

Fondamenti di Controlli Automatici -
A.A. 2012/13
11 febbraio 2014 - Quiz di Teoria

Cognome	
Nome	
Matricola	
Corso	

Per ciascuno dei test a soluzione multipla segnare con una crocetta tutte le affermazioni che si ritengono giuste. In ogni quiz almeno una affermazione è corretta.

La prova di teoria si ritiene superata se vengono totalizzati almeno 5 punti su 10; diversamente il compito verrà ritenuto insufficiente a prescindere dal risultato della seconda parte della prova (esercizi).

1. La funzione di trasferimento $G(s) = \frac{Y(s)}{X(s)} = \frac{2s^2 + s + 3}{5s^3 + s^2 + 3s}$ corrisponde all'equazione differenziale:

- $3\dot{x}(t) + \ddot{x}(t) + 5\ddot{\ddot{x}}(t) = 3y(t) + \dot{y}(t) + 2\ddot{y}(t)$
- $3y(t) + \dot{y}(t) + 5\ddot{y}(t) = 3x(t) + \dot{x}(t) + 2\ddot{x}(t)$
- $3\dot{y}(t) + \ddot{y}(t) + 5\ddot{\ddot{y}}(t) = 3x(t) + \dot{x}(t) + 2\ddot{x}(t)$
- nessuna delle precedenti

2. I due poli di un sistema del secondo ordine sono univocamente determinati se vengono assegnate le seguenti specifiche

- coefficiente di smorzamento δ e tempo di assestamento T_a
- massima sovraelongazione S e picco di risonanza M_R
- tempo di assestamento T_a e picco di risonanza M_R

3. La derivata iniziale della risposta al gradino unitario del sistema $G(s) = \frac{s+3}{s^2+9s}$ è pari a:

- 0
- ∞
- 1
- $1/3$

4. Dato il sistema $G(s) = \frac{(s+3)^2}{s^2(s^2+4s+25)}$ posto in retroazione unitaria negativa (che si suppone stabile) risulta

- errore a regime nullo per ingresso a gradino
- errore a regime nullo per ingresso a rampa
- errore a regime nullo per ingresso a parabola
- errore a regime limitato ma non nullo per ingresso a rampa

5. Per $\omega = 1/a$ il diagramma "reale" di Bode delle ampiezze della funzione $G(j\omega) = \frac{1}{(1+j a \omega)^2}$ (con $a > 0$)

- vale $\frac{1}{\sqrt{2}}$
- vale 1
- vale $1/2$
- vale $\simeq -3$ dB

6. La funzione di risposta armonica $F(\omega)$ di un sistema lineare $G(s)$ asintoticamente stabile

- determina univocamente la risposta all'impulso $g(t)$
- è determinata univocamente dalla risposta all'impulso $g(t)$
- non è definibile se $G(s)$ presenta degli zeri a parte reale positiva

7. Applicando l'ingresso $u(t) = \sin(2t)$ al sistema $\dot{y}(t) + 2y(t) = 4u(t)$ si ottiene la seguente uscita a regime:

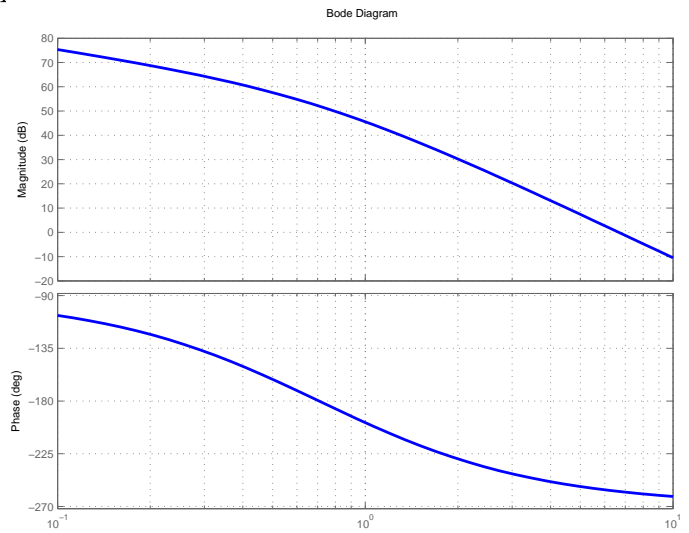
- $y(t) = \frac{4}{\sqrt{2}} \sin(2t + 45^\circ)$
- $y(t) = \frac{4}{\sqrt{2}} \sin(2t - 45^\circ)$
- $y(t) = \frac{2}{\sqrt{2}} \sin(2t + 45^\circ)$
- $y(t) = \frac{2}{\sqrt{2}} \sin(2t - 45^\circ)$

8. Il metodo della Trasformata di Laplace nella risoluzione di equazioni differenziali lineari a parametri concentrati

- permette di calcolare la risposta libera del sistema
- permette di calcolare la risposta forzata del sistema
- può essere utilizzato solo nel caso di equazioni tempo invarianti
- può essere utilizzato anche nel caso di equazioni tempo varianti

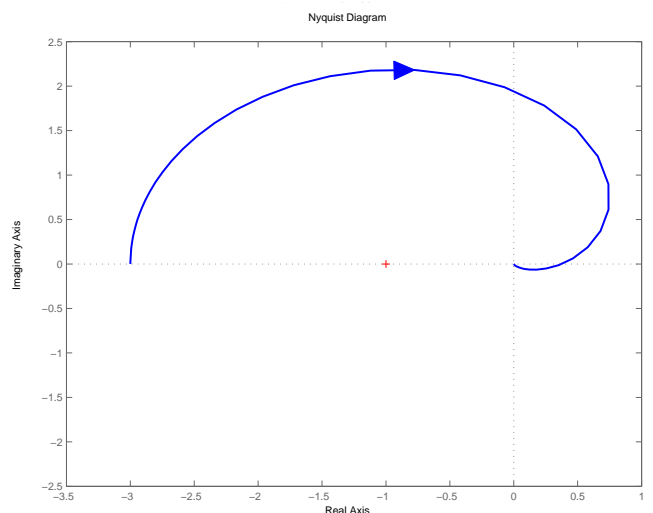
9. Si faccia riferimento ai diagrammi di Bode riportati a fianco relativi a un sistema $G(s)$ a fase minima. Il margine di ampiezza M_α e il margine di fase M_φ sono:

- $M_\alpha \simeq 52 \text{ dB}$ e $M_\varphi \simeq 77^\circ$
- $M_\alpha \simeq 52 \text{ dB}$ e $M_\varphi \simeq -77^\circ$
- $M_\alpha \simeq -52 \text{ dB}$ e $M_\varphi \simeq 77^\circ$
- $M_\alpha \simeq -52 \text{ dB}$ e $M_\varphi \simeq -77^\circ$



10. Sia dato il diagramma di Nyquist (per pulsazioni positive) della funzione $G(s) = \frac{-3}{(s+1)^3}$. In base al criterio di Nyquist è possibile affermare che il sistema retroazionato $KG(s)$ è stabile per valori di K

- $0 < K < K_1$, dove $K_1 > 0$
- $K > K_1$, dove $K_1 > 0$
- $K_1 < K < K_2$, dove $K_1 < 0$ e $K_2 > 0$
- $K < K_1 \cup K > K_2$, dove $K_1 < 0$ e $K_2 > 0$



Cognome	
Nome	
Matricola	
Corso	

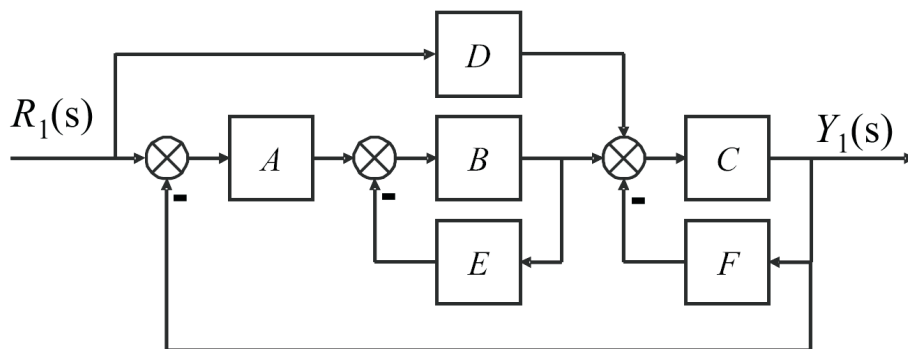
a) Determinare la trasformata di Laplace $X_i(s)$ dei seguenti segnali temporali $x_i(t)$:

$$x_1(t) = (5 + e^{-3t}) \cos(3t), \quad x_2(t) = 2(\delta(t) + 1 + t^3 e^{-t})$$

b) Calcolare la risposta impulsiva $g_i(t)$ delle seguenti funzioni di trasferimento $G_i(s)$:

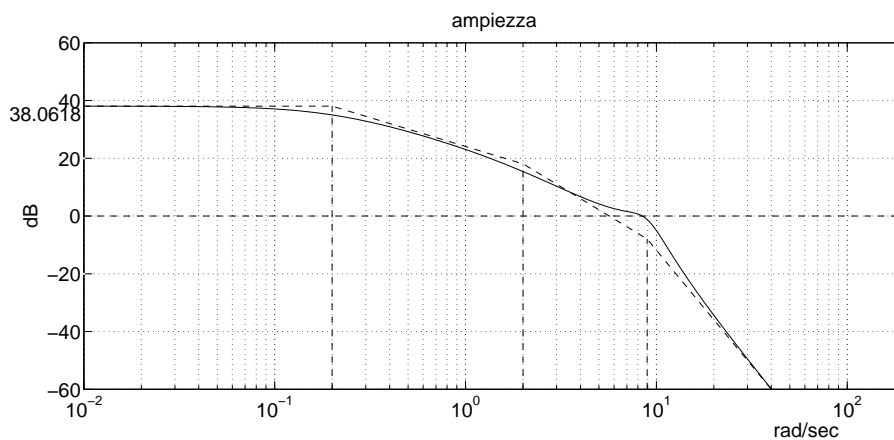
$$G_1(s) = \frac{9s^2 + 32s + 24}{s^3 + 6s^2 + 8s}, \quad G_2(s) = \frac{s - 1}{(s + 2)^2 (s + 1)}$$

c) Dato il seguente schema a blocchi, utilizzando la formula di Mason, calcolare la funzione di trasferimento $G(s) = \frac{Y_1(s)}{R_1(s)}$:



$$G(s) = \frac{Y_1(s)}{R_1(s)} =$$

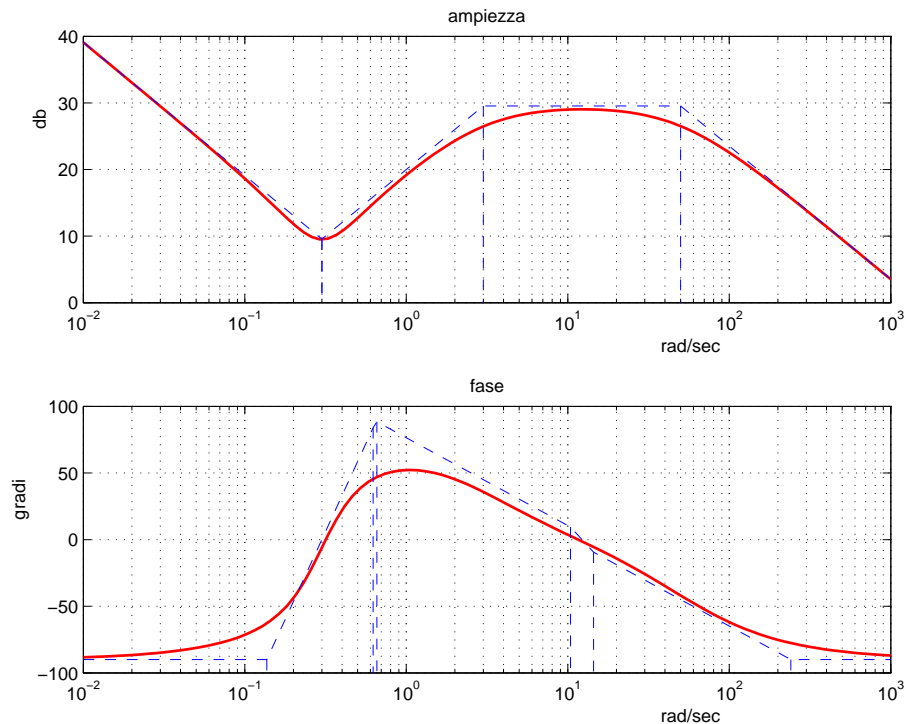
d) Dato il sistema, supposto a fase minima, che dà luogo al diagramma di Bode delle ampiezze di figura



rispondere ai seguenti quesiti:

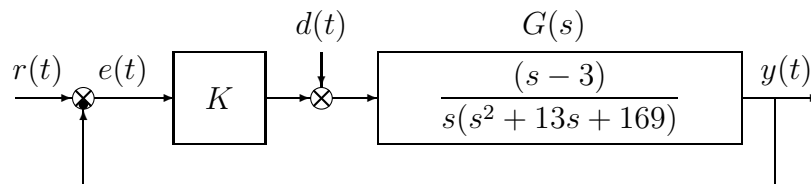
d.1) Calcolare il valore a regime y_∞ dell'uscita $y(t)$ del sistema a un gradino in ingresso di ampiezza 4, $x(t) = 4$.

- d.2) Stimare qualitativamente il tempo di assestamento T_a del sistema e il periodo T_ω dell'eventuale oscillazione smorzata.
- d.3) Disegnare l'andamento qualitativo della risposta $y(t)$ al gradino di ampiezza 4.
- e) Facendo riferimento ai diagrammi di Bode della funzione $G(s)$ mostrati in figura



si ricavi l'espressione analitica della funzione $G(s)$.

- f) Sia dato il seguente sistema retroazionato:



- f.1) Determinare per quali valori del parametro K il sistema retroazionato è asintoticamente stabile.
- f.2) Posto $K = -100$ disegnare qualitativamente il diagramma di Nyquist completo della funzione d'anello $KG(s)$. Calcolare esattamente la posizione σ_0 di un eventuale asintoto, le eventuali intersezioni con l'asse reale e i corrispondenti valori delle pulsazioni.
- f.3) Posto $K = -100$, calcolare l'errore a regime $e(\infty)$ quando sul sistema retroazionato siano applicati contemporaneamente il segnale $r(t) = 4$ e il disturbo $d(t) = 2 \sin(2t)$.
- f.4) Posto nuovamente $K = -100$, tracciare (nello schema fornito in allegato) i diagrammi di Bode delle ampiezze e delle fasi del guadagno di anello $KG(s)$.
- g) **Non è richiesto lo svolgimento di questo esercizio agli iscritti ad Ingegneria Ambientale o a corsi per i quali l'esame è inferiore a 6 CFU.**

Con riferimento al sistema descritto nell'esercizio f), tracciare qualitativamente il luogo delle radici del sistema retroazionato per valori negativi del parametro K . Determinare esattamente gli asintoti, il centro degli asintoti, le intersezioni con l'asse immaginario e i corrispondenti valori del guadagno K . Determinare gli eventuali punti di diramazione solo qualitativamente.

Fondamenti di Controlli Automatici -
A.A. 2012/13
11 febbraio 2014 - Quiz di Teoria

Cognome	
Nome	
Matricola	
Corso	

Per ciascuno dei test a soluzione multipla segnare con una crocetta tutte le affermazioni che si ritengono giuste. In ogni quiz almeno una affermazione è corretta.

La prova di teoria si ritiene superata se vengono totalizzati almeno 5 punti su 10; diversamente il compito verrà ritenuto insufficiente a prescindere dal risultato della seconda parte della prova (esercizi).

1. La funzione di trasferimento $G(s) = \frac{Y(s)}{X(s)} = \frac{2s^2 + s + 3}{5s^3 + s^2 + 3s}$ corrisponde all'equazione differenziale:

- $3\dot{x}(t) + \ddot{x}(t) + 5\ddot{\dot{x}}(t) = 3y(t) + \dot{y}(t) + 2\ddot{y}(t)$
- $3y(t) + \dot{y}(t) + 5\ddot{y}(t) = 3x(t) + \dot{x}(t) + 2\ddot{x}(t)$
- $3\dot{y}(t) + \ddot{y}(t) + 5\ddot{\dot{y}}(t) = 3x(t) + \dot{x}(t) + 2\ddot{x}(t)$
- nessuna delle precedenti

2. I due poli di un sistema del secondo ordine sono univocamente determinati se vengono assegnate le seguenti specifiche

- coefficiente di smorzamento δ e tempo di assestamento T_a
- massima sovraelongazione S e picco di risonanza M_R
- tempo di assestamento T_a e picco di risonanza M_R

3. La derivata iniziale della risposta al gradino unitario del sistema $G(s) = \frac{s+3}{s^2+9s}$ è pari a:

- 0
- ∞
- 1
- 1/3

4. Dato il sistema $G(s) = \frac{(s+3)^2}{s^2(s^2+4s+25)}$ posto in retroazione unitaria negativa (che si suppone stabile) risulta

- errore a regime nullo per ingresso a gradino
- errore a regime nullo per ingresso a rampa
- errore a regime nullo per ingresso a parabola
- errore a regime limitato ma non nullo per ingresso a rampa

5. Per $\omega = 1/a$ il diagramma "reale" di Bode delle ampiezze della funzione $G(j\omega) = \frac{1}{(1+j a \omega)^2}$ (con $a > 0$)

- vale $\frac{1}{\sqrt{2}}$
- vale 1
- vale 1/2
- vale $\simeq -3$ dB

6. La funzione di risposta armonica $F(\omega)$ di un sistema lineare $G(s)$ asintoticamente stabile

- determina univocamente la risposta all'impulso $g(t)$
- è determinata univocamente dalla risposta all'impulso $g(t)$
- non è definibile se $G(s)$ presenta degli zeri a parte reale positiva

7. Applicando l'ingresso $u(t) = \sin(2t)$ al sistema $\dot{y}(t) + 2y(t) = 4u(t)$ si ottiene la seguente uscita a regime:

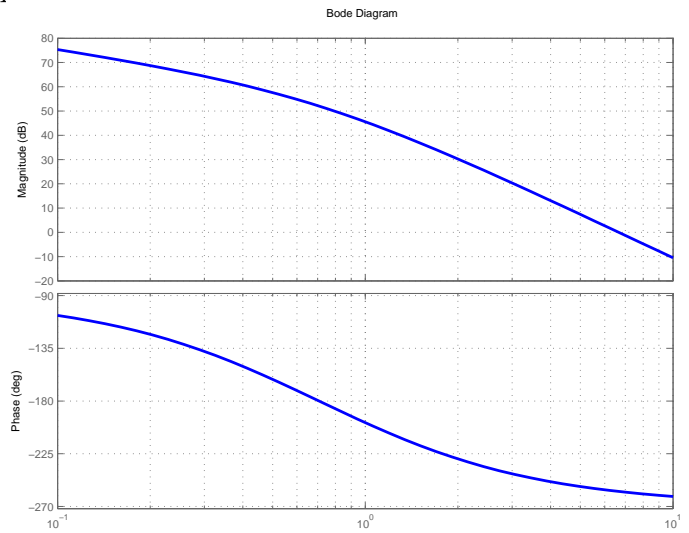
- $y(t) = \frac{4}{\sqrt{2}} \sin(2t + 45^\circ)$
- $y(t) = \frac{4}{\sqrt{2}} \sin(2t - 45^\circ)$
- $y(t) = \frac{2}{\sqrt{2}} \sin(2t + 45^\circ)$
- $y(t) = \frac{2}{\sqrt{2}} \sin(2t - 45^\circ)$

8. Il metodo della Trasformata di Laplace nella risoluzione di equazioni differenziali lineari a parametri concentrati

- permette di calcolare la risposta libera del sistema
- permette di calcolare la risposta forzata del sistema
- può essere utilizzato solo nel caso di equazioni tempo invarianti
- può essere utilizzato anche nel caso di equazioni tempo varianti

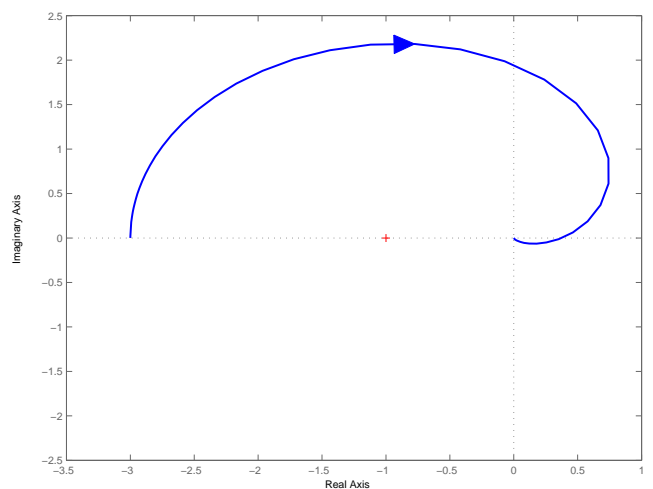
9. Si faccia riferimento ai diagrammi di Bode riportati a fianco relativi a un sistema $G(s)$ a fase minima. Il margine di ampiezza M_α e il margine di fase M_φ sono:

- $M_\alpha \simeq 52 \text{ dB}$ e $M_\varphi \simeq 77^\circ$
- $M_\alpha \simeq 52 \text{ dB}$ e $M_\varphi \simeq -77^\circ$
- $M_\alpha \simeq -52 \text{ dB}$ e $M_\varphi \simeq 77^\circ$
- $M_\alpha \simeq -52 \text{ dB}$ e $M_\varphi \simeq -77^\circ$



10. Sia dato il diagramma di Nyquist (per pulsazioni positive) della funzione $G(s) = \frac{-3}{(s+1)^3}$. In base al criterio di Nyquist è possibile affermare che il sistema retroazionato $KG(s)$ è stabile per valori di K

- $0 < K < K_1$, dove $K_1 > 0$
- $K > K_1$, dove $K_1 > 0$
- $K_1 < K < K_2$, dove $K_1 < 0$ e $K_2 > 0$
- $K < K_1 \cup K > K_2$, dove $K_1 < 0$ e $K_2 > 0$



Cognome	
Nome	
Matricola	
Corso	

a) Determinare la trasformata di Laplace $X_i(s)$ dei seguenti segnali temporali $x_i(t)$:

$$x_1(t) = (5 + e^{-3t}) \cos(3t), \quad x_2(t) = 2(\delta(t) + 1 + t^3 e^{-t})$$

Soluzione:

$$X_1(s) = \frac{5s}{s^2 + 9} + \frac{s + 3}{(s + 3)^2 + 9}, \quad X_2(s) = 2 + \frac{2}{s} + \frac{12}{(s + 1)^4}$$

b) Calcolare la risposta impulsiva $g_i(t)$ delle seguenti funzioni di trasferimento $G_i(s)$:

$$G_1(s) = \frac{9s^2 + 32s + 24}{s^3 + 6s^2 + 8s}, \quad G_2(s) = \frac{s - 1}{(s + 2)^2(s + 1)}$$

Soluzione:

La funzione $G_1(s)$ può essere riscritta come

$$G_1(s) = \frac{1}{s + 2} + \frac{5}{s + 4} + \frac{3}{s}$$

pertanto la sua risposta impulsiva risulta

$$g_1(t) = e^{-2t} + 5e^{-4t} + 3.$$

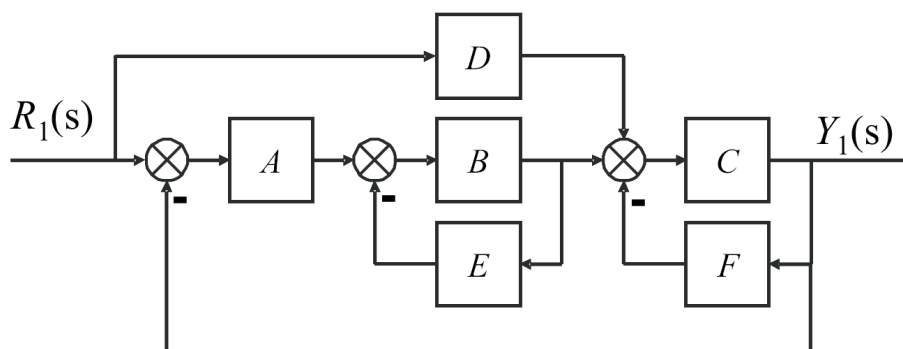
La funzione $G_2(s)$ può essere riscritta come

$$G_2(s) = \frac{2}{s + 2} + \frac{3}{(s + 2)^2} - \frac{2}{s + 1}$$

di conseguenza la sua risposta impulsiva risulta

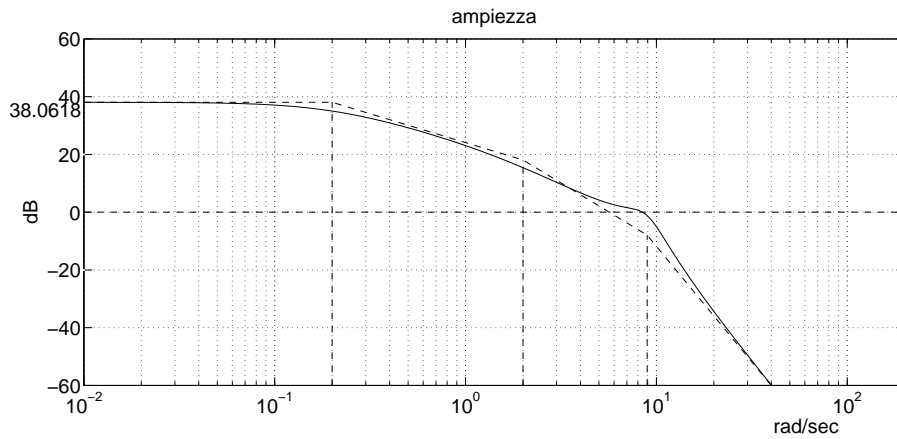
$$g_2(t) = 2e^{-2t} + 3te^{-2t} - 2e^{-t}$$

c) Dato il seguente schema a blocchi, utilizzando la formula di Mason, calcolare la funzione di trasferimento $G(s) = \frac{Y_1(s)}{R_1(s)}$:



$$G(s) = \frac{Y_1(s)}{R_1(s)} = \frac{ABC + DC(1 + BE)}{1 + BE + CF + ABC + BECF}$$

- d) Dato il sistema, supposto a fase minima, che dà luogo al diagramma di Bode delle ampiezze di figura



rispondere ai seguenti quesiti:

- d.1) Calcolare il valore a regime y_∞ dell'uscita $y(t)$ del sistema a un gradino in ingresso di ampiezza 4, $x(t) = 4$.

Soluzione: La risposta a regime al gradino di ampiezza $A = 4$ risulta

$$y_\infty = A |G(0)| = 320$$

essendo $|G(0)| = 10^{\frac{38.0616}{20}} = 80$.

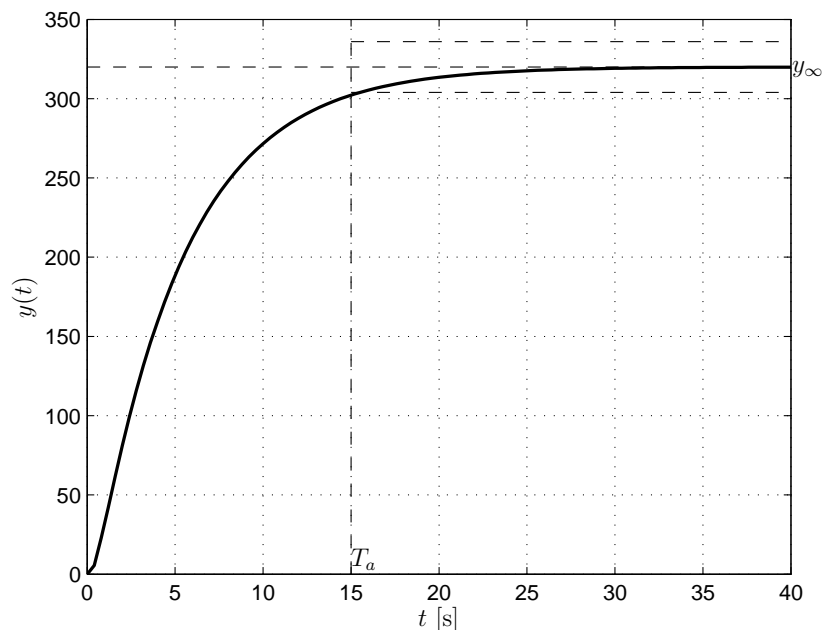
- d.2) Stimare qualitativamente il tempo di assestamento T_a del sistema e il periodo T_w dell'eventuale oscillazione smorzata.

Soluzione: Come si evince dal diagramma di Bode il sistema ha un polo dominante reale con costante di tempo $\tau = 5$ (infatti il primo punto di rottura per valori crescenti della pulsazione è in $\omega = 0.2$ e risulta relativo a un polo reale, mentre il successivo polo è ancora reale e quindi non può essere più dominante e infine l'ultimo punto di rottura che si incontra è relativo a una coppia di poli complessi coniugati con $\omega_n = 9$ e $\delta \approx 0.2$ per cui il valore assoluto della parte reale sarà circa $\delta\omega_n \approx 1.8$ ben al di sopra di 0.2) per cui la risposta sarà aperiodica (senza sovraelongazioni) e con un tempo di assestamento

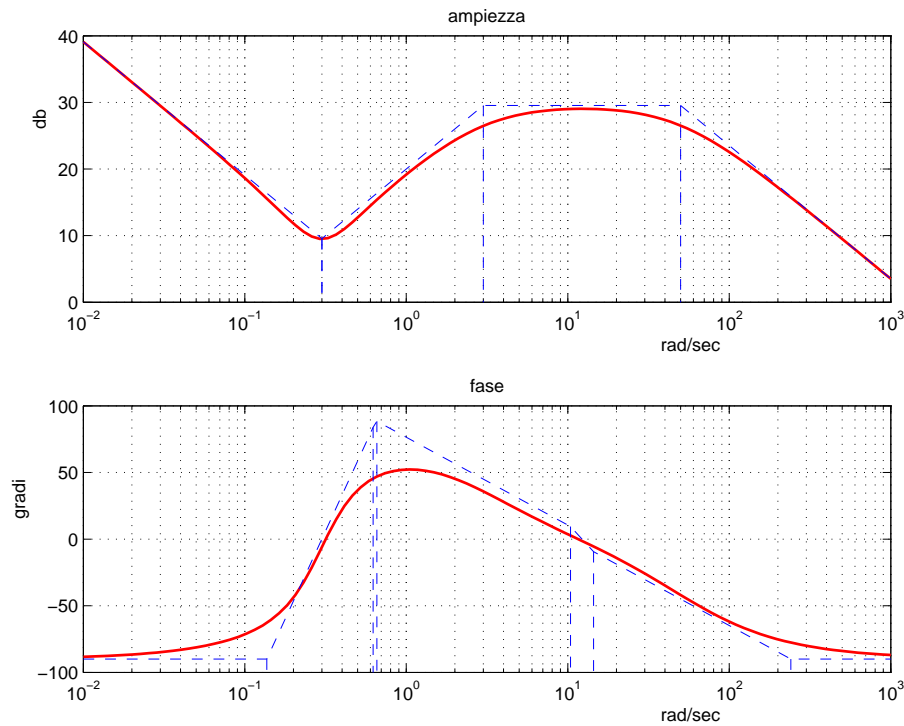
$$T_a = 3\tau = 15 \text{ s.}$$

- d.3) Disegnare l'andamento qualitativo della risposta $y(t)$ al gradino di ampiezza 4.

Soluzione: In figura è riportata la risposta del sistema.



e) Facendo riferimento ai diagrammi di Bode della funzione $G(s)$ mostrati in figura

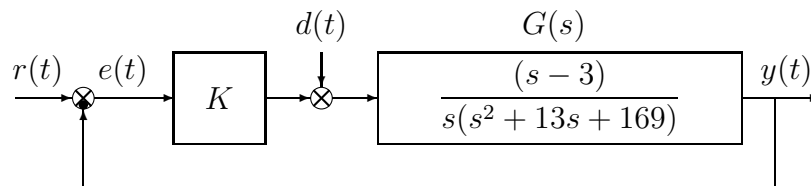


si ricavi l'espressione analitica della funzione $G(s)$.

Soluzione

$$G(s) = \frac{1500(s^2 + 0.3s + 0.09)}{s(s + 50)(s + 3)}$$

f) Sia dato il seguente sistema retroazionato:



f.1) Determinare per quali valori del parametro K il sistema retroazionato è asintoticamente stabile.

Soluzione:

l'equazione caratteristica del sistema retroazionato è

$$1 + K \frac{(s-3)}{s(s^2+13s+169)} = 0 \quad \rightarrow \quad s^3 + 13s^2 + (169+K)s - 3K = 0$$

La corrispondente tabella di Routh è la seguente

3	1	169 + K	
2	13	-3K	
1	2197 + 16K		→ K > -137.3
0	-3K		→ K < 0

Quindi il sistema retroazionato è asintoticamente stabile per:

$$K^* = -137.3 < K < 0$$

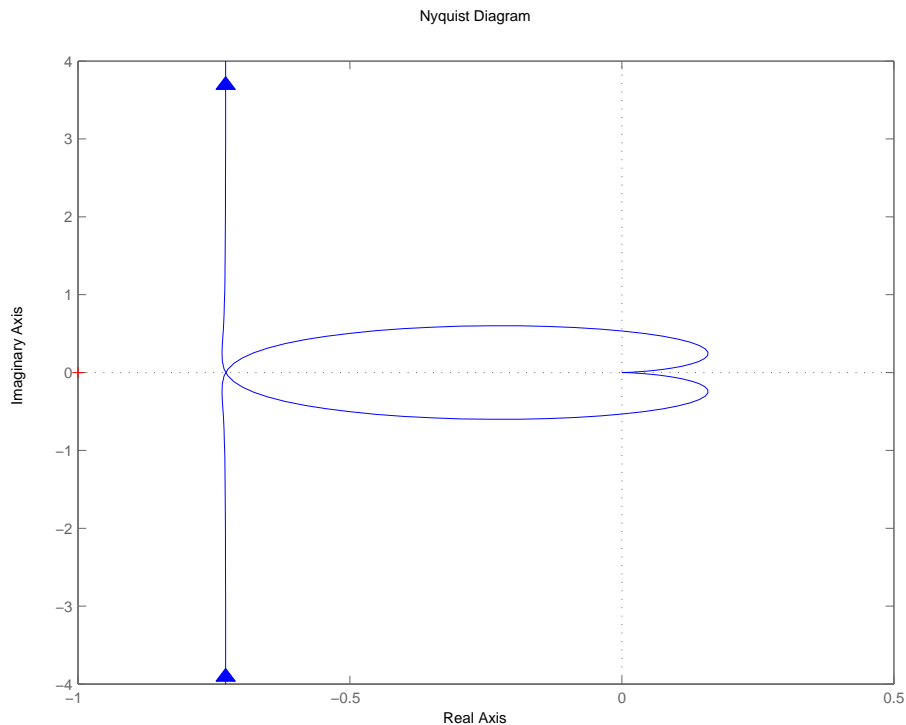
La pulsazione ω^* corrispondente al valore limite K^* è:

$$\omega^* = \sqrt{\frac{-3K^*}{13}} \simeq 5.63 \text{ rad/s}$$

f.2) Posto $K = -100$ disegnare qualitativamente il diagramma di Nyquist completo della funzione d'anello $KG(s)$. Calcolare esattamente la posizione σ_0 di un eventuale asintoto, le eventuali intersezioni con l'asse reale e i corrispondenti valori delle pulsazioni.

Soluzione:

Il diagramma di Nyquist della funzione $KG(s)$ è riportato in figura.



La funzione approssimante per $\omega \rightarrow 0$ è

$$G_0(s) = \frac{1.77}{s}$$

pertanto il diagramma parte all'infinito con fase iniziale $\varphi_0 = -\frac{\pi}{2}$.

La funzione approssimante per $\omega \rightarrow \infty$ è

$$G_\infty(s) = \frac{-100}{s^2}$$

e quindi il diagramma giunge nell'origine con fase finale $\varphi_\infty = -2\pi$.

Il parametro Δ_τ vale

$$\Delta_\tau = -\frac{1}{3} - \frac{1}{13} = -0.4103 < 0$$

pertanto il diagramma parte in ritardo rispetto alla fase iniziale φ_0 .

Il sistema è di tipo 1 pertanto esiste un asintoto verticale la cui ascissa è

$$\sigma_0 = 1.77\Delta_\tau = -0.7262$$

Il parametro Δ_p vale

$$\Delta_p = 3 + 13 = 16 > 0$$

pertanto il diagramma arriva in anticipo rispetto alla fase finale φ_∞ .

Lo sfasamento complessivo è

$$\Delta\varphi = -\frac{3}{2}\pi$$

Esiste una sola intersezione con l'asse reale (oltre a quella nell'origine) nel punto di ascissa

$$\sigma_1^* = -K/K^* = 100 / -137.3 = -0.7283$$

dove K^* è stato calcolato con l'analisi di Routh del punto precedente. La corrispondente pulsazione ω^* è:

$$\omega^* = \sqrt{\frac{-3K^*}{13}} \simeq 5.63 \text{ rad/s}$$

- f.3) Posto $K = -100$, calcolare l'errore a regime $e(\infty)$ quando sul sistema retroazionato siano applicati contemporaneamente il segnale $r(t) = 4$ e il disturbo $d(t) = 2 \sin(2t)$.

Soluzione:

Dato che il sistema è lineare e soggetto quindi alla sovrapposizione degli effetti, l'errore $E(s)$, espresso mediante la trasformata di Laplace, risulterà:

$$E(s) = E_r(s) + E_d(s)$$

dove $E_r(s)$ è l'errore dovuto al riferimento mentre $E_d(s)$ è l'errore dovuto al disturbo. L'errore $e_r(\infty)$ dovuto al riferimento sarà nullo in quanto si considera un ingresso a gradino in un sistema di tipo 1. Di conseguenza il calcolo dell'errore a regime si riduce a quello dovuto al disturbo $d(t)$:

$$E_d(s) = F_d(s)D(s)$$

dove $D(s)$ è la trasformata di Laplace di $d(t)$ e $F_d(s)$ è la funzione di trasferimento tra $D(s)$ e $E_d(s)$ che vale

$$F_d(s) = -\frac{G(s)}{1 + KG(s)} = \frac{-(s-3)}{s^3 + 13s^2 + 69s + 300}$$

Essendo $d(t)$ un segnale sinusoidale, per trovarne la risposta a regime si sfrutta il concetto di risposta armonica, per cui $e_d(t) = 2|F_d(j2)| \sin(t + \arg\{F_d(j2)\})$ con $|F_d(j2)| = 0.0129$ e $\arg\{F_d(j2)\} \simeq 299^\circ$. In conclusione

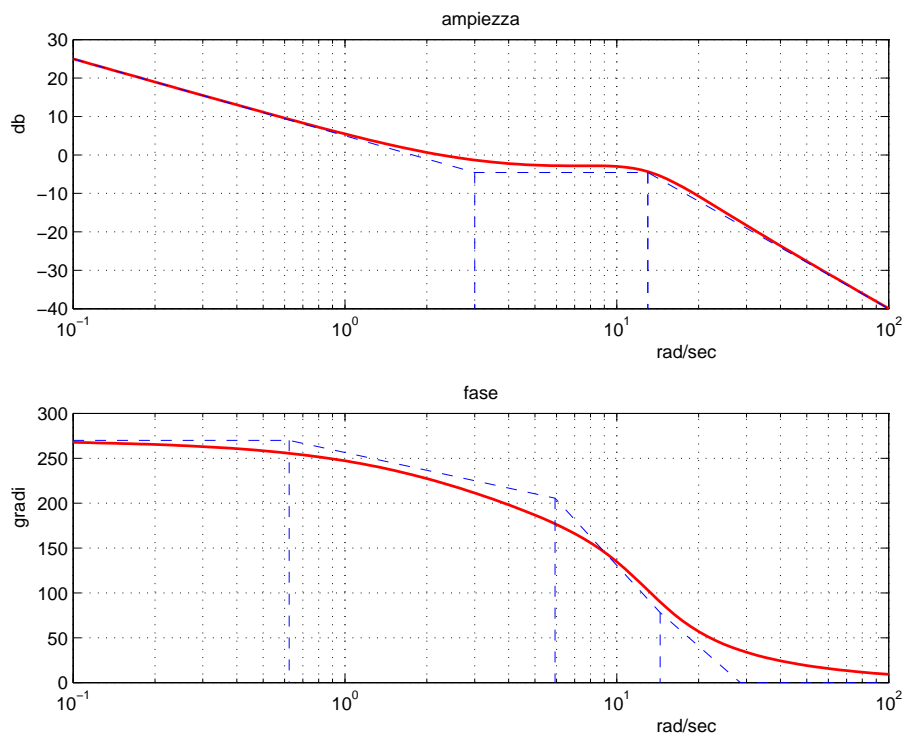
$$e(\infty) = e_r(\infty) + e_d(\infty) = 0 + 0.0258 \sin(2t + 299^\circ)$$

- f.4) Posto nuovamente $K = -100$, tracciare (nello schema fornito in allegato) i diagrammi di Bode delle ampiezze e delle fasi del guadagno di anello $KG(s)$.

Soluzione:

In figura sono riportati i diagrammi di Bode del sistema. Sul diagramma asintotico delle ampiezze il guadagno β in corrispondenza della pulsazione $\omega = 3$ è $\beta = \left| \frac{1.77}{3} \right| = 0.59 = -4.6$ dB.

Il coefficiente di smorzamento della coppia di poli complessi coniugati è $\delta = 0.5$ pertanto si avrà $M_{\omega_n} = \frac{1}{2\delta} = 1 = 0$ dB.



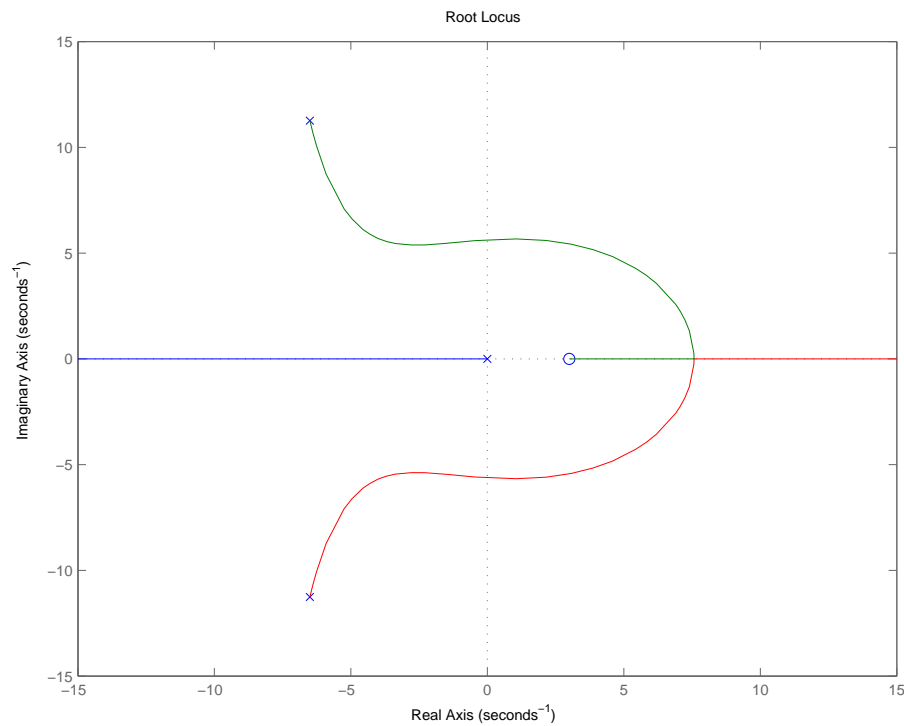
- g) Non è richiesto lo svolgimento di questo esercizio agli iscritti ad Ingegneria Ambientale o a corsi per i quali l'esame è inferiore a 6 CFU.

Con riferimento al sistema descritto nell'esercizio f), tracciare qualitativamente il luogo delle radici del sistema retroazionato per valori negativi del parametro K . Determinare esattamente gli asintoti, il centro degli asintoti, le intersezioni con l'asse immaginario e i corrispondenti valori del guadagno K . Determinare gli eventuali punti di diramazione solo qualitativamente.

Soluzione: Essendo 2 il grado relativo del sistema, esistono 2 asintoti che formano una stella con centro nel punto sull'asse reale di ascissa

$$\sigma_a = \frac{1}{2}(-13 - 3) = -8$$

e che in questo caso appartengono all'asse reale. Il luogo delle radici finale è riportato nella seguente figura.



Dall'analisi svolta mediante il criterio di Routh, risulta che il luogo delle radici attraversa l'asse immaginario in corrispondenza di $\pm j\omega^* = \pm j5.63$ per $K = K^* = -137.3$.

Fondamenti di Controlli Automatici
Diagrammi di Bode

Cognome	
Nome	
Matricola	
Corso	

Bode Plot

