Fondamenti di Controlli Automatici - A.A. 2012/13
9 novembre 2012 - Domande Teoriche

Nome:	
Nr. Mat.	
Firma:	

Per ciascuno dei test a soluzione multipla segnare con una crocetta tutte le affermazioni che si ritengono giuste. In ogni quiz almeno una affermazione è corretta.

1. I due poli di un sistema del secondo ordine sono univocamente determinati se vengono assegnate le seguenti specifiche

   ◯ coefficiente di smorzamento δ e tempo di assestamento T_a

   ◯ picco di risonanza M_R e pulsazione di risonanza ω_R

   ◯ massima sovraelongazione S e picco di risonanza M_R

2. L'evoluzione libera del sistema $\ddot{y}(t) + 9y(t) = 0$, partendo dalle condizioni iniziali $y(0) = 0$ e $\dot{y}(0) = 3$, è:

   ◯ $y(t) = 3e^{-9t}$

   ◯ $y(t) = 3te^{-9t}$

   ◯ $y(t) = \sin(3t)$

   ◯ $y(t) = 3\cos(3t)$

3. In un sistema del secondo ordine a poli complessi coniugati, il coefficiente di smorzamento δ rimane costante al variare della posizione dei poli:

   ◯ su due semirette uscenti dall'origine

   ◯ su di un'ellisse con fuoco nell'origine

   ◯ su di una circonferenza con centro nell'origine

   ◯ su di una retta parallela all'asse immaginario

4. La derivata iniziale della risposta al gradino unitario del sistema $G(s) = \frac{s+5}{s^2+25s}$ è pari a:

   ◯ 0

   ◯ ∞

   ◯ 1/5

   ◯ 1

5. Sia $y(t) = M(\omega)\,\cos(\omega t + \alpha(\omega) + \varphi_0)$ la risposta asintotica di un sistema lineare stabile all'ingresso $x(t) = N\,\cos(\omega t + \varphi_0)$. Utilizzando i simboli che caratterizzano i segnali $x(t)$ e $y(t)$ la "definizione" di funzione di risposta armonica $F(\omega)$ è:

   ◯ $F(\omega) = \frac{N}{M(\omega)}\,e^{j\alpha(\omega)}$

   ◯ $F(\omega) = \frac{M(\omega)}{N}\,e^{j\alpha(\omega)}$

   ◯ $F(\omega) = \frac{M(\omega)}{N}\,e^{-j\alpha(\omega)}$

   ◯ $F(\omega) = M(\omega)\,N\,e^{j\alpha(\omega)}$

6. Un sistema di tipo 1 chiuso in retroazione unitaria negativa
   - ◯ ha guadagno statico unitario
   - ◯ ha guadagno statico infinito
   - ◯ ha errore a regime nullo per ingresso a rampa
   - ◯ ha errore a regime nullo per ingresso a gradino

7. Dato il diagramma di Bode delle ampiezze di $G(j\omega)$, da esso si può dedurre il diagramma delle fasi
   - ◯ solo se il diagramma di Bode presenta pendenze negative o nulle
   - ◯ solo se il sistema $G(s)$ ha tutti i poli a parte reale negativa
   - ◯ solo se il sistema $G(s)$ ha tutti i poli e tutti gli zeri a parte reale negativa
   - ◯ solo se il sistema $G(s)$ è a fase minima

8. Per l'applicazione del criterio di Nyquist a un sistema in retroazione:
   - ◯ non occorre alcuna informazione sulla stabilità ad anello aperto
   - ◯ occorre sapere se il sistema ad anello aperto è stabile o instabile
   - ◯ occorre conoscere il numero dei poli a parte reale nulla e positiva
   - ◯ occorre conoscere il numero degli zeri a parte reale nulla e positiva

9. Se la tabella di Routh di un'equazione caratteristica $a_n\, s^n + a_{n-1}\, s^{n-1} + \ldots + a_1\, s + a_0 = 0$, con $a_i < 0$, $i = 0, \ldots, n$, ha tutti gli elementi della prima colonna negativi, allora segue che l'equazione caratteristica
   - ◯ ha tutte le radici a parte reale negativa
   - ◯ ha tutte le radici a parte reale positiva
   - ◯ ha almeno una radice a parte reale positiva
   - ◯ ha tutte le radici simmetriche rispetto all'asse reale

10. La funzione di trasferimento $G(s) = \dfrac{Y(s)}{X(s)}$ corrispondente all'equazione differenziale

    $5\ddot{y}(t) + 3\dot{y}(t) = 2\dot{x}(t) + 4x(t)$ è:
    - ◯ $G(s) = \dfrac{5s^2 + 3\,s}{2\,s + 4}$
    - ◯ $G(s) = \dfrac{2\,s + 4}{5s + 3}$
    - ◯ $G(s) = \dfrac{2\,s + 4}{5s^2 + 3\,s}$
    - ◯ $G(s) = \dfrac{2\,s^2 + 4s}{5s + 3}$

Fondamenti di Controlli Automatici - A.A. 2012/13

9 novembre 2012 - Esercizi

Nome:	
Nr. Mat.	
Firma:	

a) Determinare la trasformata di Laplace $X_i(s)$ dei seguenti segnali temporali $x_i(t)$:

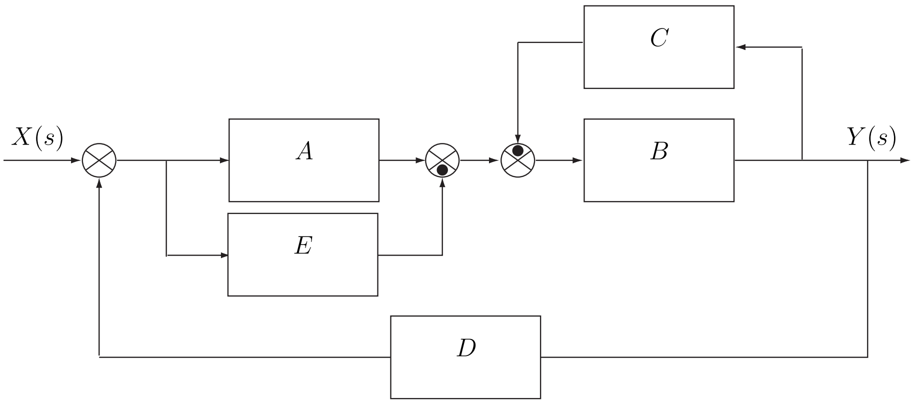
$$x_1(t) = \frac{d}{dt}\left(1 - te^{-3t+3}\right), \qquad x_2(t) = e^{-2t}\left(\cos(5t) + \sin(5t)\right),$$

dove $\frac{d}{dt}$ indica l'operazione di derivazione rispetto al tempo

b) Calcolare la risposta impulsiva $g_i(t)$ delle seguenti funzioni di trasferimento $G_i(s)$:

$$G_1(s) = \frac{3s^3 + 5s^2 - 21s - 15}{s^3 + 2s^2 - 15s}, \qquad G_2(s) = \frac{3s^2 + 10s + 5}{(s+2)^2\,(s+1)\,(s+3)}$$

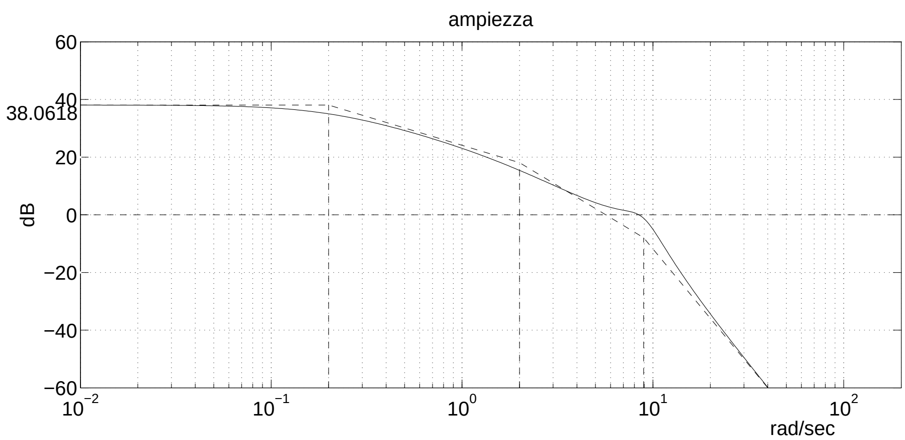
c) Dato il seguente schema a blocchi:



utilizzando la formula di Mason calcolare la funzione di trasferimento $G(s)$ che lega l'ingresso $X(s)$ all'uscita $Y(s)$:

$$G(s) = \frac{Y(s)}{X(s)} =$$

d) Dato il sistema, supposto a fase minima, che dà luogo al diagramma di Bode delle ampiezze di figura



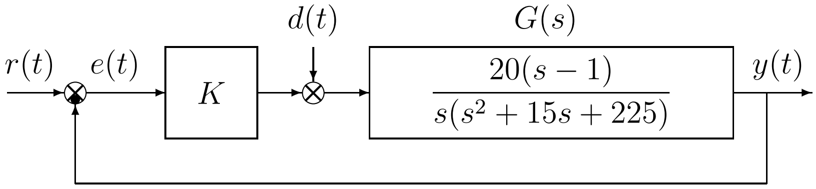
rispondere ai seguenti quesiti:

d.1) Calcolare il valore a regime y_∞ dell'uscita $y(t)$ del sistema a un gradino in ingresso di ampiezza 4, $x(t) = 4$.

d.2) Stimare qualitativamente il tempo di assestamento T_a del sistema e il periodo T_ω dell'eventuale oscillazione smorzata.

d.3) Disegnare l'andamento qualitativo della risposta $y(t)$ al gradino di ampiezza 4.

e) Sia dato il seguente sistema retroazionato:



e.1) Determinare per quali valori del parametro K il sistema retroazionato è asintoticamente stabile.

e.2) Disegnare qualitativamente il diagramma di Nyquist completo della funzione $G(s)$. Calcolare esattamente la posizione di eventuali asintoti e, se esistono, le intersezioni con l'asse reale.

e.3) Posto $K = -10$, calcolare l'errore a regime $e(\infty)$ quando sul sistema retroazionato siano applicati contemporaneamente $r(t) = 4$ e $d(t) = 2\sin(0.1t)$.

e.4) Considerando nuovamente $K = -10$, tracciare (nello schema fornito in allegato) i diagrammi di Bode asintotici delle ampiezze e della fasi del guadagno di anello $K\,G(s)$.

f) **Non è richiesto lo svolgimento di questo esercizio agli iscritti ad Ingegneria Ambientale.**

Con riferimento al sistema descritto nell'esercizio e), tracciare qualitativamente il luogo delle radici del sistema retroazionato per valori negativi del parametro K. Determinare esattamente gli asintoti, le intersezioni $\omega^\star$ con l'asse immaginario e i corrispondenti valori $K^\star$ del guadagno.

Fondamenti di Controlli Automatici - A.A. 2012/13
9 novembre 2012 - Domande Teoriche

Nome:	
Nr. Mat.	
Firma:	

Per ciascuno dei test a soluzione multipla segnare con una crocetta tutte le affermazioni che si ritengono giuste. In ogni quiz almeno una affermazione è corretta.

1. I due poli di un sistema del secondo ordine sono univocamente determinati se vengono assegnate le seguenti specifiche

   ⊗ coefficiente di smorzamento δ e tempo di assestamento T_a
   ⊗ picco di risonanza M_R e pulsazione di risonanza ω_R
   ○ massima sovraelongazione S e picco di risonanza M_R

2. L'evoluzione libera del sistema $\ddot{y}(t) + 9y(t) = 0$, partendo dalle condizioni iniziali $y(0) = 0$ e $\dot{y}(0) = 3$, è:

   ○ $y(t) = 3e^{-9t}$
   ○ $y(t) = 3te^{-9t}$
   ⊗ $y(t) = \sin(3t)$
   ○ $y(t) = 3\cos(3t)$

3. In un sistema del secondo ordine a poli complessi coniugati, il coefficiente di smorzamento δ rimane costante al variare della posizione dei poli:

   ⊗ su due semirette uscenti dall'origine
   ○ su di un'ellisse con fuoco nell'origine
   ○ su di una circonferenza con centro nell'origine
   ○ su di una retta parallela all'asse immaginario

4. La derivata iniziale della risposta al gradino unitario del sistema $G(s) = \frac{s+5}{s^2+25s}$ è pari a:

   ○ 0
   ○ ∞
   ○ 1/5
   ⊗ 1

5. Sia $y(t) = M(\omega)\cos(\omega t + \alpha(\omega) + \varphi_0)$ la risposta asintotica di un sistema lineare stabile all'ingresso $x(t) = N\cos(\omega t + \varphi_0)$. Utilizzando i simboli che caratterizzano i segnali $x(t)$ e $y(t)$ la "definizione" di funzione di risposta armonica $F(\omega)$ è:

   ○ $F(\omega) = \frac{N}{M(\omega)}\, e^{j\alpha(\omega)}$
   ⊗ $F(\omega) = \frac{M(\omega)}{N}\, e^{j\alpha(\omega)}$
   ○ $F(\omega) = \frac{M(\omega)}{N}\, e^{-j\alpha(\omega)}$
   ○ $F(\omega) = M(\omega)\, N\, e^{j\alpha(\omega)}$

6. Un sistema di tipo 1 chiuso in retroazione unitaria negativa

   ⊗ ha guadagno statico unitario
   ○ ha guadagno statico infinito
   ○ ha errore a regime nullo per ingresso a rampa
   ⊗ ha errore a regime nullo per ingresso a gradino

7. Dato il diagramma di Bode delle ampiezze di $G(j\omega)$, da esso si può dedurre il diagramma delle fasi

   ○ solo se il diagramma di Bode presenta pendenze negative o nulle
   ○ solo se il sistema $G(s)$ ha tutti i poli a parte reale negativa
   ⊗ solo se il sistema $G(s)$ ha tutti i poli e tutti gli zeri a parte reale negativa
   ⊗ solo se il sistema $G(s)$ è a fase minima

8. Per l'applicazione del criterio di Nyquist a un sistema in retroazione:

   ○ non occorre alcuna informazione sulla stabilità ad anello aperto
   ○ occorre sapere se il sistema ad anello aperto è stabile o instabile
   ⊗ occorre conoscere il numero dei poli a parte reale nulla e positiva
   ○ occorre conoscere il numero degli zeri a parte reale nulla e positiva

9. Se la tabella di Routh di un'equazione caratteristica $a_n\, s^n + a_{n-1}\, s^{n-1} + \ldots + a_1\, s + a_0 = 0$, con $a_i < 0$, $i = 0, \ldots, n$, ha tutti gli elementi della prima colonna negativi, allora segue che l'equazione caratteristica

   ⊗ ha tutte le radici a parte reale negativa
   ○ ha tutte le radici a parte reale positiva
   ○ ha almeno una radice a parte reale positiva
   ⊗ ha tutte le radici simmetriche rispetto all'asse reale

10. La funzione di trasferimento $G(s) = \dfrac{Y(s)}{X(s)}$ corrispondente all'equazione differenziale

    $5\ddot{y}(t) + 3\dot{y}(t) = 2\dot{x}(t) + 4x(t)$ è:

    ○ $G(s) = \dfrac{5s^2 + 3\,s}{2\,s + 4}$
    ○ $G(s) = \dfrac{2\,s + 4}{5s + 3}$
    ⊗ $G(s) = \dfrac{2\,s + 4}{5s^2 + 3\,s}$
    ○ $G(s) = \dfrac{2\,s^2 + 4s}{5s + 3}$

Fondamenti di Controlli Automatici - A.A. 2012/13

9 novembre 2012 - Esercizi

Nome:	
Nr. Mat.	
Firma:	

a) Determinare la trasformata di Laplace $X_i(s)$ dei seguenti segnali temporali $x_i(t)$:

$$x_1(t) = \frac{d}{dt}\left(1 - te^{-3t+3}\right), \qquad x_2(t) = e^{-2t}\left(\cos(5t) + \sin(5t)\right),$$

dove $\frac{d}{dt}$ indica l'operazione di derivazione rispetto al tempo

Soluzione:

$$X_1(s) = s\left(\frac{1}{s} - e^3\frac{1}{(s+3)^2}\right) = 1 - e^3\frac{s}{(s+3)^2}, \qquad X_2(s) = \frac{s+2}{(s+2)^2+25} + \frac{5}{(s+2)^2+25}$$

b) Calcolare la risposta impulsiva $g_i(t)$ delle seguenti funzioni di trasferimento $G_i(s)$:

$$G_1(s) = \frac{3s^3+5s^2-21s-15}{s^3+2s^2-15s}, \qquad G_2(s) = \frac{3s^2+10s+5}{(s+2)^2\,(s+1)\,(s+3)}$$

Soluzione:
La funzione $G_1(s)$ può essere riscritta come

$$G_1(s) = 3 + \frac{1}{s} + \frac{2}{s-3} - \frac{4}{s+5}$$

di conseguenza la risposta impulsiva (ovvero l'anti-trasformata di Laplace) risulta

$$g_1(t) = 3\delta(t) + 1 + 2\,e^{3t} - 4\,e^{-5t}.$$

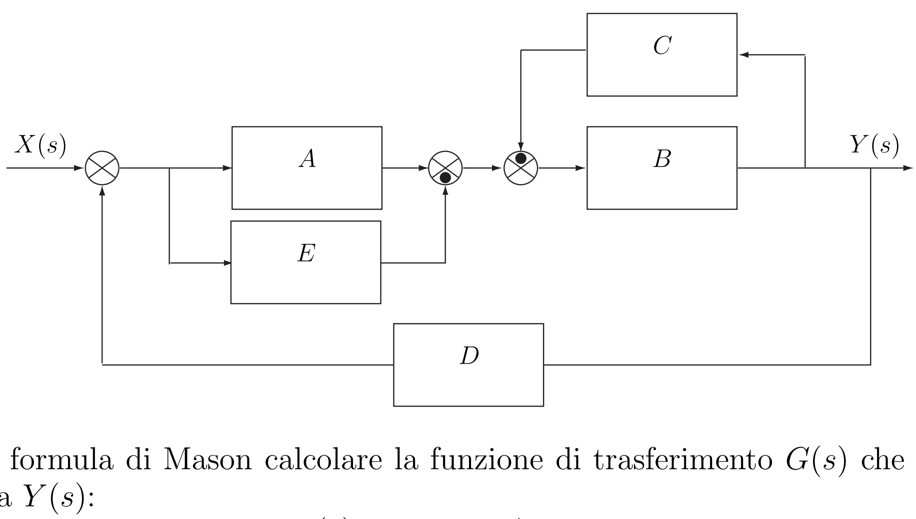
La funzione $G_2(s)$ può essere riscritta come

$$G_2(s) = \frac{2}{s+2} + \frac{3}{(s+2)^2} - \frac{1}{s+1} - \frac{1}{s+3}$$

di conseguenza la sua risposta impulsiva risulta

$$g_1(t) = 2\,e^{-2t} + 3t\,e^{-2t} - 1\,e^{-t} - 1\,e^{-3t}$$

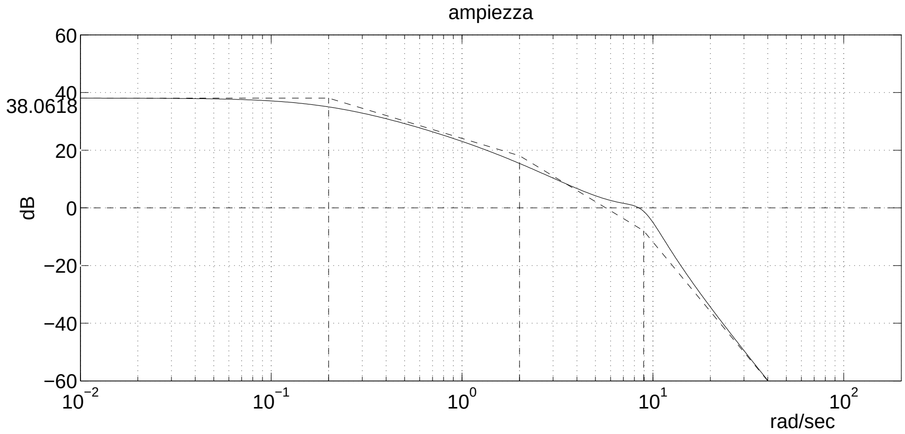
c) Dato il seguente schema a blocchi:



utilizzando la formula di Mason calcolare la funzione di trasferimento $G(s)$ che lega l'ingresso $X(s)$ all'uscita $Y(s)$:

$$G(s) = \frac{Y(s)}{X(s)} = \frac{AB - EB}{1 + BC - ABD + BDE}$$

d) Dato il sistema, supposto a fase minima, che dà luogo al diagramma di Bode delle ampiezze di figura



rispondere ai seguenti quesiti:

d.1) Calcolare il valore a regime y_∞ dell'uscita $y(t)$ del sistema a un gradino in ingresso di ampiezza 4, $x(t) = 4$.
<u>Soluzione</u>: La risposta a regime al gradino di ampiezza $A = 4$ risulta

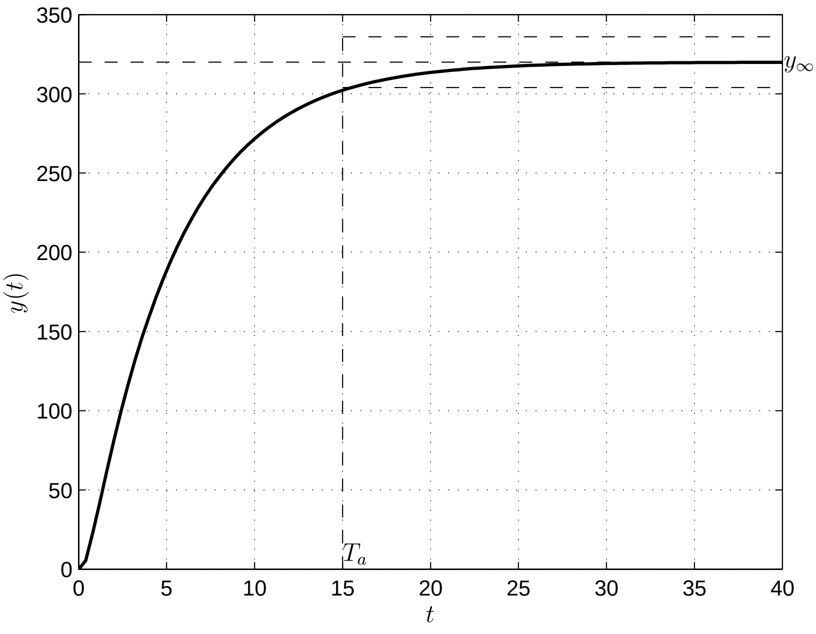
$$y_\infty = A\,|G(0)| = 320$$

essendo $|G(0)| = 10^{\frac{38.0616}{20}} = 80$.

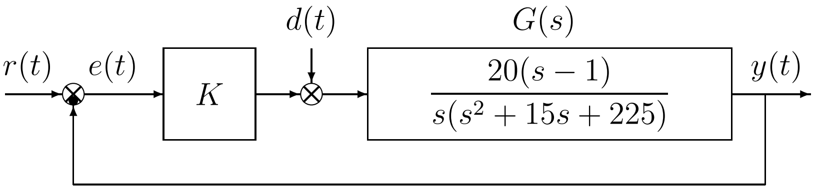
d.2) Stimare qualitativamente il tempo di assestamento T_a del sistema e il periodo T_ω dell'eventuale oscillazione smorzata.
<u>Soluzione</u>: Come si evince dal diagramma di Bode il sistema ha un polo dominante reale con costante di tempo $\tau = 5$ (infatti il primo punto di rottura per valori crescenti della pulsazione è in $\omega = 0.2$ e risulta relativo a un polo reale, mentre il successivo polo è ancora reale e quindi non può essere più dominante e infine l'ultimo punto di rottura che si incontra è relativo a una coppia di poli complessi coniugati con $\omega_n = 9$ e $\delta \approx 0.2$ per cui il valore assoluto della parte reale sarà circa $\delta\omega_n \approx 1.8$ ben al di sopra di 0.2) per cui la risposta sarà aperiodica (senza sovraelongazioni) e con un tempo di assestamento

$$T_a = 3\tau = 15 \text{ s.}$$

d.3) Disegnare l'andamento qualitativo della risposta $y(t)$ al gradino di ampiezza 4.
<u>Soluzione</u>: In figura è riportata la risposta del sistema.



e) Sia dato il seguente sistema retroazionato:



e.1) Determinare per quali valori del parametro K il sistema retroazionato è asintoticamente stabile.

Soluzione: l'equazione caratteristica del sistema retroazionato è

$$1+\frac{K\,20(s-1)}{s\,(s^2+15s+225)}=0 \qquad\rightarrow\qquad s^3+15\,s^2+(225+20K)s-20K=0$$

La corrispondente tabella di Routh è la seguente

$$\begin{array}{c|cc l}
3 & 1 & 225+20K & \\
2 & 15 & -20K & \\
1 & 320K+3375 & & \rightarrow\;\; K>-\frac{3375}{320}=-10.5469\\
0 & -20K & & \rightarrow\;\; K<0
\end{array}$$

Il sistema retroazionato è asintoticamente stabile per:

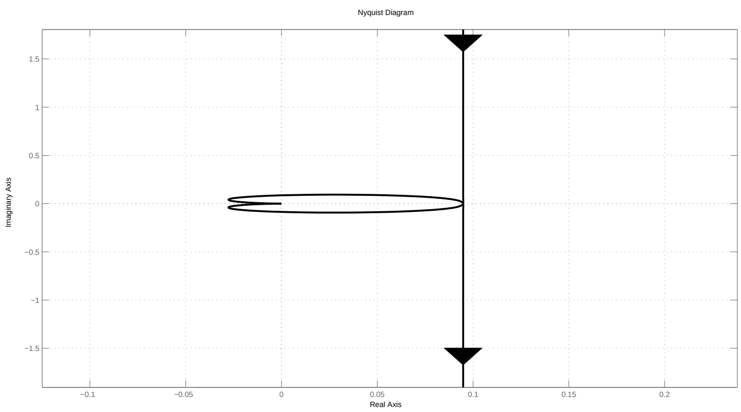
$$-10.5469=K^\star<K<0$$

La pulsazione ω^* corrispondente al valore limite $K^\star$ è:

$$\omega^\star=\sqrt{-\frac{20K^\star}{15}}=3.75$$

e.2) Disegnare qualitativamente il diagramma di Nyquist completo della funzione $G(s)$. Calcolare esattamente la posizione di eventuali asintoti e, se esistono, le intersezioni con l'asse reale.

Soluzione: Il diagramma di Nyquist della funzione $G(s)$ è riportato in figura.



La funzione approssimante per $\omega\rightarrow 0$ è $G_0(s)=\dfrac{-20}{225\,s}$ pertanto il diagramma parte all'infinito con fase iniziale $\varphi_0=-\frac{3}{2}\pi$.La funzione approssimante per $\omega\rightarrow\infty$ è $G_\infty(s)=\dfrac{20}{s^2}$ e quindi il diagramma giunge nell'origine con fase finale $\varphi_\infty=-\pi$ $(\pm 2k\pi)$. Il parametro Δ_τ vale $\Delta_\tau=-1-\frac{1}{15}=-\frac{16}{15}<0$ pertanto il diagramma parte in ritardo rispetto alla fase iniziale φ_0. Data la presenza di un polo nell'origine esiste un asintoto verticale per $\omega\rightarrow 0$ la cui ascissa vale $\sigma_a=K\Delta_\tau=0.0948$. Il parametro Δ_p vale $\Delta_p=1+15=16>0$ pertanto noil diagramma arriva in anticipo rispetto alla fase finale φ_∞. Lo sfasamento complessivo è $\Delta\varphi=-3\frac{\pi}{2}$. Dal diagramma risulta inoltre esistere un'unica intersezione con l'asse reale, che in virtù dell'analisi svolta con Routh al primo punto risulta pari a

$$\sigma^\star=-1/K^\star=0.0948.$$

La corrispondente pulsazione è $\omega^\star=3.75$.

e.3) Posto $K = -10$, calcolare l'errore a regime $e(\infty)$ quando sul sistema retroazionato siano applicati contemporaneamente $r(t) = 4$ e $d(t) = 2\sin(0.1t)$. Dato che il sistema è lineare e soggetto quindi alla sovrapposizione degli effetti, l'errore $E(s)$, espresso mediante la trasformata di Laplace, risulterà:

$$E(s) = E_r(s) + E_d(s)$$

dove $E_r(s)$ è l'errore dovuto al riferimento mentre $E_d(s)$ è l'errore dovuto al disturbo. Senza fare alcun calcolo si può dire che a regime $e_r(\infty)$ sarà nullo, in quanto si considera un ingresso a gradino in un sistema di tipo 1 (cioè con un polo nell'origine). Di conseguenza il calcolo dell'errore a regime si riduce a quello dovuto al segnale $d(t)$:

$$E(s) = F_d(s)D(s)$$

dove $D(s)$ è la trasformata di laplace di $d(t)$ e $F_d(s)$ è la funzione di trasferimento tra $D(s)$ e $E(s)$ che vale

$$F_d(s) = -\frac{G(s)}{1 + KG(s)} = -\frac{20(s-1)}{s^3 + 15s^2 + 25s + 200}.$$

Essendo $d(t)$ un segnale sinusoidale, per trovarne la risposta a regime si sfrutta il concetto di risposta armonica, per cui

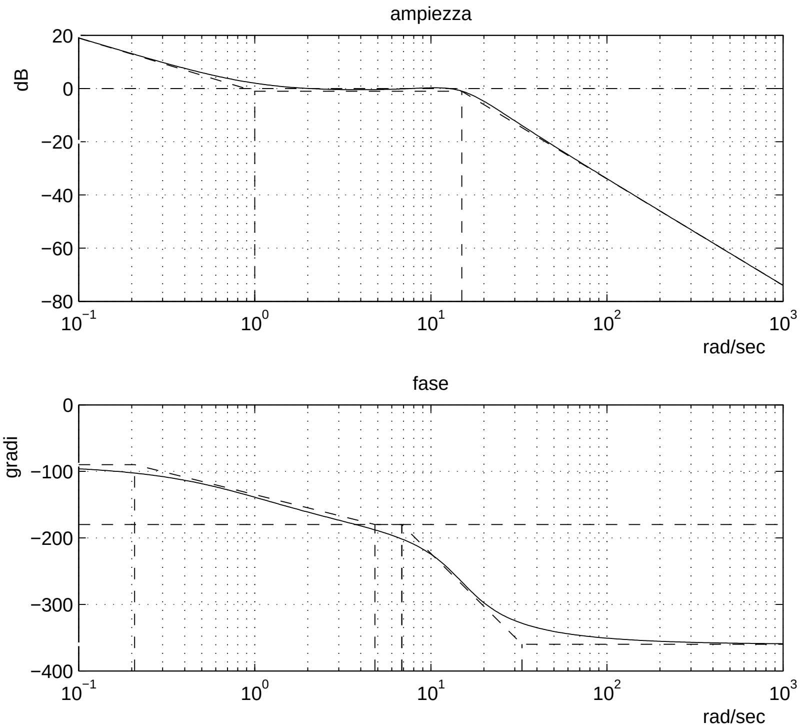
$$e_d(t) = 2|F_d(j0.1)|\sin(0.1\,t + \arg\{F_d(j0.1)\})$$

con $|F_d(j0.1)| = 0.1006$ e $\arg\{F_d(j0.1)\} = -6.4270^o$. In conclusione

$$e(\infty) = e_d(\infty) = 0.2012\sin(0.1\,t - 6.4270^o)$$

e.4) Considerando nuovamente $K = -10$, tracciare (nello schema fornito in allegato) i diagrammi di Bode asintotici delle ampiezze e della fasi del guadagno di anello $K\,G(s)$.

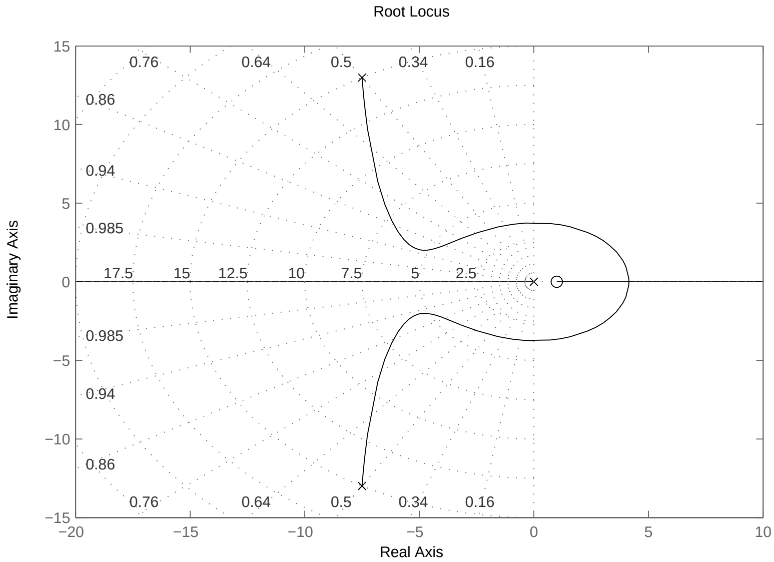
<u>Soluzione</u>:
In figura sono riportati i diagrammi di Bode del sistema. Sul diagramma asintotico delle ampiezze il guadagno β in corrispondenza della pulsazione $\omega = 1$ è $\beta = 0.8889 = -1.0229$ dB. Il coefficiente di smorzamento della coppia di poli complessi coniugati è $\delta = 0.5$.



f) **Non è richiesto lo svolgimento di questo esercizio agli iscritti ad Ingegneria Ambientale.**

Con riferimento al sistema descritto nell'esercizio e), tracciare qualitativamente il luogo delle radici del sistema retroazionato per valori negativi del parametro K. Determinare esattamente gli asintoti, le intersezioni $\omega^\star$ con l'asse immaginario e i corrispondenti valori $K^\star$ del guadagno.

Soluzione: Gli asintoti sono 2, essendo 2 il grado relativo, e sono disposti orizzontalemnte essendo richiesto il tracciamento del diagramma per valori di K negativi. Il luogo delle radici finale è riportato nella seguente figura.



Dall'analisi svolta mediante il criterio di Routh, risulta che il luogo delle radici attraversa l'asse immaginario, passando dal semipiano sinistro a quello destro, in corrispondenza di $s^\star = j\omega^\star = j3.75$, per $K = K^\star = -10.5469$.

Fondamenti di Controlli Automatici - A.A. 2012/13

9 novembre 2012 - Diagrammi di Bode

Nome:	
Nr. Mat.	
Firma: