Fondamenti di Controlli Automatici - A.A. 2012/13
10 luglio 2013 - Quiz di Teoria

Cognome	
Nome	
Matricola	
Corso	

Per ciascuno dei test a soluzione multipla segnare con una crocetta tutte le affermazioni che si ritengono giuste. In ogni quiz almeno una affermazione è corretta.

La prova di teoria si ritiene superata se vengono totalizzati almeno 5 punti su 10; diversamente il compito verrà ritenuto insufficiente a prescindere dal risultato della seconda parte della prova (esercizi).

1. Per $\omega = 1/\tau$ il diagramma "reale" di Bode delle ampiezze della funzione $G(j\omega) = \frac{1}{1+j\tau\omega}$
   - ◯ vale 1
   - ◯ vale $\simeq -3$ dB
   - ◯ vale $\simeq 3$ dB
   - ◯ vale $1/2$
2. Un sistema di tipo 1
   - ◯ ha uno zero nell'origine
   - ◯ ha un polo nell'origine
   - ◯ ha un errore a regime nullo nella risposta al gradino
   - ◯ ha un errore a regime costante ma non nullo nella risposta al gradino
3. Il metodo della Trasformata di Laplace nella risoluzione di equazioni differenziali lineari a parametri concentrati
   - ◯ permette di calcolare la risposta libera del sistema
   - ◯ permette di calcolare la risposta forzata del sistema
   - ◯ può essere utilizzato solo nel caso di equazioni tempo invarianti
   - ◯ può essere utilizzato anche nel caso di equazioni tempo varianti
4. Sia $\mathcal{L}[f(t)] = F(s)$ la trasformata di Laplace della funzione $f(t)$. Vale la relazione:
   - ◯ $\mathcal{L}\left[\frac{df}{dt}\right] = \frac{1}{s}F(s) - f(0^-)$
   - ◯ $\mathcal{L}\left[\frac{df}{dt}\right] = sF(s)$
   - ◯ $\mathcal{L}\left[\frac{df}{dt}\right] = sF(s) - f(0^-)$
   - ◯ $\mathcal{L}\left[\frac{df}{dt}\right] = \frac{1}{s}F(s)$
5. Il valore iniziale della risposta al gradino unitario del sistema $G(s) = \frac{s^3 + 2s^2 + 12}{5s^3 + 3s^2 + s + 2}$ è pari a:
   - ◯ ∞
   - ◯ 0
   - ◯ 1/5
   - ◯ 6

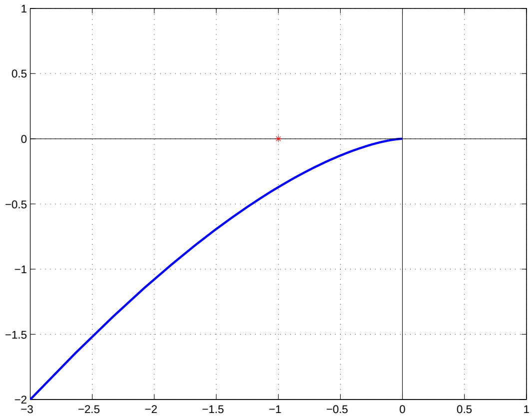
6. La funzione di trasferimento $G(s) = \frac{Y(s)}{X(s)}$ corrispondente all'equazione differenziale $\dddot{y} + \ddot{y} + 3\dot{y} = 4\ddot{x} + 2\dot{x} + 3x$ è:

○ $G(s) = \dfrac{s^3 + s^2 + 3s}{4s^2 + 2s + 3}$

○ $G(s) = \dfrac{4s^2 + 2s + 3}{s^2 + s + 3}$

○ $G(s) = \dfrac{4s^2 + 2s + 3}{s^3 + s^2 + 3s}$

7. Il sistema $G(s) = \dfrac{(1 + \tau_1 s)}{s^2(1 + \tau_2 s)}$, $\tau_1 > \tau_2 > 0$, di cui in figura è riportato il diagramma di Nyquist per valori positivi delle ω, posto in retroazione negativa con un guadagno K:



○ sarà stabile $\forall K$

○ sarà stabile $\forall K > 0$

○ sarà stabile $\forall K < 0$

○ sarà sempre instabile

8. Sia $y(t) = M(\omega)\cos(\omega t + \alpha(\omega) + \varphi_0)$ la risposta asintotica di un sistema lineare stabile all'ingresso $x(t) = N\cos(\omega t + \varphi_0)$. Utilizzando i simboli che caratterizzano i segnali $x(t)$ e $y(t)$ la "definizione" di funzione di risposta armonica $F(\omega)$ è:

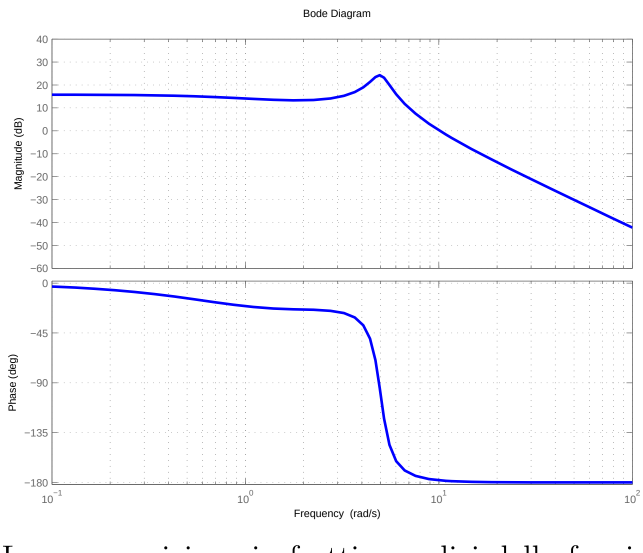
○ $F(\omega) = \frac{N}{M(\omega)}\, e^{j\alpha(\omega)}$

○ $F(\omega) = \frac{M(\omega)}{N}\, e^{-j\alpha(\omega)}$

○ $F(\omega) = \frac{M(\omega)}{N}\, e^{j\alpha(\omega)}$

○ $F(\omega) = M(\omega)\, N\, e^{j\alpha(\omega)}$

9. La risposta del sistema di cui in figura sono riportati i diagrammi di Bode al segnale $x(t) = 2\cos(4t)$ risulta:



○ $y(t) \approx 17\cos(4t + 36^o)$;

○ $y(t) \approx 20\cos(4t - 36^o)$;

○ $y(t) \approx 32\cos(4t - 100^o)$;

○ $y(t) \approx 17\cos(4t - 36^o)$.

10. Sia $G(s)$ una funzione razionale fratta in s. La scomposizione in fratti semplici della funzione $G(s)$ mediante il metodo dei residui:

○ è sempre possibile;

○ è possibile solo se la funzione $G(s)$ è propria;

○ è possibile solo se la funzione $G(s)$ è strettamente propria.

Fondamenti di Controlli Automatici - A.A. 2012/13

10 luglio 2013 - Esercizi

Cognome	
Nome	
Matricola	
Corso	

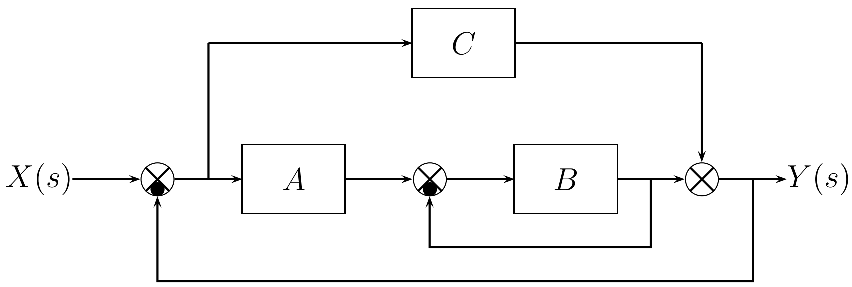
a) Determinare la trasformata di Laplace $X_i(s)$ dei seguenti segnali temporali $x_i(t)$:

$$x_1(t) = 2\delta(t) + \frac{e^{-t}}{3}\sin(5t), \qquad x_2(t) = 3t^3\, e^{-3t} + 2$$

b) Calcolare la risposta impulsiva $g_i(t)$ delle seguenti funzioni di trasferimento $G_i(s)$:

$$G_1(s) = \frac{2s^2+7s+3}{s^2+s}, \qquad G_2(s) = \frac{5s^2+18s+4}{(s+2)^2(s-1)}$$

c) Dato il seguente schema a blocchi:

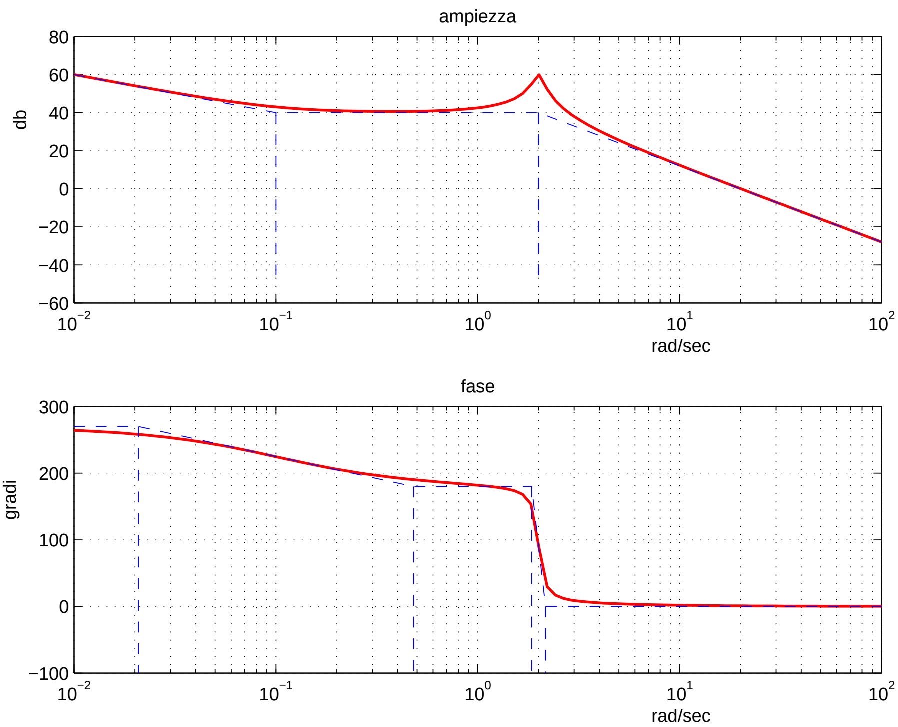


utilizzando la formula di Mason calcolare la funzione di trasferimento $G(s)$ che lega l'ingresso $X(s)$ all'uscita $Y(s)$:

$$G(s) = \frac{Y(s)}{X(s)} =$$

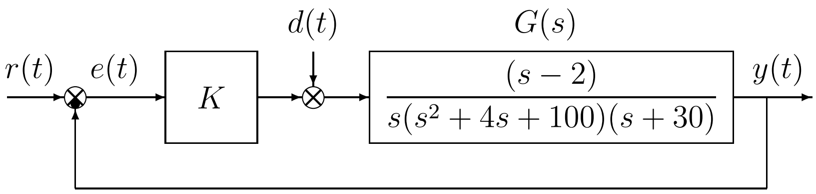
d) Sia data la funzione di trasferimento $G(s) = \dfrac{(s+5)}{(s^2+2s+5)(s+10)(1+0.01s)}$.
Disegnare l'andamento qualitativo della risposta $y(t)$ a un gradino in ingresso di ampiezza 10, $x(t) = 10$. Calcolare il valore a regime y_∞ dell'uscita $y(t)$ del sistema, stimare qualitativamente il tempo di assestamento T_a del sistema e il periodo T_ω dell'eventuale oscillazione smorzata.

e) Facendo riferimento ai diagrammi di Bode della funzione $G(s)$ mostrati in figura



si ricavi l'espressione analitica della funzione $G(s)$.

f) Sia dato il seguente sistema retroazionato:



f.1) Determinare per quali valori del parametro K il sistema retroazionato è asintoticamente stabile.

f.2) Posto $K = -1000$ disegnare qualitativamente il diagramma di Nyquist completo della funzione d'anello $KG(s)$. Calcolare esattamente la posizione σ_0 di un eventuale asintoto, le eventuali intersezioni con l'asse reale e i corrispondenti valori delle pulsazioni.

f.3) Posto $K = -1000$, calcolare l'errore a regime $e(\infty)$ quando sul sistema retroazionato viene applicato il segnale $r(t) = 1 + 2t$ (mentre il disturbo $d(t) = 0$).

f.4) Posto $K = -1000$, tracciare (nello schema fornito in allegato) i diagrammi di Bode delle ampiezze e delle fasi del guadagno di anello $K\,G(s)$.

g) **Non è richiesto lo svolgimento di questo esercizio agli iscritti ad Ingegneria Ambientale.**

Con riferimento al sistema descritto nell'esercizio f), tracciare qualitativamente il luogo delle radici del sistema retroazionato per valori negativi del parametro K. Determinare esattamente gli asintoti, il centro degli asintoti, le intersezioni ω^* con l'asse immaginario e i corrispondenti valori K^* del guadagno. (Suggerimento: esistono due punti di diramazione in -19.2 e 5.1).

Cognome	
Nome	
Matricola	
Corso	

Fondamenti di Controlli Automatici - A.A. 2012/13
10 luglio 2013 - Quiz di Teoria

Per ciascuno dei test a soluzione multipla segnare con una crocetta tutte le affermazioni che si ritengono giuste. In ogni quiz almeno una affermazione è corretta.

La prova di teoria si ritiene superata se vengono totalizzati almeno 5 punti su 10; diversamente il compito verrà ritenuto insufficiente a prescindere dal risultato della seconda parte della prova (esercizi).

1. Per $\omega = 1/\tau$ il diagramma "reale" di Bode delle ampiezze della funzione $G(j\omega) = \frac{1}{1+j\tau\omega}$

   ○ vale 1
   ⊗ vale $\simeq -3$ dB
   ○ vale $\simeq 3$ dB
   ○ vale 1/2

2. Un sistema di tipo 1

   ○ ha uno zero nell'origine
   ⊗ ha un polo nell'origine
   ⊗ ha un errore a regime nullo nella risposta al gradino
   ○ ha un errore a regime costante ma non nullo nella risposta al gradino

3. Il metodo della Trasformata di Laplace nella risoluzione di equazioni differenziali lineari a parametri concentrati

   ⊗ permette di calcolare la risposta libera del sistema
   ⊗ permette di calcolare la risposta forzata del sistema
   ⊗ può essere utilizzato solo nel caso di equazioni tempo invarianti
   ○ può essere utilizzato anche nel caso di equazioni tempo varianti

4. Sia $\mathcal{L}[f(t)] = F(s)$ la trasformata di Laplace della funzione $f(t)$. Vale la relazione:

   ○ $\mathcal{L}\left[\frac{df}{dt}\right] = \frac{1}{s}F(s) - f(0^-)$
   ○ $\mathcal{L}\left[\frac{df}{dt}\right] = sF(s)$
   ⊗ $\mathcal{L}\left[\frac{df}{dt}\right] = sF(s) - f(0^-)$
   ○ $\mathcal{L}\left[\frac{df}{dt}\right] = \frac{1}{s}F(s)$

5. Il valore iniziale della risposta al gradino unitario del sistema $G(s) = \frac{s^3 + 2s^2 + 12}{5s^3 + 3s^2 + s + 2}$ è pari a:

   ○ ∞
   ○ 0
   ⊗ 1/5
   ○ 6

6. La funzione di trasferimento $G(s) = \frac{Y(s)}{X(s)}$ corrispondente all'equazione differenziale $\dddot{y} + \ddot{y} + 3\dot{y} = 4\ddot{x} + 2\dot{x} + 3x$ è:

   ◯ $G(s) = \dfrac{s^3 + s^2 + 3s}{4s^2 + 2s + 3}$

   ◯ $G(s) = \dfrac{4s^2 + 2s + 3}{s^2 + s + 3}$

   ⊗ $G(s) = \dfrac{4s^2 + 2s + 3}{s^3 + s^2 + 3s}$

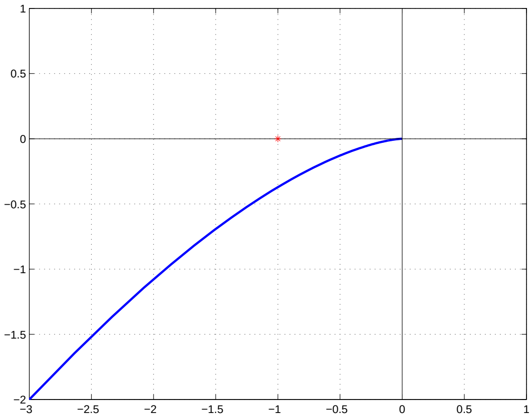
7. Il sistema $G(s) = \dfrac{(1 + \tau_1 s)}{s^2(1 + \tau_2 s)}$, $\tau_1 > \tau_2 > 0$, di cui in figura è riportato il diagramma di Nyquist per valori positivi delle ω, posto in retroazione negativa con un guadagno K:

   ◯ sarà stabile $\forall K$

   ⊗ sarà stabile $\forall K > 0$

   ◯ sarà stabile $\forall K < 0$

   ◯ sarà sempre instabile



8. Sia $y(t) = M(\omega)\cos(\omega t + \alpha(\omega) + \varphi_0)$ la risposta asintotica di un sistema lineare stabile all'ingresso $x(t) = N\cos(\omega t + \varphi_0)$. Utilizzando i simboli che caratterizzano i segnali $x(t)$ e $y(t)$ la "definizione" di funzione di risposta armonica $F(\omega)$ è:

   ◯ $F(\omega) = \frac{N}{M(\omega)}\, e^{j\alpha(\omega)}$

   ◯ $F(\omega) = \frac{M(\omega)}{N}\, e^{-j\alpha(\omega)}$

   ⊗ $F(\omega) = \frac{M(\omega)}{N}\, e^{j\alpha(\omega)}$

   ◯ $F(\omega) = M(\omega)\, N\, e^{j\alpha(\omega)}$

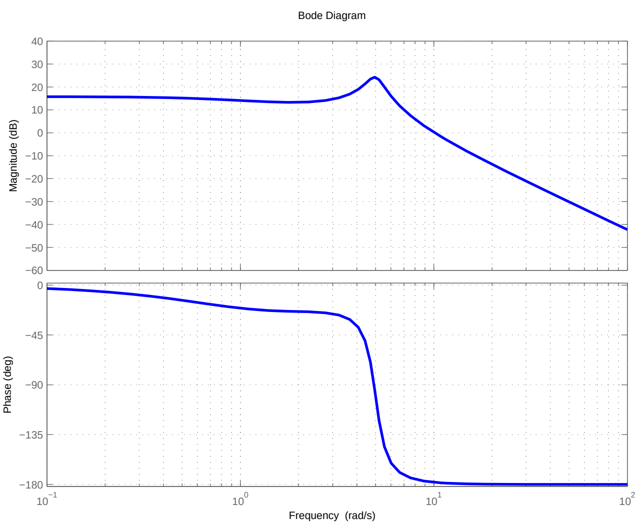
9. La risposta del sistema di cui in figura sono riportati i diagrammi di Bode al segnale $x(t) = 2\cos(4t)$ risulta:

   ◯ $y(t) \approx 17\cos(4t + 36^o)$;

   ◯ $y(t) \approx 20\cos(4t - 36^o)$;

   ◯ $y(t) \approx 32\cos(4t - 100^o)$;

   ⊗ $y(t) \approx 17\cos(4t - 36^o)$.



10. Sia $G(s)$ una funzione razionale fratta in s. La scomposizione in fratti semplici della funzione $G(s)$ mediante il metodo dei residui:

   ◯ è sempre possibile;

   ◯ è possibile solo se la funzione $G(s)$ è propria;

   ⊗ è possibile solo se la funzione $G(s)$ è strettamente propria.

Fondamenti di Controlli Automatici - A.A. 2012/13

10 luglio 2013 - Esercizi

Cognome	
Nome	
Matricola	
Corso	

a) Determinare la trasformata di Laplace $X_i(s)$ dei seguenti segnali temporali $x_i(t)$:

$$x_1(t) = 2\delta(t) + \frac{e^{-t}}{3}\sin(5t), \qquad x_2(t) = 3t^3\, e^{-3t} + 2$$

Soluzione:

$$X_1(s) = 2 + \frac{1}{3}\frac{5}{(s+1)^2+25}, \qquad X_2(s) = \frac{18}{(s+3)^4} + \frac{2}{s},$$

b) Calcolare la risposta impulsiva $g_i(t)$ delle seguenti funzioni di trasferimento $G_i(s)$:

$$G_1(s) = \frac{2s^2+7s+3}{s^2+s}, \qquad G_2(s) = \frac{5s^2+18s+4}{(s+2)^2(s-1)}$$

Soluzione:
La funzione $G_1(s)$ può essere riscritta come

$$G_1(s) = 2 + \frac{3}{s} + \frac{2}{s+1}$$

pertanto la sua risposta impulsiva risulta

$$g_1(t) = 2\delta(t) + 3 + 2\,e^{-t}.$$

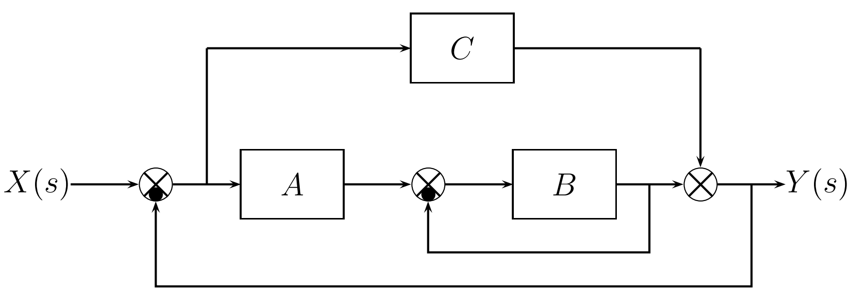
La funzione $G_2(s)$ può essere riscritta come

$$G_2(s) = \frac{4}{(s+2)^2} + \frac{2}{(s+2)} + \frac{3}{(s-1)}$$

di conseguenza la sua risposta impulsiva risulta

$$g_2(t) = 4te^{-2t} + 2e^{-2t} + 3e^{t}$$

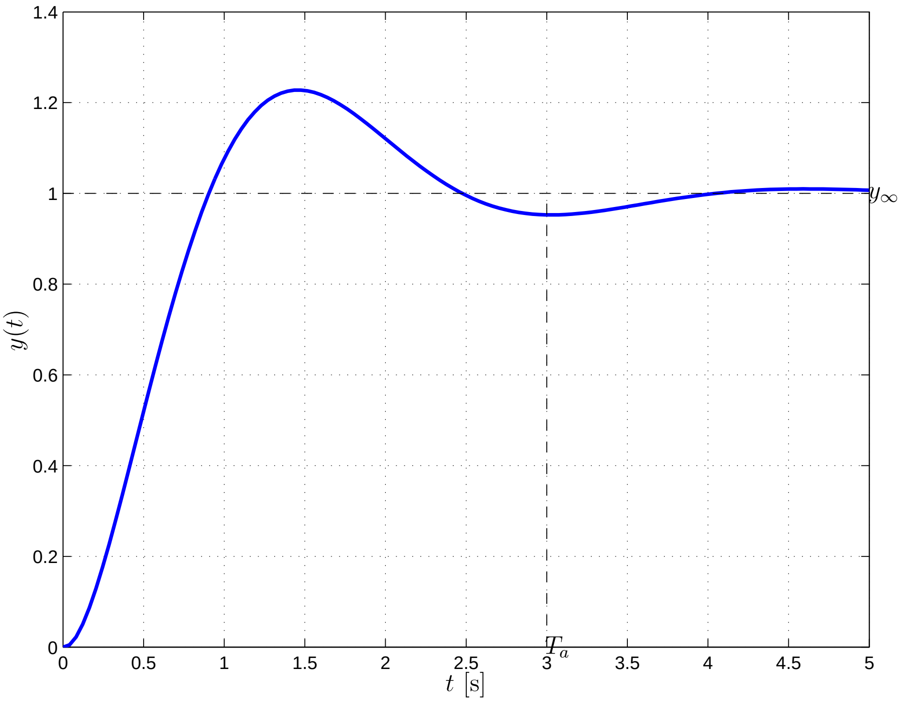
c) Dato il seguente schema a blocchi:



utilizzando la formula di Mason calcolare la funzione di trasferimento $G(s)$ che lega l'ingresso $X(s)$ all'uscita $Y(s)$:

$$G(s) = \frac{Y(s)}{X(s)} = \frac{AB + C(1+B)}{1 + AB + B + C + BC}$$

d) Sia data la funzione di trasferimento $G(s) = \dfrac{(s+5)}{(s^2+2s+5)(s+10)(1+0.01s)}$.
Disegnare l'andamento qualitativo della risposta $y(t)$ a un gradino in ingresso di ampiezza 10, $x(t) = 10$. Calcolare il valore a regime y_∞ dell'uscita $y(t)$ del sistema, stimare qualitativamente il tempo di assestamento T_a del sistema e il periodo T_ω dell'eventuale oscillazione smorzata.
Soluzione: Il sistema ha una coppia di poli dominanti complessi coniugati $p_{1,2} = -1 + j2$ pertanto la risposta al gradino sarà di tipo oscillatorio smorzato. In figura è riportata la risposta del sistema.



Il valore a regime dell'uscita per un gradino in ingresso di ampiezza $A = 10$ risulta

$$y_\infty = A\,G(0) = 10 \cdot 0.1 = 1.$$

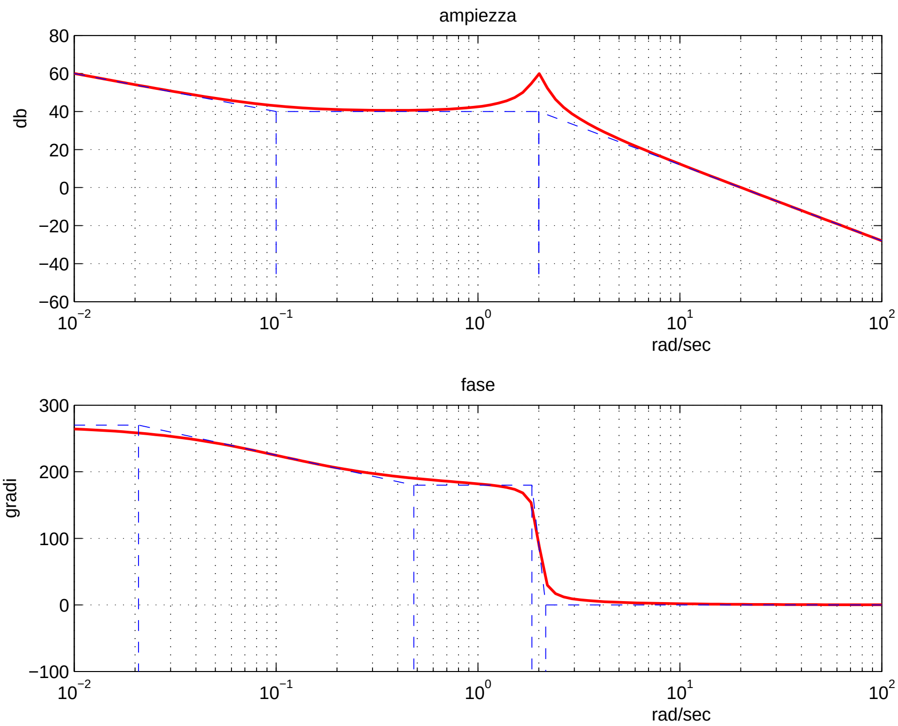
La parte reale dei poli complessi coniugati dominanti è $\sigma = -1$ per cui il tempo di assestamento T_a è

$$T_a = \frac{3}{|\sigma|} = 3 \text{ s},$$

mentre il periodo dell'oscillazione T_ω è dato da

$$T_\omega = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{2\pi}{2} = \pi \text{ s}$$

e) Facendo riferimento ai diagrammi di Bode della funzione $G(s)$ mostrati in figura

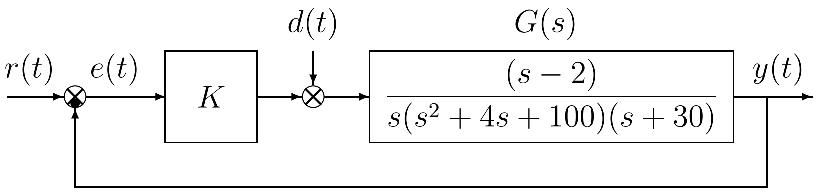


si ricavi l'espressione analitica della funzione $G(s)$.

<u>Soluzione</u>

$$G(s) = \frac{-400\,(s-0.1)}{s(s^2+0.2s+4)}$$

f) Sia dato il seguente sistema retroazionato:



f.1) Determinare per quali valori del parametro K il sistema retroazionato è asintoticamente stabile.

<u>Soluzione:</u> l'equazione caratteristica del sistema retroazionato è

$$1+K\frac{(s-2)}{s(s^2+4s+100)(s+30)} = 0 \qquad \rightarrow \qquad s^4+34s^3+220s^2+(3000+K)s-2K=0$$

La corrispondente tabella di Routh è la seguente

$$\begin{array}{c|ccccc}
4 & 1 & 220 & -2K & & \\
3 & 34 & 3000+K & & & \\
2 & 4480-K & -68K & & \rightarrow & K<4480 \\
1 & (4480-K)(3000+K)+2312K & & & \rightarrow & -2231.3<K<6023.3 \\
0 & -68K & & & \rightarrow & K<0
\end{array}$$

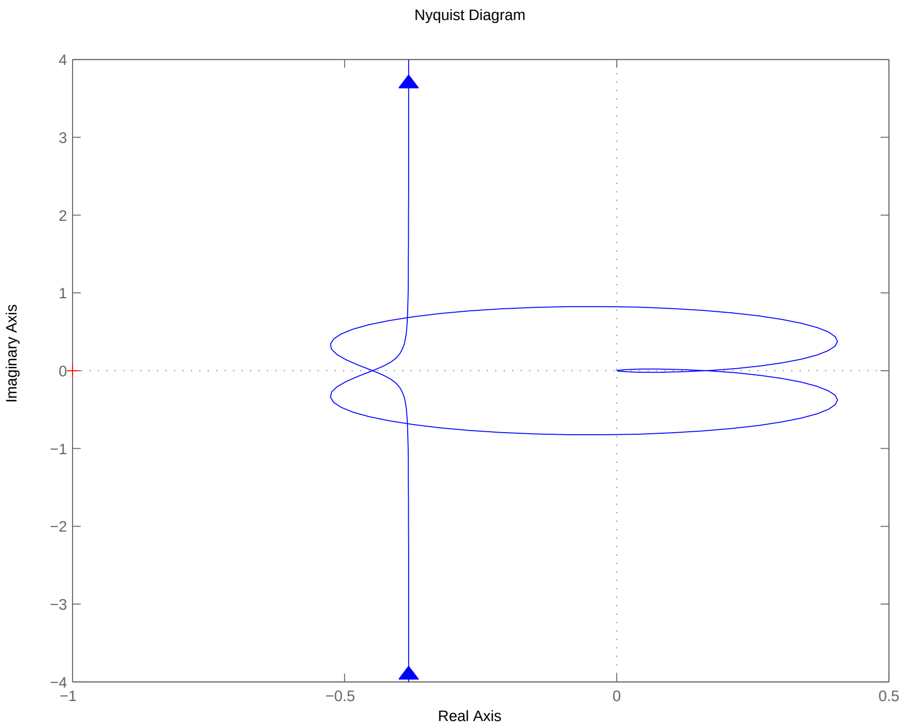
Quindi il sistema retroazionato è asintoticamente stabile per:

$$K^* = -2231.3 < K < 0$$

La pulsazione ω^* corrispondente al valore limite K^* è:

$$\omega^\star = \sqrt{\frac{3000 + K^*}{34}} \simeq 4.75 \text{ rad/s}$$

f.2) Posto $K = -1000$ disegnare qualitativamente il diagramma di Nyquist completo della funzione d'anello $KG(s)$. Calcolare esattamente la posizione σ_0 di un eventuale asintoto, le eventuali intersezioni con l'asse reale e i corrispondenti valori delle pulsazioni. Soluzione: Il diagramma di Nyquist della funzione $G(s)$ è riportato in figura.



La funzione approssimante per $\omega \to 0$ è

$$G_0(s) = \frac{2000}{3000\, s}$$

pertanto il diagramma parte all'infinito con fase iniziale $\varphi_0 = -\frac{\pi}{2}$.
La funzione approssimante per $\omega \to \infty$ è

$$G_\infty(s) = -\frac{1000}{s^3}$$

e quindi il diagramma giunge nell'origine con fase finale $\varphi_\infty = -\frac{5}{2}\pi = -\frac{\pi}{2}$.
Il parametro Δ_τ vale

$$\Delta_\tau = -\frac{1}{2} - \frac{4}{100} - \frac{1}{30} = -0.573 < 0$$

pertanto il diagramma parte in ritardo rispetto alla fase iniziale φ_0.
Il sistema è di tipo 1 pertanto esiste un asintoto verticale la cui ascissa è

$$\sigma_0 = \frac{2}{3}\Delta_\tau = -0.382$$

Il parametro Δ_p vale

$$\Delta_p = 2 + 4 + 30 = 36 > 0$$

pertanto il diagramma arriva in anticipo rispetto alla fase finale φ_∞.
Lo sfasamento complessivo è

$$\Delta\varphi = -2\pi$$

Esistono due intersezioni con l'asse reale che, in virtù dell'analisi svolta con Routh al primo punto, risultano alle ascisse

$$\sigma_1 = -K/K^* = -0.448 \text{ e } \sigma_2 = -K/6023.3 = 0.166$$

Le corrispondenti pulsazioni sono $\omega^* = 4.75$ rad/s e $\omega_2 = 16.29$ rad/s.

f.3) Posto $K = -1000$, calcolare l'errore a regime $e(\infty)$ quando sul sistema retroazionato viene applicato il segnale $r(t) = 1 + 2t$ (mentre il disturbo $d(t) = 0$). Dato che il sistema è lineare e soggetto quindi alla sovrapposizione degli effetti, l'errore $e(t)$ risulterà:

$$e(t) = e_{r1}(t) + e_{r2}(t)$$

dove $e_{r1}(t)$ è l'errore dovuto alla componente $r1(t) = 1$ del riferimento mentre $e_{r2}(t)$ è l'errore dovuto alla componente $r2(t) = 2t$ del riferimento. Senza fare alcun calcolo si può dire che a regime $e_{r1}(\infty)$ sarà nullo, in quanto si considera un ingresso a gradino in un sistema di tipo 1 (cioè con un polo nell'origine), mentre $e_{r2}(\infty)$ sarà costante ma diverso da zero in quanto si considera un ingresso a rampa in un sistema di tipo 1. L'errore a regime sarà quindi dato da:

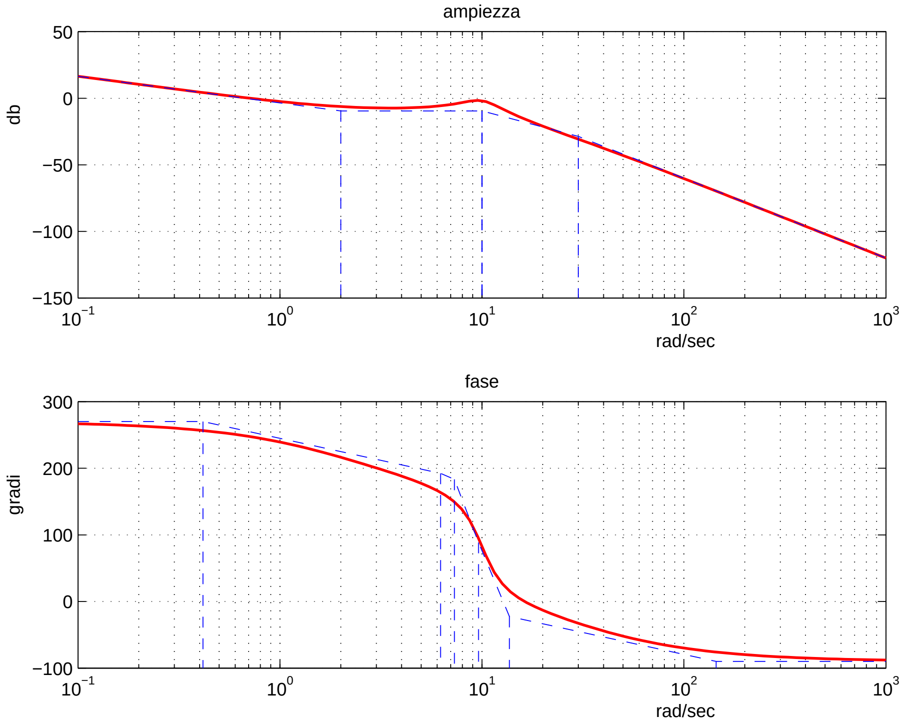
$$e(\infty) = e_{r2}(\infty) = \frac{R_0}{K_v} = \frac{2}{\frac{2}{3}} = 3$$

dove $R_0 = 2$ è la pendenza della rampa e K_v è dato da

$$\lim_{s\to 0} s\, KG(s) = \frac{2}{3}$$

f.4) Posto $K = -1000$, tracciare (nello schema fornito in allegato) i diagrammi di Bode delle ampiezze e delle fasi del guadagno di anello $K\,G(s)$.

<u>Soluzione</u>:
In figura sono riportati i diagrammi di Bode del sistema. Sul diagramma asintotico delle ampiezze il guadagno β in corrispondenza della pulsazione $\omega = 2$ è $\beta = \left|\frac{2\,K}{3000\cdot 2}\right| = \frac{1}{3} = -9.5$ dB.
Il coefficiente di smorzamento della coppia di poli complessi coniugati è $\delta = 0.2$ pertanto si avrà $M_{\omega_n} = \frac{1}{2\delta} = 2.5 \simeq 8$ dB.



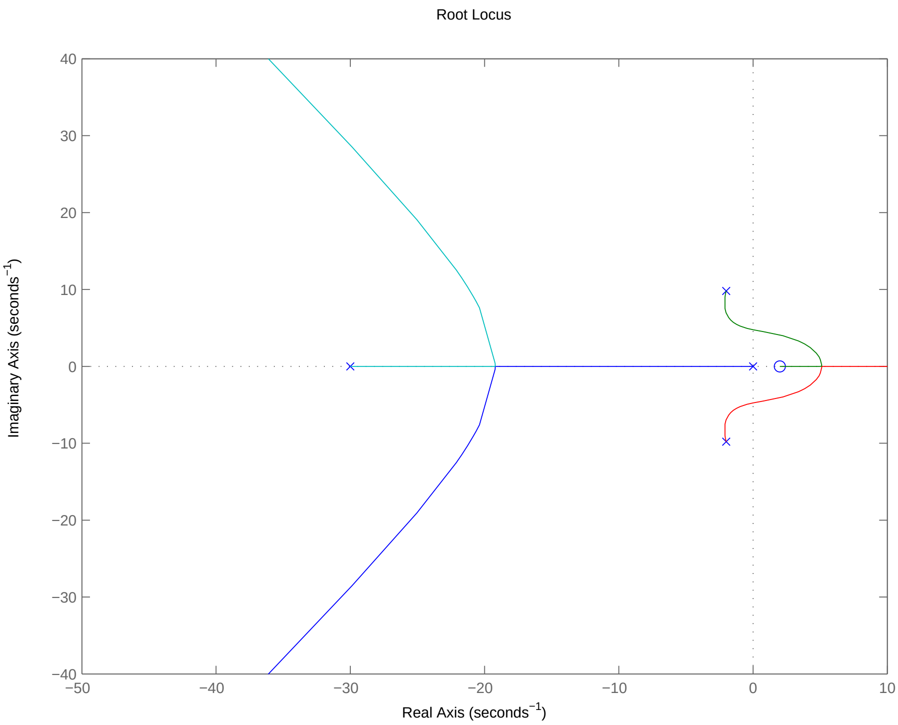
g) **Non è richiesto lo svolgimento di questo esercizio agli iscritti ad Ingegneria Ambientale.**

Con riferimento al sistema descritto nell'esercizio f), tracciare qualitativamente il luogo delle radici del sistema retroazionato per valori negativi del parametro K. Determinare esattamente gli asintoti, il centro degli asintoti, le intersezioni ω^* con l'asse immaginario e i corrispondenti valori K^* del guadagno. (Suggerimento: esistono due punti di diramazione in -19.2 e 5.1).

Soluzione: Essendo 3 il grado relativo del sistema, esistono 3 asintoti che formano una stella con centro nel punto sull'asse reale di ascissa

$$\sigma_a = \frac{1}{3}(-4 - 30 - 2) = -12$$

Il luogo delle radici finale è riportato nella seguente figura.



Dall'analisi svolta mediante il criterio di Routh, risulta che il luogo delle radici attraversa l'asse immaginario, passando dal semipiano sinistro a quello destro, in corrispondenza di $s^* = \pm j\omega^* = \pm j4.75$, per $K = K^* = -2231.3$.

Fondamenti di Controlli Automatici

Diagrammi di Bode

Cognome	
Nome	
Matricola	
Corso