: Gli asintoti sono 3, essendo 3 il grado relativo, formano angoli di  $120^\circ$  e un asintoto appartiene al semiasse reale negativo. Il centro degli asintoti si trova sull'asse reale nel punto di ascissa

$$\sigma_0 = \frac{1}{3}(-6 - 20 + 0.1) = -8.6333$$

Il luogo delle radici finale è riportato nella seguente figura.



Dall'analisi svolta mediante il criterio di Routh, risulta che il luogo delle radici attraversa l'asse immaginario, passando dal semipiano sinistro a quello destro, in corrispondenza di  $s^* = j\omega^* = j11.56$ , per  $K = K^* = 315.46$ .

Nome:	
Nr. Mat.	
Firma:	

Bode Plot

