Cognome	
Nome	
Matricola	
Corso	

Fondamenti di Controlli Automatici - A.A. 2012/13
9 gennaio 2014 - Quiz di Teoria

Per ciascuno dei test a soluzione multipla segnare con una crocetta tutte le affermazioni che si ritengono giuste. In ogni quiz almeno una affermazione è corretta.

La prova di teoria si ritiene superata se vengono totalizzati almeno 5 punti su 10; diversamente il compito verrà ritenuto insufficiente a prescindere dal risultato della seconda parte della prova (esercizi).

1. I due poli di un sistema del secondo ordine sono univocamente determinati se vengono assegnate le seguenti specifiche

   ◯ coefficiente di smorzamento δ e tempo di assestamento T_a
   ◯ picco di risonanza M_R e pulsazione di risonanza ω_R
   ◯ massima sovraelongazione S e picco di risonanza M_R

2. La derivata iniziale della risposta al gradino unitario del sistema $G(s) = \dfrac{3+s}{9s+s^2}$ è pari a:

   ◯ 1
   ◯ 0
   ◯ ∞
   ◯ 1/3

3. Dato il sistema $G(s) = \dfrac{(s+3)^2}{s^2(s^2+4s+25)}$ posto in retroazione unitaria negativa (che si suppone stabile) risulta

   ◯ errore a regime nullo per ingresso a parabola
   ◯ errore a regime nullo per ingresso a rampa
   ◯ errore a regime limitato ma non nullo per ingresso a rampa
   ◯ errore a regime nullo per ingresso a gradino

4. Per $\omega = 1/a$ il diagramma "reale" di Bode delle ampiezze della funzione $G(j\omega) = \frac{1}{(1+j\,a\,\omega)^2}$ (con $a > 0$)

   ◯ vale $\simeq -6$ dB
   ◯ vale $\simeq -3$ dB
   ◯ vale 1
   ◯ vale 1/2

5. La funzione di trasferimento $G(s) = \frac{Y(s)}{X(s)} = \dfrac{2s^2+s+3}{5s^3+s^2+3s}$ corrisponde all'equazione differenziale:

   ◯ $3\dot{y}(t) + \ddot{y}(t) + 5\dddot{y}(t) = 3x(t) + \dot{x}(t) + 2\ddot{x}(t)$
   ◯ $3\dot{x}(t) + \ddot{x}(t) + 5\dddot{x}(t) = 3y(t) + \dot{y}(t) + 2\ddot{y}(t)$
   ◯ $3y(t) + \dot{y}(t) + 5\ddot{y}(t) = 3x(t) + \dot{x}(t) + 2\ddot{x}(t)$
   ◯ nessuna delle precedenti

6. Il modulo $|G(j\omega)|$ della funzione di risposta armonica di un sistema lineare determina completamente la funzione di trasferimento $G(s)$ del sistema

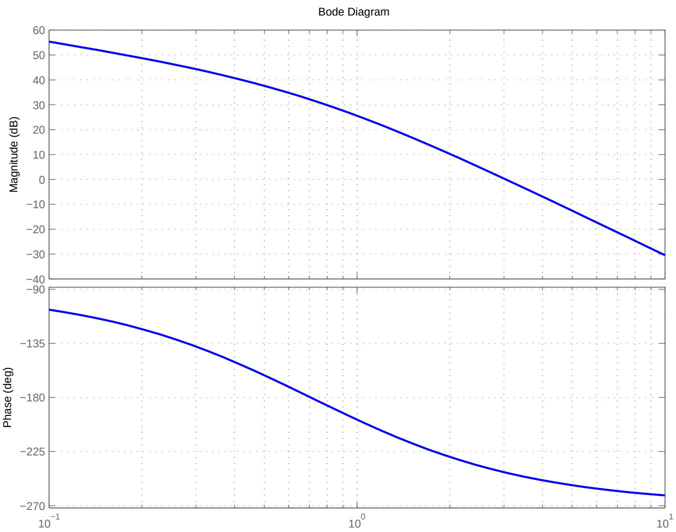
   - ◯ sempre
   - ◯ mai
   - ◯ se il sistema è a fase minima
   - ◯ se il sistema è stabile

7. Il metodo della Trasformata di Laplace nella risoluzione di equazioni differenziali lineari a parametri concentrati

   - ◯ permette di calcolare la risposta libera del sistema
   - ◯ permette di calcolare la risposta forzata del sistema
   - ◯ può essere utilizzato solo nel caso di equazioni tempo invarianti
   - ◯ può essere utilizzato anche nel caso di equazioni tempo varianti

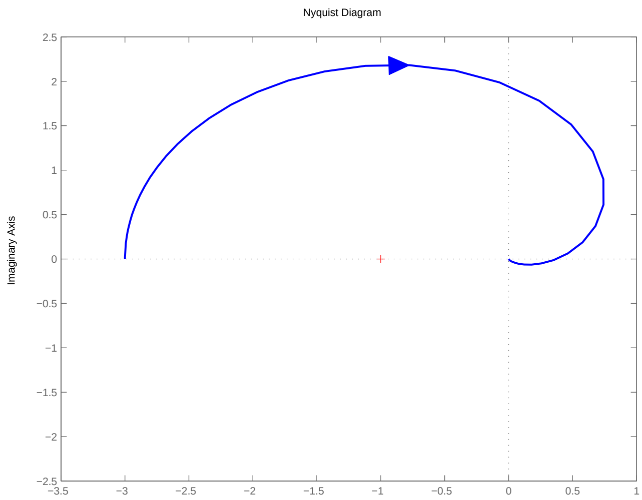
8. Applicando l' ingresso $u(t) = \sin(2t)$ al sistema $\dot{y}(t) + 2\,y(t) = 4u(t)$ si ottiene la seguente uscita a regime:

   - ◯ $y(t) = \frac{2}{\sqrt{2}} \sin(2t + 45^o)$
   - ◯ $y(t) = \frac{2}{\sqrt{2}} \sin(2t - 45^o)$
   - ◯ $y(t) = \frac{4}{\sqrt{2}} \sin(2t + 45^o)$
   - ◯ $y(t) = \frac{4}{\sqrt{2}} \sin(2t - 45^o)$



9. Si faccia riferimento ai diagrammi di Bode riportati a fianco relativi a un sistema $G(s)$ a fase minima. Il margine di ampiezza M_α e il margine di fase M_φ sono:

   - ◯ $M_\alpha \simeq 32$ dB e $M_\varphi \simeq -62°$
   - ◯ $M_\alpha \simeq -32$ dB e $M_\varphi \simeq 62°$
   - ◯ $M_\alpha \simeq -32$ dB e $M_\varphi \simeq -62°$
   - ◯ $M_\alpha \simeq 32$ dB e $M_\varphi \simeq 62°$



10. Sia dato il diagramma di Nyquist (per pulsazioni positive) della funzione $G(s) = \frac{-3}{(s+1)^3}$. In base al criterio di Nyquist è possibile affermare che il sistema retroazionato $KG(s)$ è stabile per valori di K

    - ◯ $0 < K < K_1$, dove $K_1 > 0$
    - ◯ $K > K_1$, dove $K_1 > 0$
    - ◯ $K_1 < K < K_2$, dove $K_1 < 0$ e $K_2 > 0$
    - ◯ $K < K_1 \cup K > K_2$, dove $K_1 < 0$ e $K_2 > 0$

Fondamenti di Controlli Automatici - A.A. 2012/13

9 gennaio 2014 - Esercizi

Cognome	
Nome	
Matricola	
Corso	

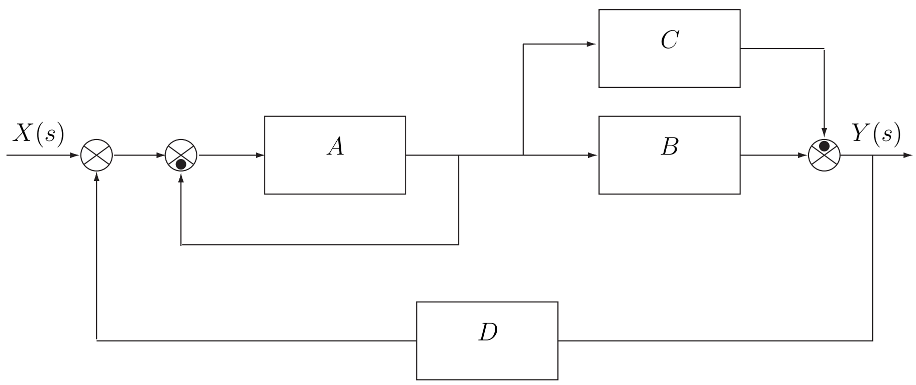
a) Determinare la trasformata di Laplace $X_i(s)$ dei seguenti segnali temporali $x_i(t)$:

$$x_1(t) = (2 + e^{-3\,t})\cos(4\,t), \qquad x_2(t) = 3\,(\delta(t) + 1) + 2e^{-t}\,t^4$$

b) Calcolare la risposta impulsiva $g_i(t)$ delle seguenti funzioni di trasferimento $G_i(s)$:

$$G_1(s) = \frac{9s^2 + 32s + 24}{s^3 + 6s^2 + 8s}, \qquad G_2(s) = \frac{s-1}{(s+2)^2\,(s+1)}$$

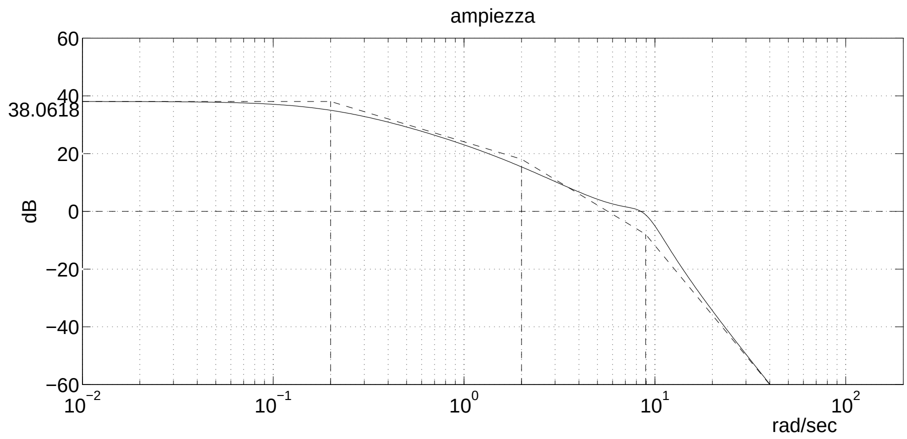
c) Dato il seguente schema a blocchi:



utilizzando la formula di Mason calcolare la funzione di trasferimento $G(s)$ che lega l'ingresso $X(s)$ all'uscita $Y(s)$:

$$G(s) = \frac{Y(s)}{X(s)} =$$

d) Dato il sistema, supposto a fase minima, che dà luogo al diagramma di Bode delle ampiezze di figura



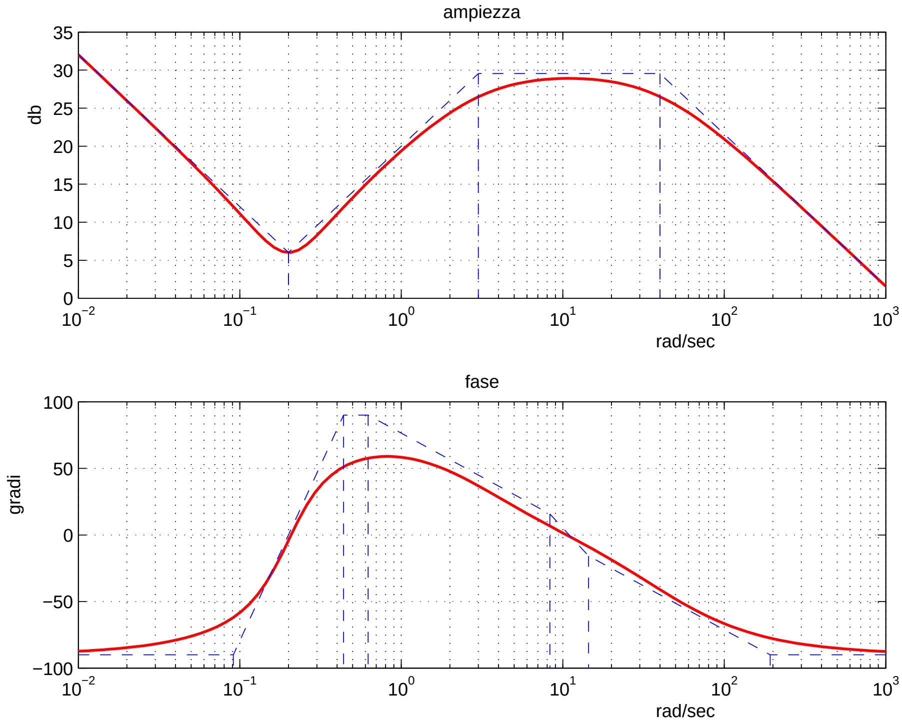
rispondere ai seguenti quesiti:

d.1) Calcolare il valore a regime y_∞ dell'uscita $y(t)$ del sistema a un gradino in ingresso di ampiezza 4, $x(t) = 4$.

d.2) Stimare qualitativamente il tempo di assestamento T_a del sistema e il periodo T_ω dell'eventuale oscillazione smorzata.

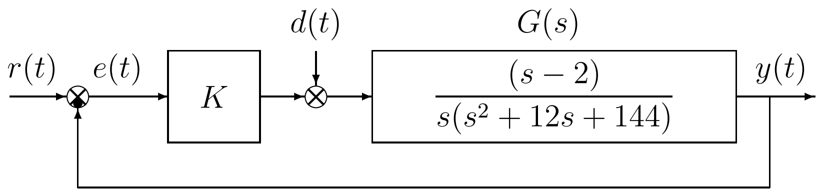
d.3) Disegnare l'andamento qualitativo della risposta $y(t)$ al gradino di ampiezza 4.

e) Facendo riferimento ai diagrammi di Bode della funzione $G(s)$ mostrati in figura



si ricavi l'espressione analitica della funzione $G(s)$.

f) Sia dato il seguente sistema retroazionato:



f.1) Determinare per quali valori del parametro K il sistema retroazionato è asintoticamente stabile.

f.2) Posto $K = -100$ disegnare qualitativamente il diagramma di Nyquist completo della funzione d'anello $KG(s)$. Calcolare esattamente la posizione σ_0 di un eventuale asintoto, le eventuali intersezioni con l'asse reale e i corrispondenti valori delle pulsazioni.

f.3) Posto $K = -100$, calcolare l'errore a regime $e(\infty)$ quando sul sistema retroazionato siano applicati contemporaneamente il segnale $r(t) = 4$ e il disturbo $d(t) = 2\sin(2\,t)$.

f.4) Posto nuovamente $K = -100$, tracciare (nello schema fornito in allegato) i diagrammi di Bode delle ampiezze e delle fasi del guadagno di anello $K\,G(s)$.

g) **Non è richiesto lo svolgimento di questo esercizio agli iscritti ad Ingegneria Ambientale o a corsi per i quali l'esame è da 5 CFU.**

Con riferimento al sistema descritto nell'esercizio f), tracciare qualitativamente il luogo delle radici del sistema retroazionato per valori negativi del parametro K. Determinare esattamente gli asintoti, il centro degli asintoti, le intersezioni con l'asse immaginario e i corrispondenti valori del guadagno K. Determinare gli eventuali punti di diramazione solo qualitativamente.

Fondamenti di Controlli Automatici - A.A. 2012/13
9 gennaio 2014 - Quiz di Teoria

Cognome	
Nome	
Matricola	
Corso	

Per ciascuno dei test a soluzione multipla segnare con una crocetta tutte le affermazioni che si ritengono giuste. In ogni quiz almeno una affermazione è corretta.

La prova di teoria si ritiene superata se vengono totalizzati almeno 5 punti su 10; diversamente il compito verrà ritenuto insufficiente a prescindere dal risultato della seconda parte della prova (esercizi).

1. I due poli di un sistema del secondo ordine sono univocamente determinati se vengono assegnate le seguenti specifiche

   ⊗ coefficiente di smorzamento δ e tempo di assestamento T_a
   ⊗ picco di risonanza M_R e pulsazione di risonanza ω_R
   ○ massima sovraelongazione S e picco di risonanza M_R

2. La derivata iniziale della risposta al gradino unitario del sistema $G(s) = \dfrac{3+s}{9s+s^2}$ è pari a:

   ⊗ 1
   ○ 0
   ○ ∞
   ○ 1/3

3. Dato il sistema $G(s) = \dfrac{(s+3)^2}{s^2(s^2+4s+25)}$ posto in retroazione unitaria negativa (che si suppone stabile) risulta

   ○ errore a regime nullo per ingresso a parabola
   ⊗ errore a regime nullo per ingresso a rampa
   ○ errore a regime limitato ma non nullo per ingresso a rampa
   ⊗ errore a regime nullo per ingresso a gradino

4. Per $\omega = 1/a$ il diagramma "reale" di Bode delle ampiezze della funzione $G(j\omega) = \frac{1}{(1+j\,a\,\omega)^2}$ (con $a > 0$)

   ⊗ vale $\simeq -6$ dB
   ○ vale $\simeq -3$ dB
   ○ vale 1
   ⊗ vale 1/2

5. La funzione di trasferimento $G(s) = \frac{Y(s)}{X(s)} = \dfrac{2s^2+s+3}{5s^3+s^2+3s}$ corrisponde all'equazione differenziale:

   ⊗ $3\dot{y}(t) + \ddot{y}(t) + 5\dddot{y}(t) = 3x(t) + \dot{x}(t) + 2\ddot{x}(t)$
   ○ $3\dot{x}(t) + \ddot{x}(t) + 5\dddot{x}(t) = 3y(t) + \dot{y}(t) + 2\ddot{y}(t)$
   ○ $3y(t) + \dot{y}(t) + 5\ddot{y}(t) = 3x(t) + \dot{x}(t) + 2\ddot{x}(t)$
   ○ nessuna delle precedenti

6. Il modulo $|G(j\omega)|$ della funzione di risposta armonica di un sistema lineare determina completamente la funzione di trasferimento $G(s)$ del sistema

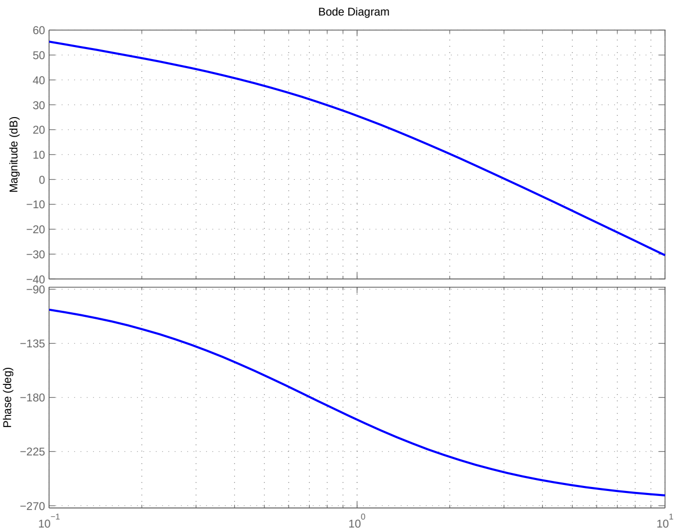
   ○ sempre
   ○ mai
   ⊗ se il sistema è a fase minima
   ○ se il sistema è stabile

7. Il metodo della Trasformata di Laplace nella risoluzione di equazioni differenziali lineari a parametri concentrati

   ⊗ permette di calcolare la risposta libera del sistema
   ⊗ permette di calcolare la risposta forzata del sistema
   ⊗ può essere utilizzato solo nel caso di equazioni tempo invarianti
   ○ può essere utilizzato anche nel caso di equazioni tempo varianti

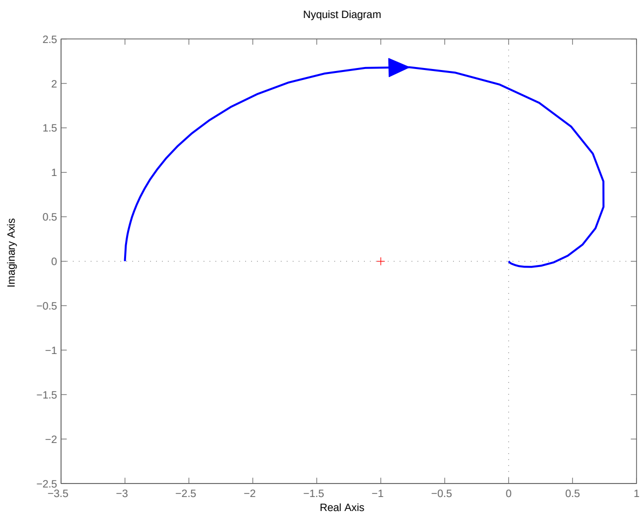
8. Applicando l' ingresso $u(t) = \sin(2t)$ al sistema $\dot{y}(t) + 2\,y(t) = 4u(t)$ si ottiene la seguente uscita a regime:

   ○ $y(t) = \frac{2}{\sqrt{2}} \sin(2t + 45^o)$
   ⊗ $y(t) = \frac{2}{\sqrt{2}} \sin(2t - 45^o)$
   ○ $y(t) = \frac{4}{\sqrt{2}} \sin(2t + 45^o)$
   ○ $y(t) = \frac{4}{\sqrt{2}} \sin(2t - 45^o)$



9. Si faccia riferimento ai diagrammi di Bode riportati a fianco relativi a un sistema $G(s)$ a fase minima. Il margine di ampiezza M_α e il margine di fase M_φ sono:

   ○ $M_\alpha \simeq 32$ dB e $M_\varphi \simeq -62°$
   ○ $M_\alpha \simeq -32$ dB e $M_\varphi \simeq 62°$
   ⊗ $M_\alpha \simeq -32$ dB e $M_\varphi \simeq -62°$
   ○ $M_\alpha \simeq 32$ dB e $M_\varphi \simeq 62°$



10. Sia dato il diagramma di Nyquist (per pulsazioni positive) della funzione $G(s) = \frac{-3}{(s+1)^3}$. In base al criterio di Nyquist è possibile affermare che il sistema retroazionato $KG(s)$ è stabile per valori di K

   ○ $0 < K < K_1$, dove $K_1 > 0$
   ○ $K > K_1$, dove $K_1 > 0$
   ⊗ $K_1 < K < K_2$, dove $K_1 < 0$ e $K_2 > 0$
   ○ $K < K_1 \cup K > K_2$, dove $K_1 < 0$ e $K_2 > 0$

Fondamenti di Controlli Automatici - A.A. 2012/13

9 gennaio 2014 - Esercizi

Cognome	
Nome	
Matricola	
Corso	

a) Determinare la trasformata di Laplace $X_i(s)$ dei seguenti segnali temporali $x_i(t)$:

$$x_1(t) = (2 + e^{-3\,t})\cos(4\,t), \qquad x_2(t) = 3\,(\delta(t) + 1) + 2e^{-t}\,t^4$$

<u>Soluzione</u>:

$$X_1(s) = \frac{2\,s}{s^2+16} + \frac{s+3}{(s+3)^2+16}, \qquad X_2(s) = 3 + \frac{3}{s} + \frac{48}{(s+1)^5}$$

b) Calcolare la risposta impulsiva $g_i(t)$ delle seguenti funzioni di trasferimento $G_i(s)$:

$$G_1(s) = \frac{9s^2+32s+24}{s^3+6s^2+8s}, \qquad G_2(s) = \frac{s-1}{(s+2)^2\,(s+1)}$$

<u>Soluzione</u>:
La funzione $G_1(s)$ può essere riscritta come

$$G_1(s) = \frac{1}{s+2} + \frac{5}{s+4} + \frac{3}{s}$$

pertanto la sua risposta impulsiva risulta

$$g_1(t) = e^{-2t} + 5e^{-4t} + 3.$$

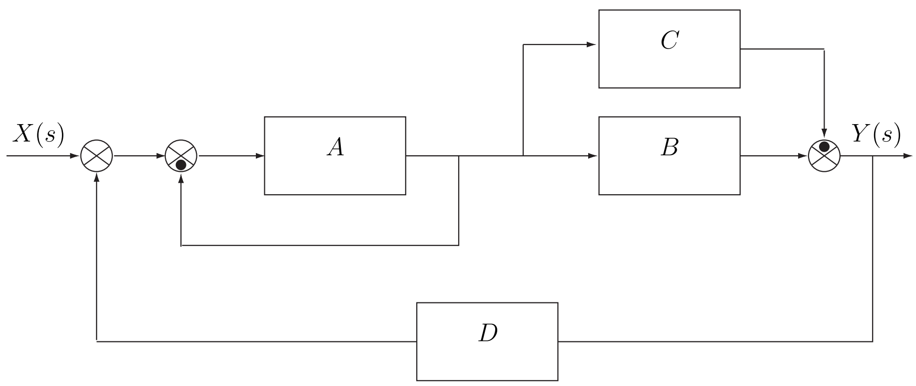
La funzione $G_2(s)$ può essere riscritta come

$$G_2(s) = \frac{2}{s+2} + \frac{3}{(s+2)^2} - \frac{2}{s+1}$$

di conseguenza la sua risposta impulsiva risulta

$$g_2(t) = 2\,e^{-2t} + 3t\,e^{-2t} - 2\,e^{-t}$$

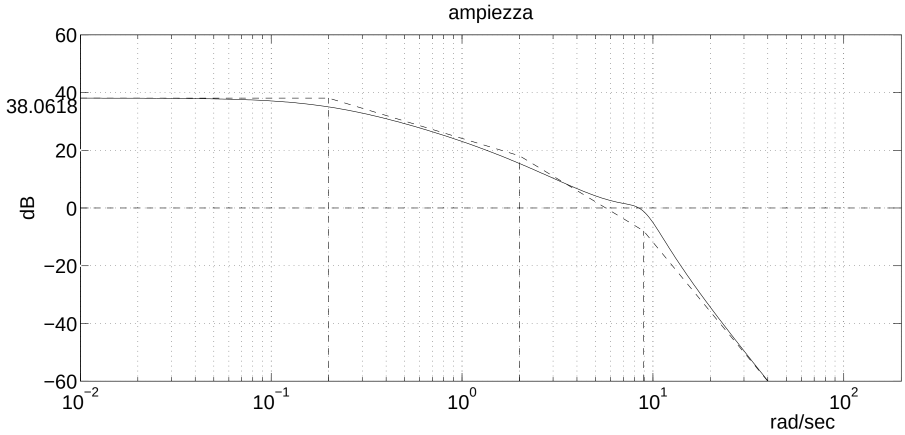
c) Dato il seguente schema a blocchi:



utilizzando la formula di Mason calcolare la funzione di trasferimento $G(s)$ che lega l'ingresso $X(s)$ all'uscita $Y(s)$:

$$G(s) = \frac{Y(s)}{X(s)} = \frac{AB - AC}{1 + A - ABD + ACD}$$

d) Dato il sistema, supposto a fase minima, che dà luogo al diagramma di Bode delle ampiezze di figura



rispondere ai seguenti quesiti:

d.1) Calcolare il valore a regime y_∞ dell'uscita $y(t)$ del sistema a un gradino in ingresso di ampiezza 4, $x(t) = 4$.
Soluzione: La risposta a regime al gradino di ampiezza $A = 4$ risulta

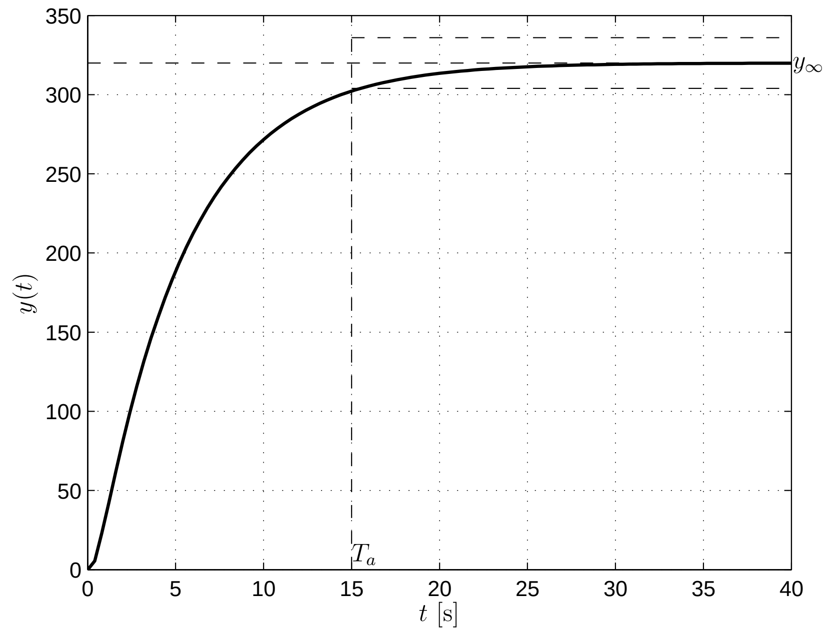
$$y_\infty = A\,|G(0)| = 320$$

essendo $|G(0)| = 10^{\frac{38.0616}{20}} = 80$.

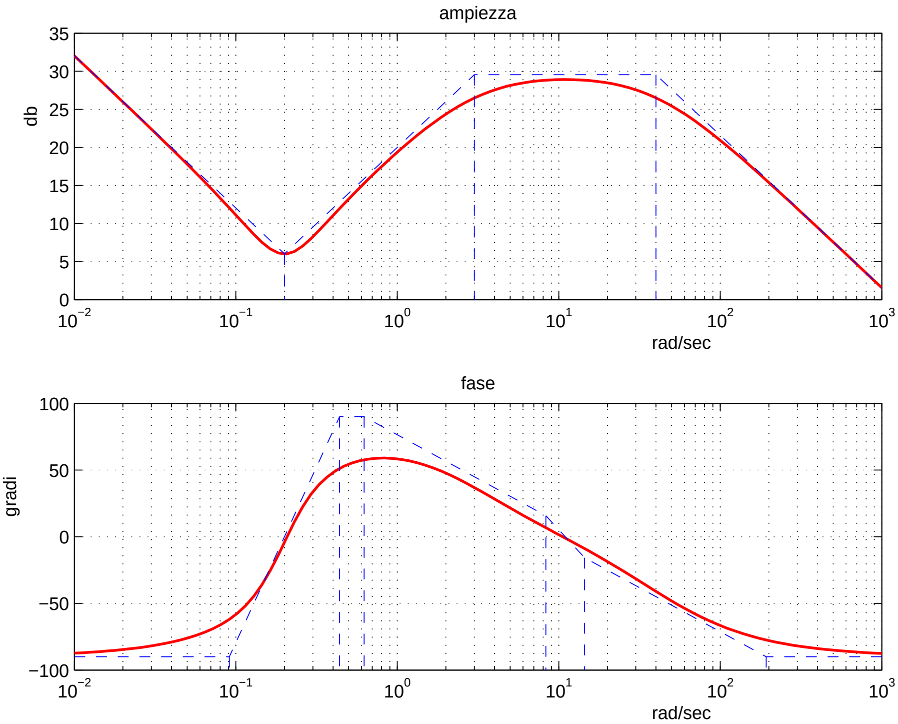
d.2) Stimare qualitativamente il tempo di assestamento T_a del sistema e il periodo T_ω dell'eventuale oscillazione smorzata.
Soluzione: Come si evince dal diagramma di Bode il sistema ha un polo dominante reale con costante di tempo $\tau = 5$ (infatti il primo punto di rottura per valori crescenti della pulsazione è in $\omega = 0.2$ e risulta relativo a un polo reale, mentre il successivo polo è ancora reale e quindi non può essere più dominante e infine l'ultimo punto di rottura che si incontra è relativo a una coppia di poli complessi coniugati con $\omega_n = 9$ e $\delta \approx 0.2$ per cui il valore assoluto della parte reale sarà circa $\delta\omega_n \approx 1.8$ ben al di sopra di 0.2) per cui la risposta sarà aperiodica (senza sovraelongazioni) e con un tempo di assestamento

$$T_a = 3\tau = 15 \text{ s.}$$

d.3) Disegnare l'andamento qualitativo della risposta $y(t)$ al gradino di ampiezza 4.
Soluzione: In figura è riportata la risposta del sistema.



e) Facendo riferimento ai diagrammi di Bode della funzione $G(s)$ mostrati in figura

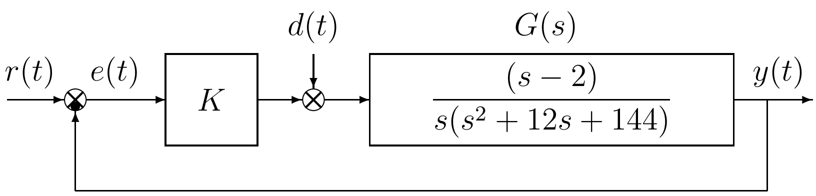


si ricavi l'espressione analitica della funzione $G(s)$.

<u>Soluzione</u>

$$G(s) = \frac{1200(s^2 + 0.2s + 0.04)}{s(s + 40)(s + 3)}$$

f) Sia dato il seguente sistema retroazionato:



f.1) Determinare per quali valori del parametro K il sistema retroazionato è asintoticamente stabile.

<u>Soluzione:</u>

l'equazione caratteristica del sistema retroazionato è

$$1 + K\frac{(s-2)}{s(s^2+12s+144)} = 0 \qquad \rightarrow \qquad s^3 + 12s^2 + (144+K)s - 2K = 0$$

La corrispondente tabella di Routh è la seguente

$$\begin{array}{c|cc}
3 & 1 & 144+K \\
2 & 12 & -2K \\
1 & 1728+14K & \\
0 & -2K &
\end{array}
\qquad
\begin{array}{l}
\\
\\
\rightarrow \;\; K > -123.43 \\
\rightarrow \;\; K < 0
\end{array}$$

Quindi il sistema retroazionato è asintoticamente stabile per:

$$K^* = -123.43 < K < 0$$

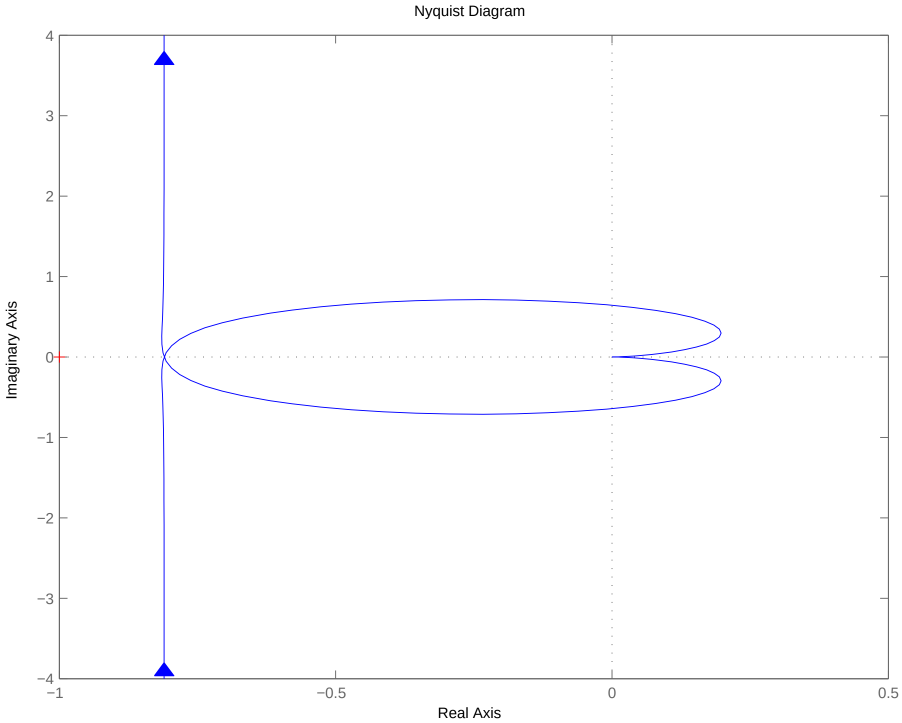
La pulsazione ω^* corrispondente al valore limite K^* è:

$$\omega^* = \sqrt{\frac{-2K^*}{12}} \simeq 4.54 \text{ rad/s}$$

f.2) Posto $K = -100$ disegnare qualitativamente il diagramma di Nyquist completo della funzione d'anello $KG(s)$. Calcolare esattamente la posizione σ_0 di un eventuale asintoto, le eventuali intersezioni con l'asse reale e i corrispondenti valori delle pulsazioni.

Soluzione:

Il diagramma di Nyquist della funzione $KG(s)$ è riportato in figura.



La funzione approssimante per $\omega \to 0$ è

$$G_0(s) = \frac{1.4}{s}$$

pertanto il diagramma parte all'infinito con fase iniziale $\varphi_0 = -\frac{\pi}{2}$.
La funzione approssimante per $\omega \to \infty$ è

$$G_\infty(s) = \frac{-100}{s^2}$$

e quindi il diagramma giunge nell'origine con fase finale $\varphi_\infty = -2\pi$.
Il parametro Δ_τ vale

$$\Delta_\tau = -\frac{1}{2} - \frac{1}{12} = -0.5833 < 0$$

pertanto il diagramma parte in ritardo rispetto alla fase iniziale φ_0.
Il sistema è di tipo 1 pertanto esiste un asintoto verticale la cui ascissa è

$$\sigma_0 = 1.4\Delta_\tau = -0.8166$$

Il parametro Δ_p vale

$$\Delta_p = 2 + 12 = 14 > 0$$

pertanto il diagramma arriva in anticipo rispetto alla fase finale φ_∞.
Lo sfasamento complessivo è

$$\Delta\varphi = -\frac{3}{2}\pi$$

Esiste una sola intersezione con l'asse reale (oltre a quella nell'origine) nel punto di ascissa

$$\sigma_1^* = -K/K^* = 100/-123.43 = 0.8102$$

dove K^* è stato calcolato con l'analisi di Routh del punto precedente. La corrispondente pulsazione ω^* è:

$$\omega^* = \sqrt{\frac{-2K^*}{12}} \simeq 4.54 \text{ rad/s}$$

f.3) Posto $K = -100$, calcolare l'errore a regime $e(\infty)$ quando sul sistema retroazionato siano applicati contemporaneamente il segnale $r(t) = 4$ e il disturbo $d(t) = 2\sin(2\,t)$.

Soluzione:

Dato che il sistema è lineare e soggetto quindi alla sovrapposizione degli effetti, l'errore $E(s)$, espresso mediante la trasformata di Laplace, risulterà:

$$E(s) = E_r(s) + E_d(s)$$

dove $E_r(s)$ è l'errore dovuto al riferimento mentre $E_d(s)$ è l'errore dovuto al disturbo. L'errore $e_r(\infty)$ dovuto al riferimento sarà nullo in quanto si considera un ingresso a gradino in un sistema di tipo 1. Di conseguenza il calcolo dell'errore a regime si riduce a quello dovuto al disturbo $d(t)$:

$$E_d(s) = F_d(s)D(s)$$

dove $D(s)$ è la trasformata di Laplace di $d(t)$ e $F_d(s)$ è la funzione di trasferimento tra $D(s)$ e $E_d(s)$ che vale

$$F_d(s) = -\frac{G(s)}{1 + KG(s)} = \frac{-(s-2)}{s^3 + 12s^2 + 44s + 200}.$$

Essendo $d(t)$ un segnale sinusoidale, per trovarne la risposta a regime si sfrutta il concetto di risposta armonica, per cui $e_d(t) = 2|F_d(j2)|\sin(t + \arg\{F_d(j2)\})$ con $|F_d(j2)| = 0.0165$ e $\arg\{F_d(j2)\} \simeq 287^o$. In conclusione

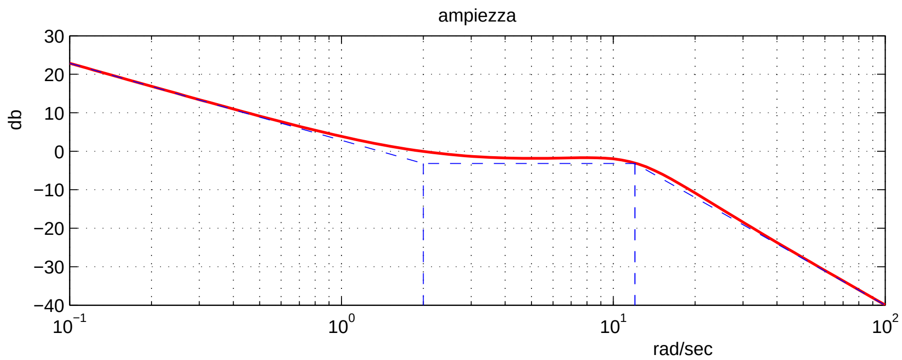
$$e(\infty) = e_r(\infty) + e_d(\infty) = 0 + 0.0329\sin(t + 287^o)$$

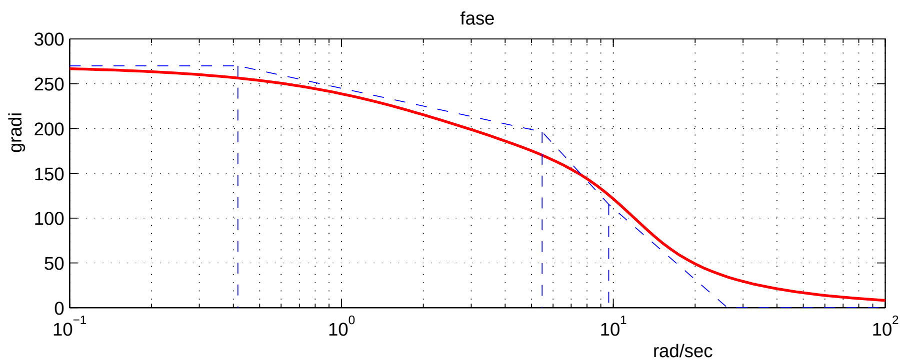
f.4) Posto nuovamente $K = -100$, tracciare (nello schema fornito in allegato) i diagrammi di Bode delle ampiezze e delle fasi del guadagno di anello $K\,G(s)$.

Soluzione:

In figura sono riportati i diagrammi di Bode del sistema. Sul diagramma asintotico delle ampiezze il guadagno β in corrispondenza della pulsazione $\omega = 2$ è $\beta = \left|\frac{1.4}{2}\right| = 0.7 = -3.1$ dB.

Il coefficiente di smorzamento della coppia di poli complessi coniugati è $\delta = 0.5$ pertanto si avrà $M_{\omega_n} = \frac{1}{2\delta} = 1 = 0$ dB.





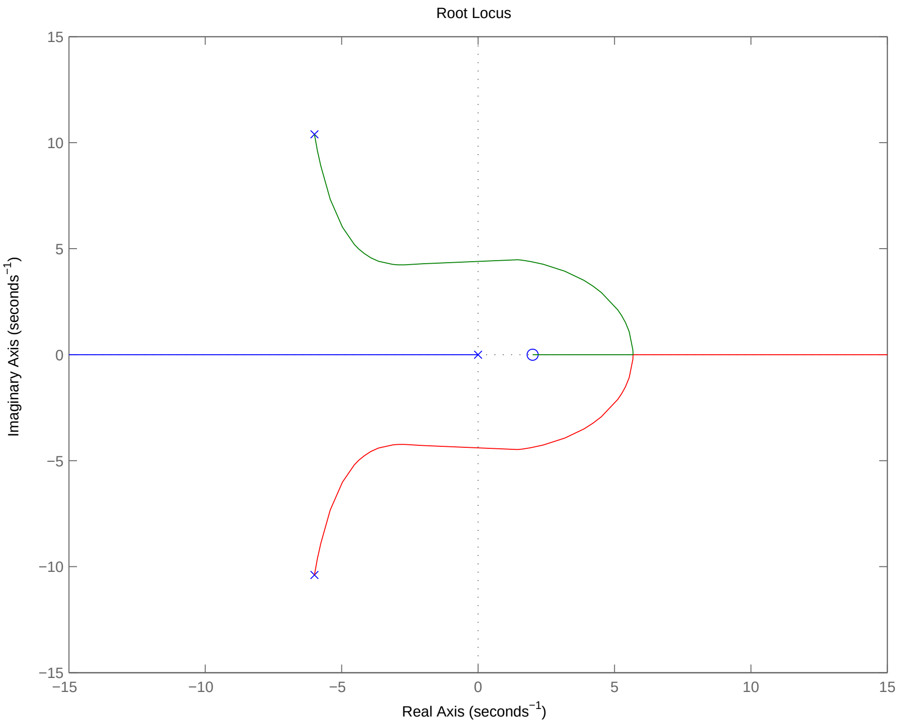
g) **Non è richiesto lo svolgimento di questo esercizio agli iscritti ad Ingegneria Ambientale o a corsi per i quali l'esame è da 5 CFU.**

Con riferimento al sistema descritto nell'esercizio f), tracciare qualitativamente il luogo delle radici del sistema retroazionato per valori negativi del parametro K. Determinare esattamente gli asintoti, il centro degli asintoti, le intersezioni con l'asse immaginario e i corrispondenti valori del guadagno K. Determinare gli eventuali punti di diramazione solo qualitativamente.

Soluzione: Essendo 2 il grado relativo del sistema, esistono 2 asintoti che formano una stella con centro nel punto sull'asse reale di ascissa

$$\sigma_a = \frac{1}{2}(-12 - 2) = -7$$

e che in questo caso appartengono all'asse reale. Il luogo delle radici finale è riportato nella seguente figura.



Dall'analisi svolta mediante il criterio di Routh, risulta che il luogo delle radici attraversa l'asse immaginario in corrispondenza di $\pm j\omega^* = \pm j4.54$ per $K = K^* = -123.43$.

Fondamenti di Controlli Automatici

Diagrammi di Bode

Cognome	
Nome	
Matricola	
Corso