

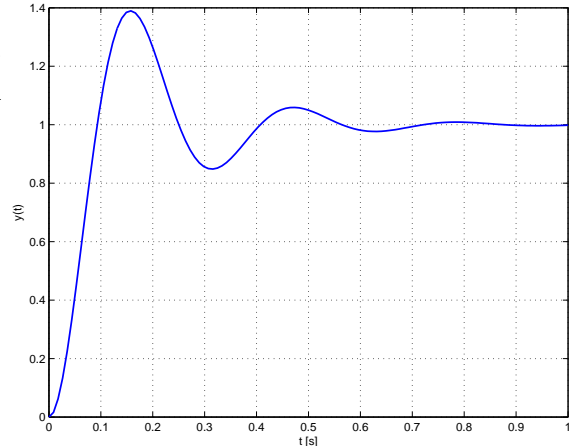
Fondamenti di Controlli Automatici -
A.A. 2012/13
12 giugno 2013 - Domande Teoriche

| | |
|----------|--|
| Nome: | |
| Nr. Mat. | |
| Firma: | |

Per ciascuno dei test a soluzione multipla segnare con una crocetta tutte le affermazioni che si ritengono giuste. In ogni quiz almeno una affermazione è corretta.

1. A partire dalla risposta al gradino unitario mostrata in figura è possibile stimare la posizione dei poli dominanti del sistema?

- sì, $p \approx -\frac{1}{6} \pm j\frac{1}{2}$
- sì, $p \approx -1.5 \pm j2$
- sì, $p \approx -6 \pm j20$
- no



2. L'evoluzione libera del sistema $2\dot{y}(t) + by(t) = 0$ partendo dalla condizione iniziale $y(0) = 3$ è:

- $y(t) = 3(1 - e^{-\frac{2}{b}t})$
- $y(t) = 3e^{-\frac{2}{b}t}$
- $y(t) = \frac{3}{2}e^{-\frac{b}{2}t}$
- $y(t) = 3e^{-\frac{b}{2}t}$

3. Il diagramma di Bode delle ampiezze di un sistema $G(s)$ di tipo 2 e avente grado relativo 3 presenta:

- pendenza di -40dB/dec per $\omega \rightarrow 0$ e pendenza di -60dB/dec per $\omega \rightarrow \infty$
- pendenza di -60dB/dec per $\omega \rightarrow 0$ e pendenza di -40dB/dec per $\omega \rightarrow \infty$
- pendenza di -20dB/dec per $\omega \rightarrow 0$ e pendenza di -30dB/dec per $\omega \rightarrow \infty$
- pendenza di $+40\text{dB/dec}$ per $\omega \rightarrow 0$ e pendenza di $+60\text{dB/dec}$ per $\omega \rightarrow \infty$

4. Il valore iniziale della risposta all'impulso $g(t)$ del sistema $G(s) = \frac{5s+1}{s^2+3s+4}$ vale:

- 5
- $1/4$
- 0
- ∞

5. La funzione di trasferimento $G(s) = \frac{Y(s)}{X(s)}$ corrispondente all'equazione differenziale $2\ddot{y} + 4\dot{y} + y = \ddot{x} + 5\dot{x} + 3x$ è:
- $G(s) = \frac{s^2 + 5s + 3}{2s^3 + 4s^2 + s}$
 - $G(s) = \frac{s^2 + 5s + 3}{2s^3 + 4s + 1}$
 - $G(s) = \frac{2s^3 + 4s + 1}{s^2 + 5s + 3}$
6. Se al sistema $y(t) + \dot{y}(t) = 2u(t)$ si applica l'ingresso $u(t) = \sin(t)$, a regime l'uscita sarà:
- $y(t) = \frac{1}{\sqrt{2}} \sin(t + 45^\circ)$
 - $y(t) = \frac{2}{\sqrt{2}} \sin(t - 45^\circ)$
 - $y(t) = \frac{2}{\sqrt{2}} \sin(t + 45^\circ)$
 - $y(t) = \frac{1}{\sqrt{2}} \sin(t - 45^\circ)$
7. Se la funzione d'anello $L(s)$ di un sistema retroazionato presenta un polo nell'origine:
- l'errore a regime per ingresso a gradino è nullo
 - l'errore a regime per ingresso a rampa è nullo
 - l'errore a regime per ingresso a rampa è diverso da zero e costante
 - l'errore a regime per ingresso a parabola è infinito
8. Per l'applicazione del criterio di Nyquist a un sistema in retroazione:
- occorre conoscere il numero dei poli a parte reale nulla e positiva
 - occorre conoscere il numero degli zeri a parte reale nulla e positiva
 - non occorre alcuna informazione sulla stabilità ad anello aperto
 - occorre sapere se il sistema ad anello aperto è stabile o instabile
9. In un sistema del secondo ordine a poli complessi coniugati e privo di zeri il picco di risonanza M_R rimane costante al variare della posizione dei poli nel piano complesso:
- su due semirette uscenti dall'origine
 - su di una circonferenza con centro nell'origine
 - su di una circonferenza con centro in -1
 - su di una retta parallela all'asse immaginario
10. Sia $\sigma_0 < 0$ il punto di intersezione del diagramma polare della funzione di risposta armonica $G(j\omega)$ con il semiasse reale negativo. Il margine di ampiezza M_A del sistema è:
- $M_A = -\frac{1}{\sigma_0}$
 - $M_A = \frac{1}{\sigma_0}$
 - $M_A = -\sigma_0$
 - $M_A = \sigma_0$

| | |
|----------|--|
| Nome: | |
| Nr. Mat. | |
| Firma: | |

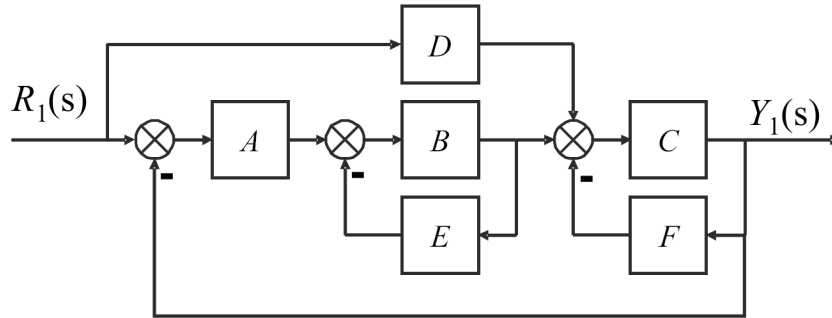
a) Determinare la trasformata di Laplace $X_i(s)$ dei seguenti segnali temporali $x_i(t)$:

$$x_1(t) = [5 - 2 \sin(4t)] e^{-2t}, \quad x_2(t) = 1 + t^3 e^{2-4t}$$

b) Calcolare la risposta impulsiva $g_i(t)$ delle seguenti funzioni di trasferimento $G_i(s)$:

$$G_1(s) = \frac{15}{s^2 + 6s + 34} + 3, \quad G_2(s) = \frac{5}{s(s+2)(1+2s)}$$

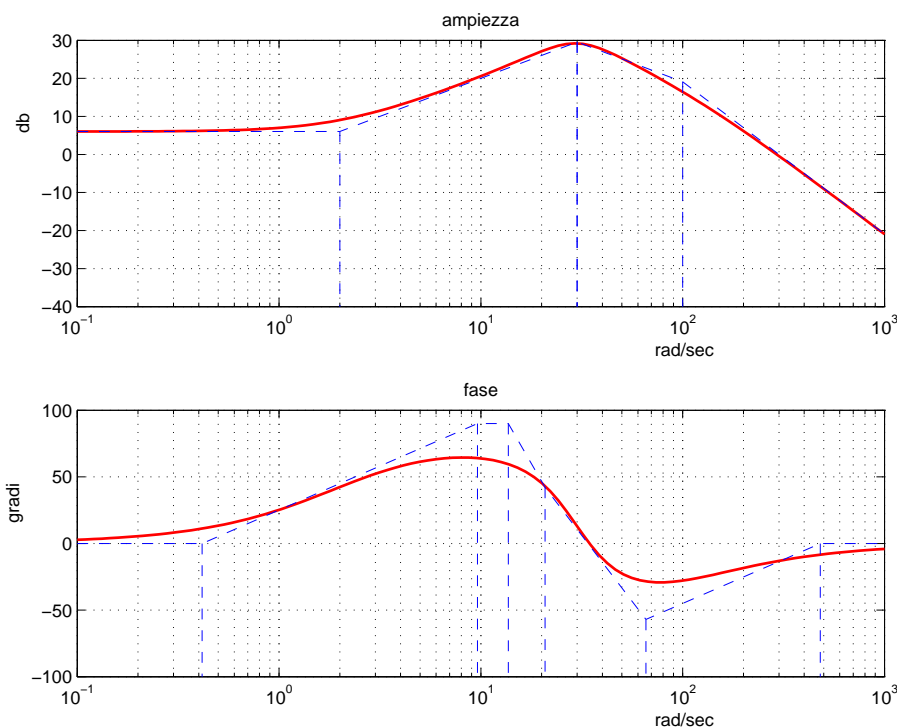
c) Dato il seguente schema a blocchi, utilizzando la formula di Mason, calcolare la funzione di trasferimento $G(s) = \frac{Y_1(s)}{R_1(s)}$



d) Sia data la funzione di trasferimento $G(s) = \frac{(s+5)}{(s^2+2s+5)(s+0.01)(1+0.01s)}$.

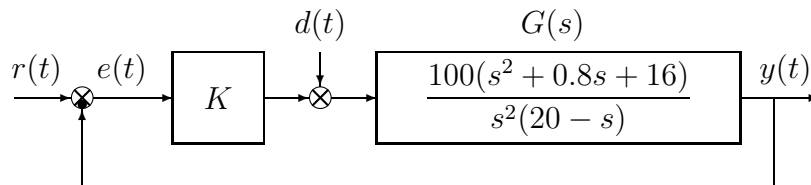
Disegnare l'andamento qualitativo della risposta $y(t)$ a un gradino in ingresso di ampiezza 0.2, $x(t) = 0.2$. Calcolare il valore a regime y_∞ dell'uscita $y(t)$ del sistema, stimare qualitativamente il tempo di assestamento T_a del sistema e il periodo T_w dell'eventuale oscillazione smorzata.

e) Facendo riferimento ai diagrammi di Bode della funzione $G(s)$ mostrati in figura



si ricavi l'espressione analitica della funzione $G(s)$.

f) Sia dato il seguente sistema retroazionato:



- f.1) Determinare per quali valori del parametro K il sistema retroazionato è asintoticamente stabile.
- f.2) Disegnare qualitativamente il diagramma di Nyquist completo della funzione $G(s)$. Calcolare esattamente la posizione σ_a di un eventuale asintoto, le eventuali intersezioni con l'asse reale e i corrispondenti valori delle pulsazioni.
- f.3) Posto $K = -1$, calcolare l'errore a regime $e(\infty)$ quando sul sistema retroazionato siano applicati contemporaneamente il segnale $r(t) = 5t$ e il disturbo $d(t) = 2 \sin(t)$.
- f.4) Posto $K = 2$, tracciare (nello schema fornito in allegato) i diagrammi di Bode delle ampiezze e delle fasi del guadagno di anello $K G(s)$.

g) **Non è richiesto lo svolgimento di questo esercizio agli iscritti ad Ingegneria Ambientale.**

Con riferimento al sistema descritto nell'esercizio f), tracciare qualitativamente il luogo delle radici del sistema retroazionato per valori negativi del parametro K . Determinare esattamente gli asintoti, il centro degli asintoti, le intersezioni ω^* con l'asse immaginario e i corrispondenti valori K^* del guadagno.

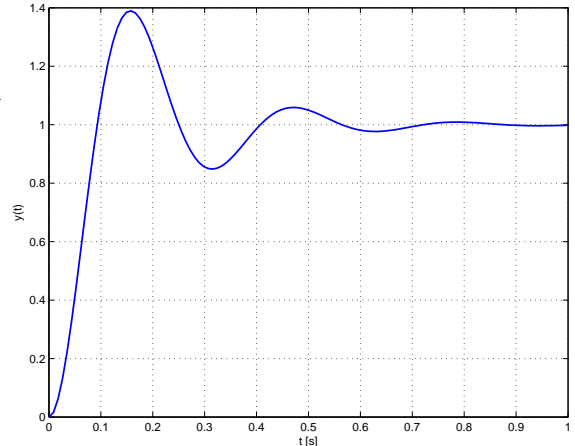
Fondamenti di Controlli Automatici -
A.A. 2012/13
12 giugno 2013 - Domande Teoriche

| | |
|----------|--|
| Nome: | |
| Nr. Mat. | |
| Firma: | |

Per ciascuno dei test a soluzione multipla segnare con una crocetta tutte le affermazioni che si ritengono giuste. In ogni quiz almeno una affermazione è corretta.

1. A partire dalla risposta al gradino unitario mostrata in figura è possibile stimare la posizione dei poli dominanti del sistema?

- sì, $p \approx -\frac{1}{6} \pm j\frac{1}{2}$
- sì, $p \approx -1.5 \pm j2$
- sì, $p \approx -6 \pm j20$
- no



2. L'evoluzione libera del sistema $2\dot{y}(t) + by(t) = 0$ partendo dalla condizione iniziale $y(0) = 3$ è:

- $y(t) = 3(1 - e^{-\frac{2}{b}t})$
- $y(t) = 3e^{-\frac{2}{b}t}$
- $y(t) = \frac{3}{2}e^{-\frac{b}{2}t}$
- $y(t) = 3e^{-\frac{b}{2}t}$

3. Il diagramma di Bode delle ampiezze di un sistema $G(s)$ di tipo 2 e avente grado relativo 3 presenta:

- pendenza di -40dB/dec per $\omega \rightarrow 0$ e pendenza di -60dB/dec per $\omega \rightarrow \infty$
- pendenza di -60dB/dec per $\omega \rightarrow 0$ e pendenza di -40dB/dec per $\omega \rightarrow \infty$
- pendenza di -20dB/dec per $\omega \rightarrow 0$ e pendenza di -30dB/dec per $\omega \rightarrow \infty$
- pendenza di $+40\text{dB/dec}$ per $\omega \rightarrow 0$ e pendenza di $+60\text{dB/dec}$ per $\omega \rightarrow \infty$

4. Il valore iniziale della risposta all'impulso $g(t)$ del sistema $G(s) = \frac{5s+1}{s^2+3s+4}$ vale:

- 5
- 1/4
- 0
- ∞

5. La funzione di trasferimento $G(s) = \frac{Y(s)}{X(s)}$ corrispondente all'equazione differenziale $2\ddot{y} + 4\dot{y} + y = \ddot{x} + 5\dot{x} + 3x$ è:
- $G(s) = \frac{s^2 + 5s + 3}{2s^3 + 4s^2 + s}$
 $G(s) = \frac{s^2 + 5s + 3}{2s^3 + 4s + 1}$
 $G(s) = \frac{2s^3 + 4s + 1}{s^2 + 5s + 3}$
6. Se al sistema $y(t) + \dot{y}(t) = 2u(t)$ si applica l'ingresso $u(t) = \sin(t)$, a regime l'uscita sarà:
- $y(t) = \frac{1}{\sqrt{2}} \sin(t + 45^\circ)$
 $y(t) = \frac{2}{\sqrt{2}} \sin(t - 45^\circ)$
 $y(t) = \frac{2}{\sqrt{2}} \sin(t + 45^\circ)$
 $y(t) = \frac{1}{\sqrt{2}} \sin(t - 45^\circ)$
7. Se la funzione d'anello $L(s)$ di un sistema retroazionato presenta un polo nell'origine:
- l'errore a regime per ingresso a gradino è nullo
 l'errore a regime per ingresso a rampa è nullo
 l'errore a regime per ingresso a rampa è diverso da zero e costante
 l'errore a regime per ingresso a parabola è infinito
8. Per l'applicazione del criterio di Nyquist a un sistema in retroazione:
- occorre conoscere il numero dei poli a parte reale nulla e positiva
 occorre conoscere il numero degli zeri a parte reale nulla e positiva
 non occorre alcuna informazione sulla stabilità ad anello aperto
 occorre sapere se il sistema ad anello aperto è stabile o instabile
9. In un sistema del secondo ordine a poli complessi coniugati e privo di zeri il picco di risonanza M_R rimane costante al variare della posizione dei poli nel piano complesso:
- su due semirette uscenti dall'origine
 su di una circonferenza con centro nell'origine
 su di una circonferenza con centro in -1
 su di una retta parallela all'asse immaginario
10. Sia $\sigma_0 < 0$ il punto di intersezione del diagramma polare della funzione di risposta armonica $G(j\omega)$ con il semiasse reale negativo. Il margine di ampiezza M_A del sistema è:
- $M_A = -\frac{1}{\sigma_0}$
 $M_A = \frac{1}{\sigma_0}$
 $M_A = -\sigma_0$
 $M_A = \sigma_0$

| | |
|----------|--|
| Nome: | |
| Nr. Mat. | |
| Firma: | |

a) Determinare la trasformata di Laplace $X_i(s)$ dei seguenti segnali temporali $x_i(t)$:

$$x_1(t) = [5 - 2 \sin(4t)] e^{-2t}, \quad x_2(t) = 1 + t^3 e^{2-4t}$$

Soluzione:

$$X_1(s) = \frac{5}{(s+2)} - \frac{8}{(s+2)^2 + 16}, \quad X_2(s) = \frac{1}{s} + \frac{6e^2}{(s+4)^4},$$

b) Calcolare la risposta impulsiva $g_i(t)$ delle seguenti funzioni di trasferimento $G_i(s)$:

$$G_1(s) = \frac{15}{s^2 + 6s + 34} + 3, \quad G_2(s) = \frac{5}{s(s+2)(1+2s)}$$

Soluzione:

La funzione $G_1(s)$ può essere riscritta come

$$G_1(s) = \frac{15}{(s+3)^2 + 5^2} + 3$$

pertanto la sua risposta impulsiva risulta

$$g_1(t) = 3 e^{-3t} \sin(5t) + 3\delta(t).$$

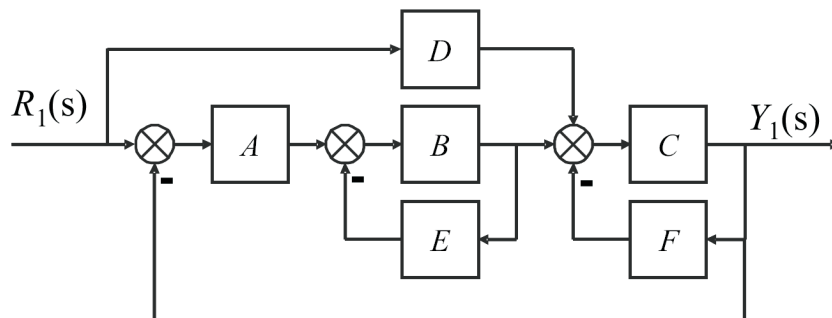
La funzione $G_2(s)$ può essere riscritta come

$$G_2(s) = \frac{5}{2s} + \frac{5}{6(s+2)} - \frac{10}{3(s+\frac{1}{2})}$$

di conseguenza la sua risposta impulsiva risulta

$$g_2(t) = \frac{5}{2} + \frac{5}{6} e^{-2t} - \frac{10}{3} e^{-\frac{t}{2}}$$

c) Dato il seguente schema a blocchi, utilizzando la formula di Mason, calcolare la funzione di trasferimento $G(s) = \frac{Y_1(s)}{R_1(s)}$

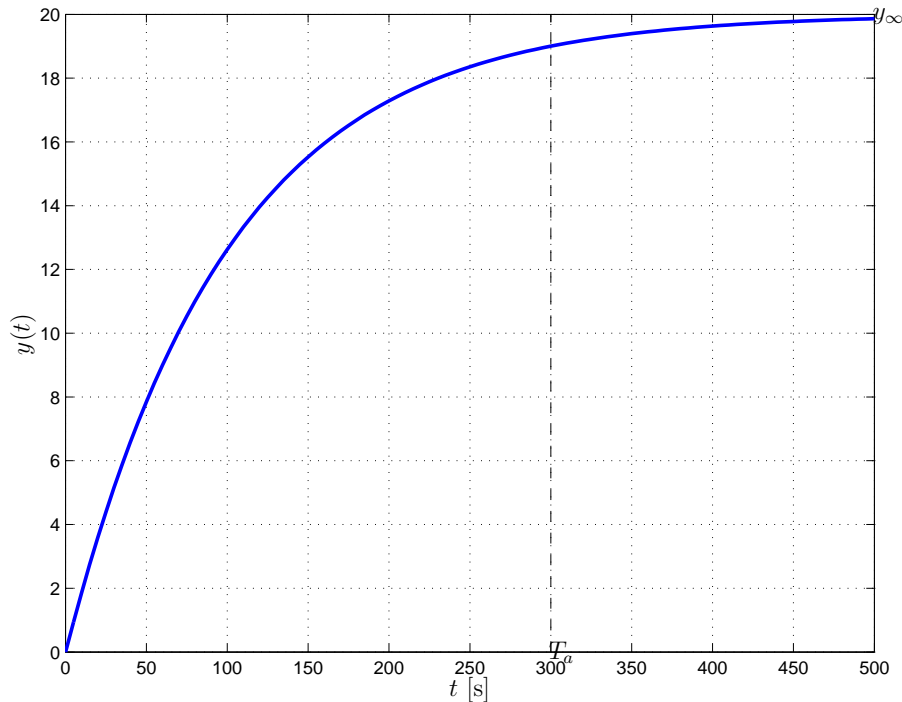


$$G(s) = \frac{Y_1(s)}{R_1(s)} = \frac{ABC + DC(1 + BE)}{1 + BE + CF + ABC + BECF}$$

d) Sia data la funzione di trasferimento $G(s) = \frac{(s + 5)}{(s^2 + 2s + 5)(s + 0.01)(1 + 0.01s)}$.

Disegnare l'andamento qualitativo della risposta $y(t)$ a un gradino in ingresso di ampiezza 0.2, $x(t) = 0.2$. Calcolare il valore a regime y_∞ dell'uscita $y(t)$ del sistema, stimare qualitativamente il tempo di assestamento T_a del sistema e il periodo T_ω dell'eventuale oscillazione smorzata.

Soluzione: Il sistema ha un polo dominante reale $p = -0.01$ pertanto la risposta al gradino sarà di tipo aperiodico. In figura è riportata la risposta del sistema.



Il valore a regime dell'uscita per un gradino in ingresso di ampiezza $A = 0.2$ risulta

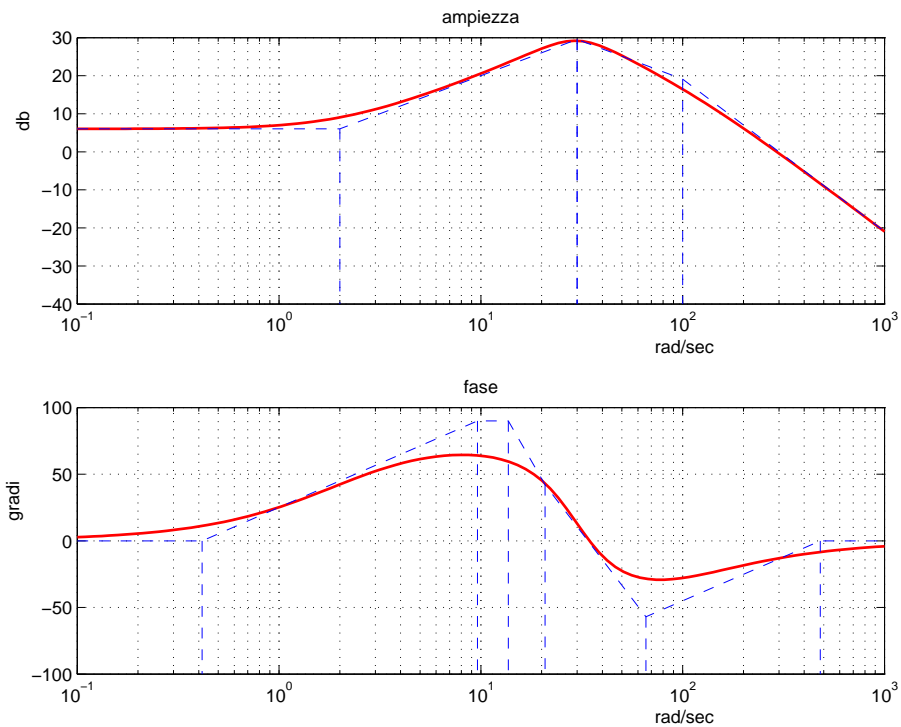
$$y_\infty = AG(0) = 0.2 \cdot 100 = 20.$$

Il sistema ha un polo dominante reale con parte reale $\sigma = -0.01$ per cui il tempo di assestamento T_a è

$$T_a = \frac{3}{|\sigma|} = 300 \text{ s},$$

mentre il periodo dell'oscillazione T_ω non esiste, non essendoci alcuna oscillazione.

e) Facendo riferimento ai diagrammi di Bode della funzione $G(s)$ mostrati in figura

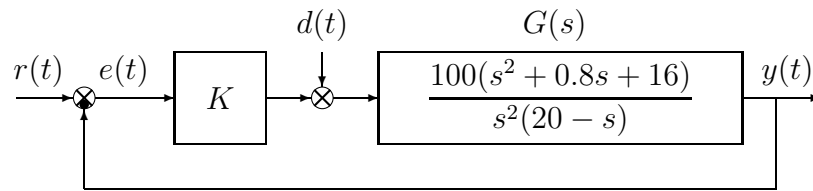


si ricavi l'espressione analitica della funzione $G(s)$.

Soluzione

$$G(s) = \frac{-90000(s+2)}{(s-100)(s^2+30s+900)}$$

f) Sia dato il seguente sistema retroazionato:



f.1) Determinare per quali valori del parametro K il sistema retroazionato è asintoticamente stabile.

Soluzione: l'equazione caratteristica del sistema retroazionato è

$$1 + \frac{100K(s^2 + 0.8s + 16)}{s^2(20 - s)} = 0 \quad \rightarrow \quad s^3 - (20 + 100K)s^2 - 80Ks - 1600K = 0$$

La corrispondente tabella di Routh è la seguente

$$\begin{array}{l|ll} 3 & 1 & -80K \\ 2 & -(20 + 100K) & -1600K \\ 1 & (20 + 100K)80K + 1600K & \\ 0 & -1600K & \end{array} \quad \begin{array}{l} \rightarrow K < -0.2 \\ \rightarrow K < -0.4 \vee K > 0 \\ \rightarrow K < 0 \end{array}$$

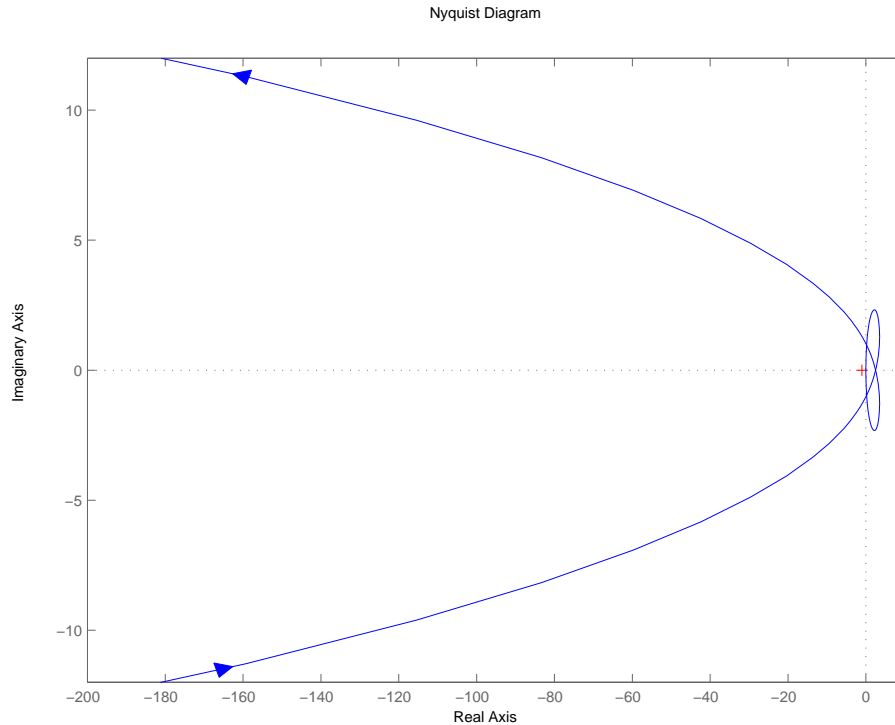
Quindi il sistema retroazionato è asintoticamente stabile per:

$$K < -0.4 = K^*$$

La pulsazione ω^* corrispondente al valore limite K^* è:

$$\omega^* = \sqrt{-80K^*} = \sqrt{32} = 5.657$$

- f.2) Disegnare qualitativamente il diagramma di Nyquist completo della funzione $G(s)$. Calcolare esattamente la posizione σ_a di un eventuale asintoto, le eventuali intersezioni con l'asse reale e i corrispondenti valori delle pulsazioni. Soluzione: Il diagramma di Nyquist della funzione $G(s)$ è riportato in figura.



La funzione approssimante per $\omega \rightarrow 0$ è $G_0(s) = \frac{1600}{20s^2}$ pertanto il diagramma parte all'infinito con fase iniziale $\varphi_0 = -\pi$. La funzione approssimante per $\omega \rightarrow \infty$ è $G_\infty(s) = -\frac{100}{s}$ e quindi il diagramma giunge nell'origine con fase finale $\varphi_\infty = -\frac{3}{2}\pi$. Il parametro Δ_τ vale $\Delta_\tau = \frac{0.8}{16} + \frac{1}{20} = 0.1 > 0$ pertanto il diagramma parte in anticipo rispetto alla fase iniziale φ_0 . Il sistema è di tipo 2 pertanto non esiste alcun asintoto. Il parametro Δ_p vale $\Delta_p = -0.8 - 20 = -20.8 < 0$ pertanto il diagramma arriva in ritardo rispetto alla fase finale φ_∞ . Lo sfasamento complessivo è $\Delta\varphi = \frac{3}{2}\pi$. Esiste un'unica intersezione con l'asse reale, che in virtù dell'analisi svolta con Routh al primo punto risulta pari a

$$\sigma^* = -1/K^* = 2.5.$$

La corrispondente pulsazione è $\omega^* = 5.657$.

- f.3) Posto $K = -1$, calcolare l'errore a regime $e(\infty)$ quando sul sistema retroazionato siano applicati contemporaneamente il segnale $r(t) = 5t$ e il disturbo $d(t) = 2\sin(t)$. Dato che il sistema è lineare e soggetto quindi alla sovrapposizione degli effetti, l'errore $E(s)$, espresso mediante la trasformata di Laplace, risulterà:

$$E(s) = E_r(s) + E_d(s)$$

dove $E_r(s)$ è l'errore dovuto al riferimento mentre $E_d(s)$ è l'errore dovuto al disturbo. Senza fare alcun calcolo si può dire che a regime $e_r(\infty)$ sarà nullo, in quanto si considera un ingresso

a rampa in un sistema di tipo 2 (cioè con due poli nell'origine). Di conseguenza il calcolo dell'errore a regime si riduce a quello dovuto al disturbo $d(t)$:

$$E(s) = F_d(s)D(s)$$

dove $D(s)$ è la trasformata di Laplace di $d(t)$ e $F_d(s)$ è la funzione di trasferimento tra $D(s)$ e $E(s)$ che vale

$$F_d(s) = -\frac{G(s)}{1 + KG(s)} = \frac{100s^2 + 80s + 1600}{s^3 + 80s^2 + 80s + 1600}$$

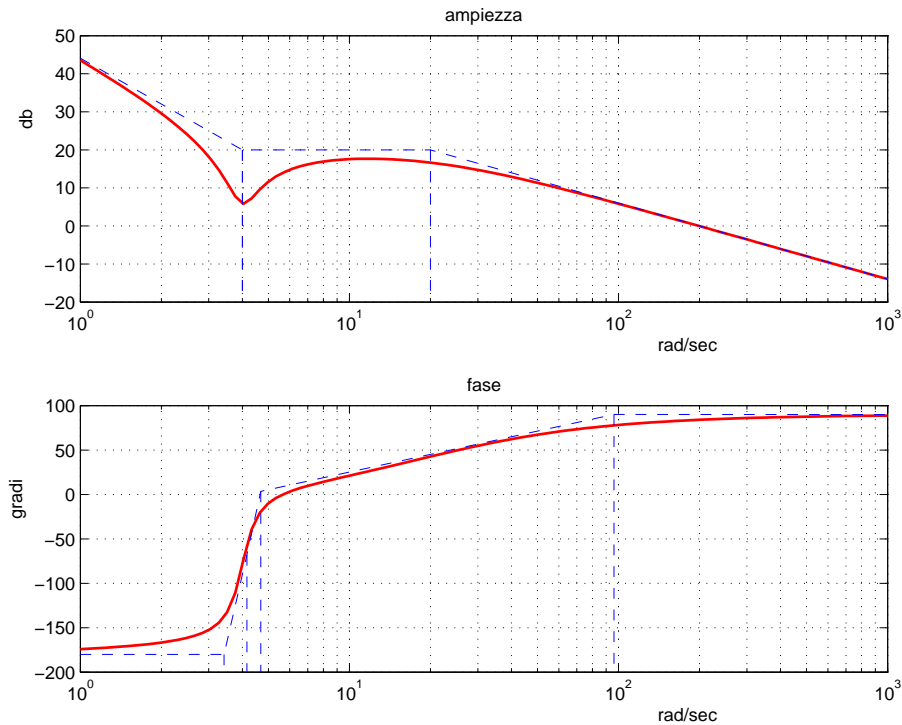
Essendo $d(t)$ un segnale sinusoidale, per trovarne la risposta a regime si sfrutta il concetto di risposta armonica, per cui $e_d(t) = 2|F_d(j1)| \sin(t + \arg\{F_d(j1)\})$ con $|F_d(j1)| = 0.9869$ e $\arg\{F_d(j1)\} \simeq 0.08^\circ$. In conclusione

$$e(\infty) = e_d(\infty) \simeq 1.974 \sin(t + 0.08^\circ)$$

- f.4) Posto $K = 2$, tracciare (nello schema fornito in allegato) i diagrammi di Bode delle ampiezze e delle fasi del guadagno di anello $KG(s)$.

Soluzione:

In figura sono riportati i diagrammi di Bode del sistema. Sul diagramma asintotico delle ampiezze il guadagno β in corrispondenza della pulsazione $\omega = 4$ è $\beta = \frac{1600K}{20 \cdot 4^2} = 10 = 20$ dB. Il coefficiente di smorzamento della coppia di zeri complessi coniugati è $\delta = 0.1$.



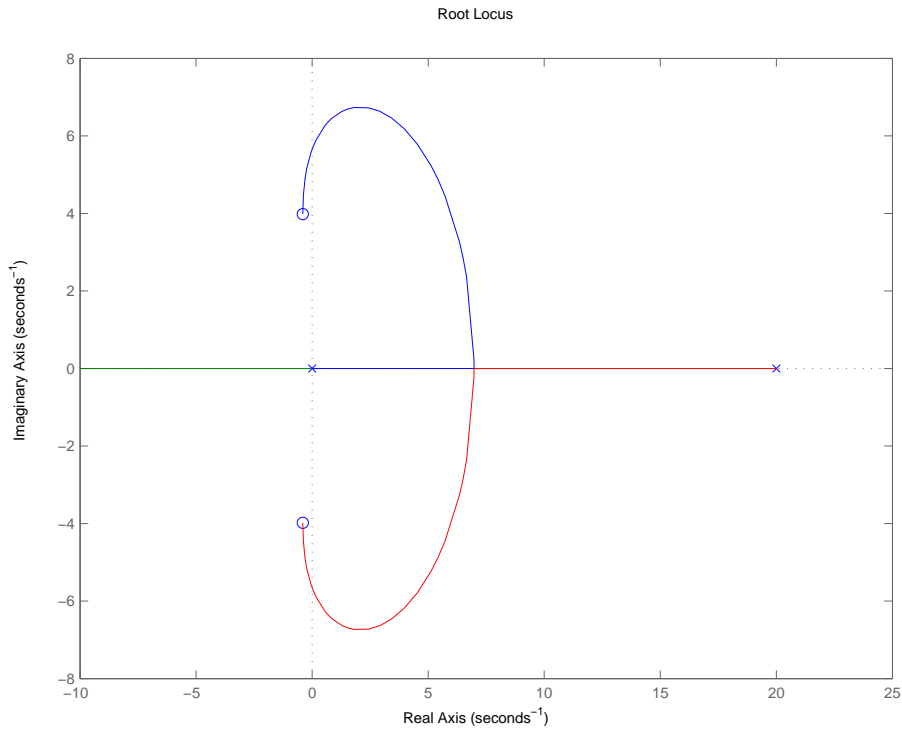
- g) **Non è richiesto lo svolgimento di questo esercizio agli iscritti ad Ingegneria Ambientale.**

Con riferimento al sistema descritto nell'esercizio f), tracciare qualitativamente il luogo delle radici del sistema retroazionato per valori negativi del parametro K . Determinare esattamente gli asintoti, il centro degli asintoti, le intersezioni ω^* con l'asse immaginario e i corrispondenti valori K^* del guadagno.

Soluzione: Esiste un solo asintoto, essendo 1 il grado relativo, che appartiene al semiasse reale negativo. Il centro degli asintoti si trova sull'asse reale nel punto di ascissa

$$\sigma_0 = \frac{1}{1}(20 + 0.8) = 20.8$$

Il luogo delle radici finale è riportato nella seguente figura.



Dall'analisi svolta mediante il criterio di Routh, risulta che il luogo delle radici attraversa l'asse immaginario, passando dal semipiano destro a quello sinistro, in corrispondenza di $s^* = j\omega^* = j5.657$, per $K = K^* = -0.4$.

| | |
|----------|--|
| Nome: | |
| Nr. Mat. | |
| Firma: | |

Bode Plot

