Fondamenti di Controlli Automatici - A.A. 2012/13

6 novembre 2013 - Quiz di Teoria

Cognome	
Nome	
Matricola	
Corso	

Per ciascuno dei test a soluzione multipla segnare con una crocetta tutte le affermazioni che si ritengono giuste. In ogni quiz almeno una affermazione è corretta.

La prova di teoria si ritiene superata se vengono totalizzati almeno 5 punti su 10; diversamente il compito verrà ritenuto insufficiente a prescindere dal risultato della seconda parte della prova (esercizi).

1. La risposta impulsiva $g(t)$ del sistema $G(s) = \dfrac{10}{s^2(s+5)}$:

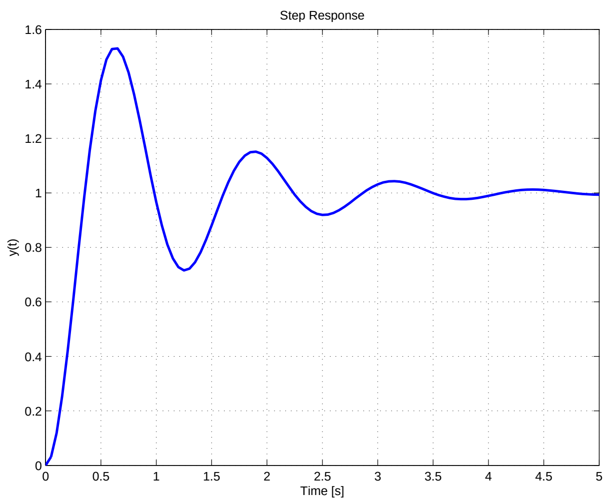
   ◯ non è limitata;
   ◯ è limitata e tende a zero per $t \to \infty$;
   ◯ è limitata ma non tende a zero per $t \to \infty$.

2. La massima sovraelongazione del sistema $G(s) = \dfrac{100}{s^2+4s+4}$ in risposta al gradino unitario è:

   ◯ $S = 100\,\%$;
   ◯ $S = 10\,\%$;
   ◯ $S = 5\,\%$;
   ◯ $S = 0\,\%$.

3. La funzione di trasferimento $G(s) = \frac{Y(s)}{X(s)} = \dfrac{4s^2+s+3}{5s^3+s^2+3s}$ corrisponde all'equazione differenziale:

   ◯ $5\dddot{y}(t) + \ddot{y}(t) + 3\dot{y}(t) = 4\ddot{x}(t) + \dot{x}(t) + 3x(t)$
   ◯ $5\dddot{x}(t) + \ddot{x}(t) + 3\dot{x}(t) = 4\ddot{y}(t) + \dot{y}(t) + 3y(t)$
   ◯ $5\ddot{y}(t) + \dot{y}(t) + 3y(t) = 4\ddot{x}(t) + \dot{x}(t) + 3x(t)$



4. A partire dalla risposta al gradino mostrata in figura è possibile stimare la parte immaginaria ω dei poli dominanti del sistema?

   ◯ no;
   ◯ sì, $\omega \approx 2.5$;
   ◯ sì, $\omega \approx 5$;
   ◯ sì, $\omega \approx 1$.

5. Un sistema del secondo ordine a poli complessi coniugati e privo di zeri, ha un picco di risonanza $M_R > 1$

   ◯ se e solo se $0 < \delta < 1/\sqrt{2}$;
   ◯ se e solo se $0 < \delta < 0.5$;
   ◯ se e solo se $0.5 < \delta < 1/\sqrt{2}$;
   ◯ se e solo se $0 < \delta < 1$.

6. Sia $y(t) = M(\omega)\cos(\omega t + \alpha(\omega) + \varphi_0)$ la risposta asintotica di un sistema lineare stabile all'ingresso $x(t) = N\cos(\omega t + \varphi_0)$. Utilizzando i simboli che caratterizzano i segnali $x(t)$ e $y(t)$, la "definizione" di funzione di risposta armonica $F(\omega)$ è:

   - ○ $F(\omega) = \frac{M(\omega)}{N}\, e^{-j\alpha(\omega)}$;
   - ○ $F(\omega) = M(\omega)\, N\, e^{j\alpha(\omega)}$;
   - ○ $F(\omega) = \frac{N}{M(\omega)}\, e^{j\alpha(\omega)}$;
   - ○ $F(\omega) = \frac{M(\omega)}{N}\, e^{j\alpha(\omega)}$.

7. Il valore finale della funzione definita tramite la sua trasformata $G(s) = \dfrac{2s-1}{(s+1)(s-5)}$ vale:

   - ○ 0;
   - ○ 2;
   - ○ 1/5;
   - ○ non esiste.

8. L'evoluzione libera del sistema $M\,\dot{y}(t) + b\,y(t) = 0$ partendo dalla condizione iniziale $y(0) = a$ è:

   - ○ $y(t) = a\, e^{-\frac{M}{b}t}$;
   - ○ $y(t) = a\, e^{-\frac{b}{M}t}$;
   - ○ $y(t) = \frac{a}{M}\, e^{-\frac{b}{M}t}$;
   - ○ $y(t) = a(1 - e^{-\frac{M}{b}t})$.

9. Per l'applicazione del criterio di Nyquist a un sistema in retroazione:

   - ○ occorre sapere se il sistema ad anello aperto è stabile o instabile;
   - ○ non occorre alcuna informazione sulla stabilità ad anello aperto;
   - ○ occorre conoscere il numero dei poli a parte reale nulla e positiva;
   - ○ occorre conoscere il numero degli zeri a parte reale nulla e positiva.

10. Applicando la tabella di Routh ad un'equazione caratteristica nella quale compaiono solo le potenze pari di s, si può affermare che:

    - ○ il sistema è sicuramente instabile;
    - ○ il sistema è semplicemente stabile;
    - ○ il sistema può essere instabile oppure semplicemente stabile.

Fondamenti di Controlli Automatici - A.A. 2012/13

6 novembre 2013 - Esercizi

Cognome	
Nome	
Matricola	
Corso	

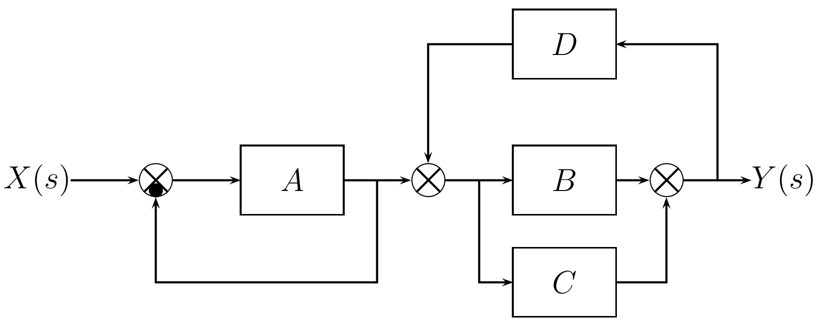
a) Determinare la trasformata di Laplace $X_i(s)$ dei seguenti segnali temporali $x_i(t)$:

$$x_1(t) = \frac{\sin(3t)}{2e^t} + 4, \qquad x_2(t) = 3\delta(t) + 2t^4\, e^{-2t}$$

b) Calcolare la risposta impulsiva $g_i(t)$ delle seguenti funzioni di trasferimento $G_i(s)$:

$$G_1(s) = \frac{9s^2 + 32s + 24}{s^3 + 6s^2 + 8s}, \qquad G_2(s) = \frac{s+6}{(s+2)^2 + 16}$$

c) Dato il seguente schema a blocchi:

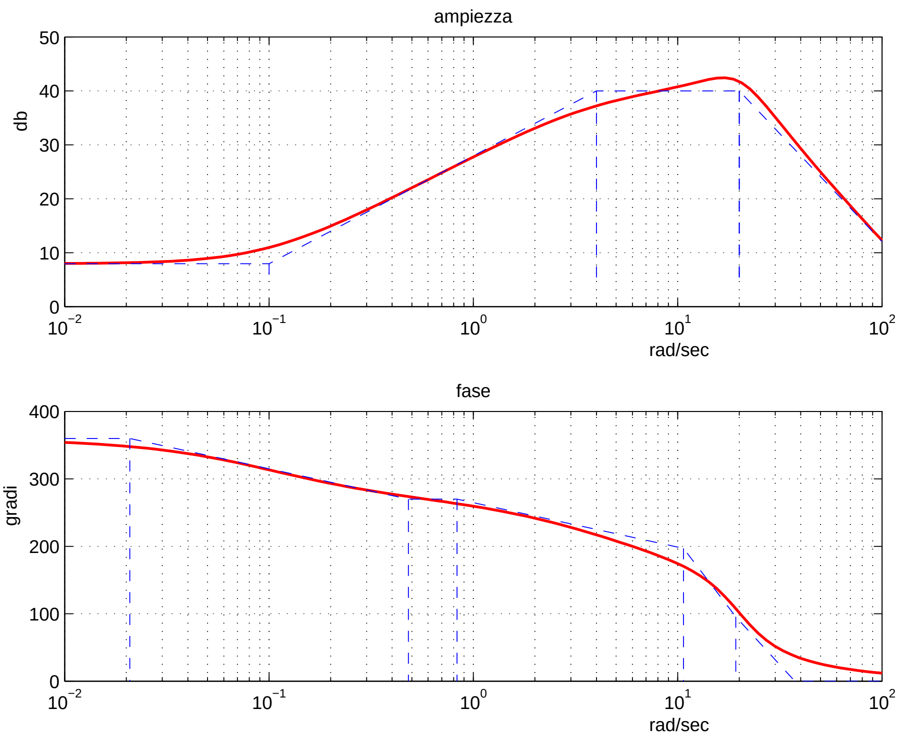


utilizzando la formula di Mason calcolare la funzione di trasferimento $G(s)$ che lega l'ingresso $X(s)$ all'uscita $Y(s)$:

$$G(s) = \frac{Y(s)}{X(s)} =$$

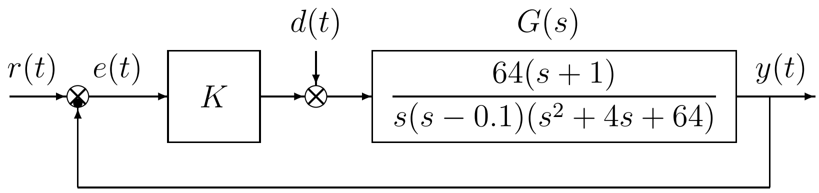
d) Sia data la funzione di trasferimento $G(s) = \dfrac{9(s+10)}{(1+2s)(s^2+6s+36)(1+0.1s)}$.
Disegnare l'andamento qualitativo della risposta $y(t)$ a un gradino in ingresso di ampiezza 2, $x(t) = 2$. Calcolare il valore a regime y_∞ dell'uscita $y(t)$ del sistema, stimare qualitativamente il tempo di assestamento T_a del sistema e il periodo T_ω dell'eventuale oscillazione smorzata.

e) Facendo riferimento ai diagrammi di Bode della funzione $G(s)$ mostrati in figura



si ricavi l'espressione analitica della funzione $G(s)$.

f) Sia dato il seguente sistema retroazionato:



f.1) Determinare per quali valori del parametro K il sistema retroazionato è asintoticamente stabile.

f.2) Posto $K = 1$ disegnare qualitativamente il diagramma di Nyquist completo della funzione d'anello $KG(s)$. Calcolare esattamente la posizione σ_0 di un eventuale asintoto, le eventuali intersezioni con l'asse reale e i corrispondenti valori delle pulsazioni.

f.3) Posto $K = 2$, calcolare l'errore a regime $e(\infty)$ quando sul sistema retroazionato agiscono contemporaneamente il segnale $r(t) = 5$ e il disturbo $d(t) = 2\sin(t)$.

f.4) Posto $K = 1$, tracciare (nello schema fornito in allegato) i diagrammi di Bode delle ampiezze e delle fasi del guadagno di anello $K\,G(s)$.
Indicare sui diagrammi il margine di ampiezza e il margine di fase. Infine, fornire una stima della larghezza di banda del sistema retroazionato.

g) **Non è richiesto lo svolgimento di questo esercizio agli iscritti ad Ingegneria Ambientale o a corsi per i quali l'esame è da 5 CFU.**

Con riferimento al sistema descritto nell'esercizio f), tracciare qualitativamente il luogo delle radici del sistema retroazionato per valori positivi del parametro K. Determinare esattamente gli asintoti, il centro degli asintoti, le intersezioni con l'asse immaginario e i corrispondenti valori del guadagno K. Determinare gli eventuali punti di diramazione solo qualitativamente.

Cognome	
Nome	
Matricola	
Corso	

Fondamenti di Controlli Automatici - A.A. 2012/13

6 novembre 2013 - Quiz di Teoria

Per ciascuno dei test a soluzione multipla segnare con una crocetta tutte le affermazioni che si ritengono giuste. In ogni quiz almeno una affermazione è corretta.

La prova di teoria si ritiene superata se vengono totalizzati almeno 5 punti su 10; diversamente il compito verrà ritenuto insufficiente a prescindere dal risultato della seconda parte della prova (esercizi).

1. La risposta impulsiva $g(t)$ del sistema $G(s) = \dfrac{10}{s^2(s+5)}$:

   ⊗ non è limitata;
   ○ è limitata e tende a zero per $t \to \infty$;
   ○ è limitata ma non tende a zero per $t \to \infty$.

2. La massima sovraelongazione del sistema $G(s) = \dfrac{100}{s^2+4s+4}$ in risposta al gradino unitario è:

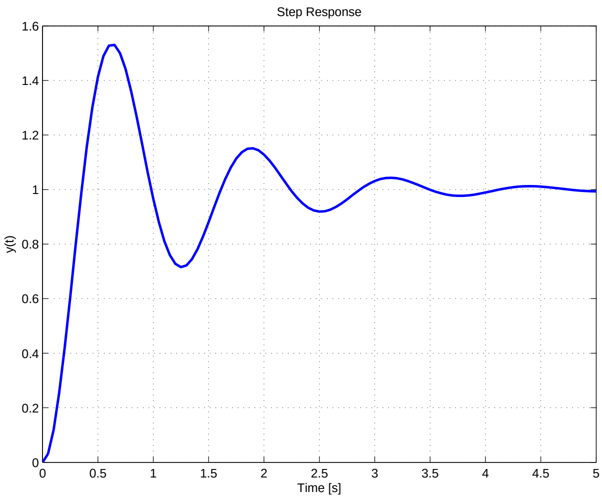
   ○ $S = 100\,\%$;
   ○ $S = 10\,\%$;
   ○ $S = 5\,\%$;
   ⊗ $S = 0\,\%$.

3. La funzione di trasferimento $G(s) = \frac{Y(s)}{X(s)} = \dfrac{4s^2+s+3}{5s^3+s^2+3s}$ corrisponde all'equazione differenziale:

   ⊗ $5\dddot{y}(t) + \ddot{y}(t) + 3\dot{y}(t) = 4\ddot{x}(t) + \dot{x}(t) + 3x(t)$
   ○ $5\dddot{x}(t) + \ddot{x}(t) + 3\dot{x}(t) = 4\ddot{y}(t) + \dot{y}(t) + 3y(t)$
   ○ $5\ddot{y}(t) + \dot{y}(t) + 3y(t) = 4\ddot{x}(t) + \dot{x}(t) + 3x(t)$

4. A partire dalla risposta al gradino mostrata in figura è possibile stimare la parte immaginaria ω dei poli dominanti del sistema?

   ○ no;
   ○ sì, $\omega \approx 2.5$;
   ⊗ sì, $\omega \approx 5$;
   ○ sì, $\omega \approx 1$.



5. Un sistema del secondo ordine a poli complessi coniugati e privo di zeri, ha un picco di risonanza $M_R > 1$

   ⊗ se e solo se $0 < \delta < 1/\sqrt{2}$;
   ○ se e solo se $0 < \delta < 0.5$;
   ○ se e solo se $0.5 < \delta < 1/\sqrt{2}$;
   ○ se e solo se $0 < \delta < 1$.

6. Sia $y(t) = M(\omega)\,\cos(\omega t + \alpha(\omega) + \varphi_0)$ la risposta asintotica di un sistema lineare stabile all'ingresso $x(t) = N\,\cos(\omega t + \varphi_0)$. Utilizzando i simboli che caratterizzano i segnali $x(t)$ e $y(t)$, la "definizione" di funzione di risposta armonica $F(\omega)$ è:

   ○ $F(\omega) = \frac{M(\omega)}{N}\,e^{-j\alpha(\omega)}$;

   ○ $F(\omega) = M(\omega)\,N\,e^{j\alpha(\omega)}$;

   ○ $F(\omega) = \frac{N}{M(\omega)}\,e^{j\alpha(\omega)}$;

   ⊗ $F(\omega) = \frac{M(\omega)}{N}\,e^{j\alpha(\omega)}$.

7. Il valore finale della funzione definita tramite la sua trasformata $G(s) = \dfrac{2s-1}{(s+1)(s-5)}$ vale:

   ○ 0;

   ○ 2;

   ○ 1/5;

   ⊗ non esiste.

8. L'evoluzione libera del sistema $M\,\dot{y}(t) + b\,y(t) = 0$ partendo dalla condizione iniziale $y(0) = a$ è:

   ○ $y(t) = a\,e^{-\frac{M}{b}\,t}$;

   ⊗ $y(t) = a\,e^{-\frac{b}{M}\,t}$;

   ○ $y(t) = \frac{a}{M}\,e^{-\frac{b}{M}\,t}$;

   ○ $y(t) = a(1 - e^{-\frac{M}{b}\,t})$.

9. Per l'applicazione del criterio di Nyquist a un sistema in retroazione:

   ○ occorre sapere se il sistema ad anello aperto è stabile o instabile;

   ○ non occorre alcuna informazione sulla stabilità ad anello aperto;

   ⊗ occorre conoscere il numero dei poli a parte reale nulla e positiva;

   ○ occorre conoscere il numero degli zeri a parte reale nulla e positiva.

10. Applicando la tabella di Routh ad un'equazione caratteristica nella quale compaiono solo le potenze pari di s, si può affermare che:

    ○ il sistema è sicuramente instabile;

    ○ il sistema è semplicemente stabile;

    ⊗ il sistema può essere instabile oppure semplicemente stabile.

Fondamenti di Controlli Automatici - A.A. 2012/13

6 novembre 2013 - Esercizi

Cognome	
Nome	
Matricola	
Corso	

a) Determinare la trasformata di Laplace $X_i(s)$ dei seguenti segnali temporali $x_i(t)$:

$$x_1(t) = \frac{\sin(3t)}{2e^t} + 4, \qquad x_2(t) = 3\delta(t) + 2t^4\, e^{-2t}$$

Soluzione:

$$X_1(s) = \frac{1}{2}\frac{3}{(s+1)^2+3^2} + \frac{4}{s}, \qquad X_2(s) = 3 + \frac{48}{(s+2)^5},$$

b) Calcolare la risposta impulsiva $g_i(t)$ delle seguenti funzioni di trasferimento $G_i(s)$:

$$G_1(s) = \frac{9s^2+32s+24}{s^3+6s^2+8s}, \qquad G_2(s) = \frac{s+6}{(s+2)^2+16}$$

Soluzione:
La funzione $G_1(s)$ può essere riscritta come

$$G_1(s) = \frac{1}{s+2} + \frac{5}{s+4} + \frac{3}{s}$$

pertanto la sua risposta impulsiva risulta

$$g_1(t) = e^{-2t} + 5e^{-4t} + 3.$$

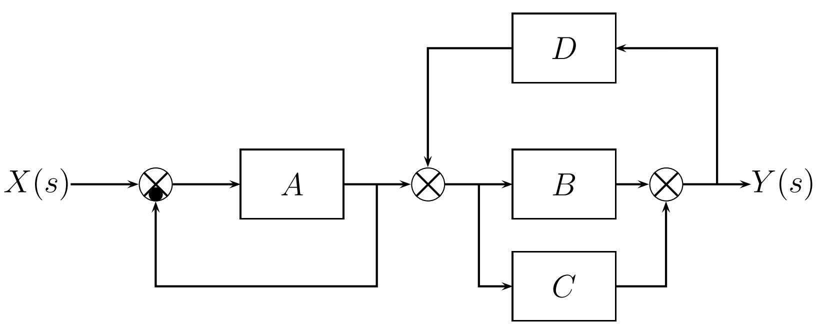
La funzione $G_2(s)$ può essere riscritta come

$$G_2(s) = \frac{s+2}{(s+2)^2+4^2} + \frac{4}{(s+2)^2+4^2}$$

di conseguenza la sua risposta impulsiva risulta

$$g_2(t) = [\cos(4t) + \sin(4t)]\, e^{-2t}$$

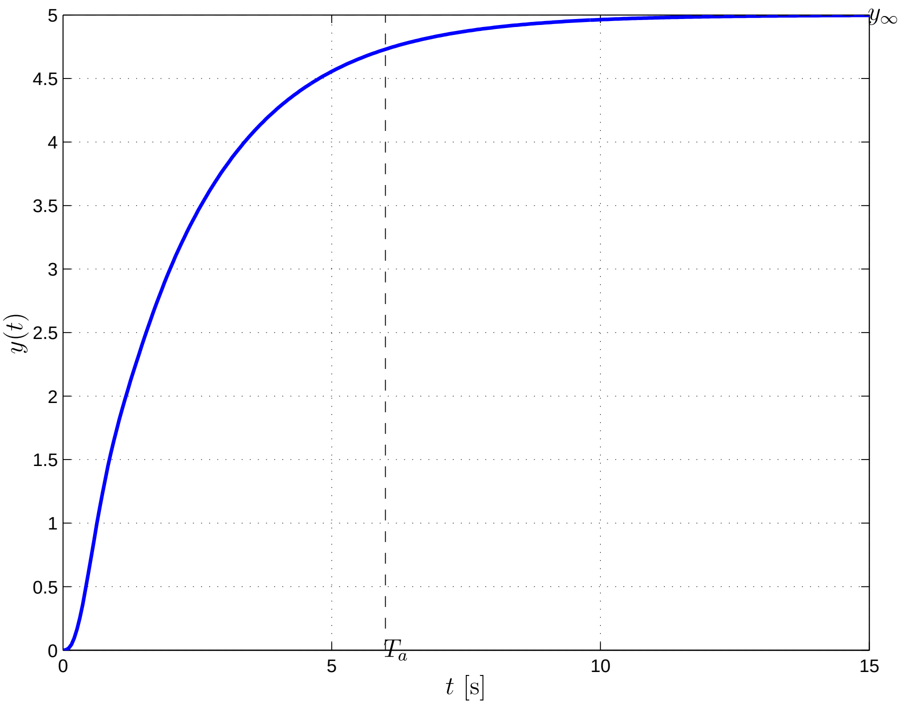
c) Dato il seguente schema a blocchi:



utilizzando la formula di Mason calcolare la funzione di trasferimento $G(s)$ che lega l'ingresso $X(s)$ all'uscita $Y(s)$:

$$G(s) = \frac{Y(s)}{X(s)} = \frac{AB+AC}{1+A-CD-BD-ABD-ACD}$$

d) Sia data la funzione di trasferimento $G(s) = \dfrac{9(s+10)}{(1+2s)(s^2+6s+36)(1+0.1s)}$.
Disegnare l'andamento qualitativo della risposta $y(t)$ a un gradino in ingresso di ampiezza 2, $x(t) = 2$. Calcolare il valore a regime y_∞ dell'uscita $y(t)$ del sistema, stimare qualitativamente il tempo di assestamento T_a del sistema e il periodo T_ω dell'eventuale oscillazione smorzata.
Soluzione: Il sistema ha un polo reale dominante $p = -1/2$ pertanto la risposta al gradino sarà di tipo aperiodico. In figura è riportata la risposta del sistema.



Il valore a regime dell'uscita per un gradino in ingresso di ampiezza $A = 2$ risulta

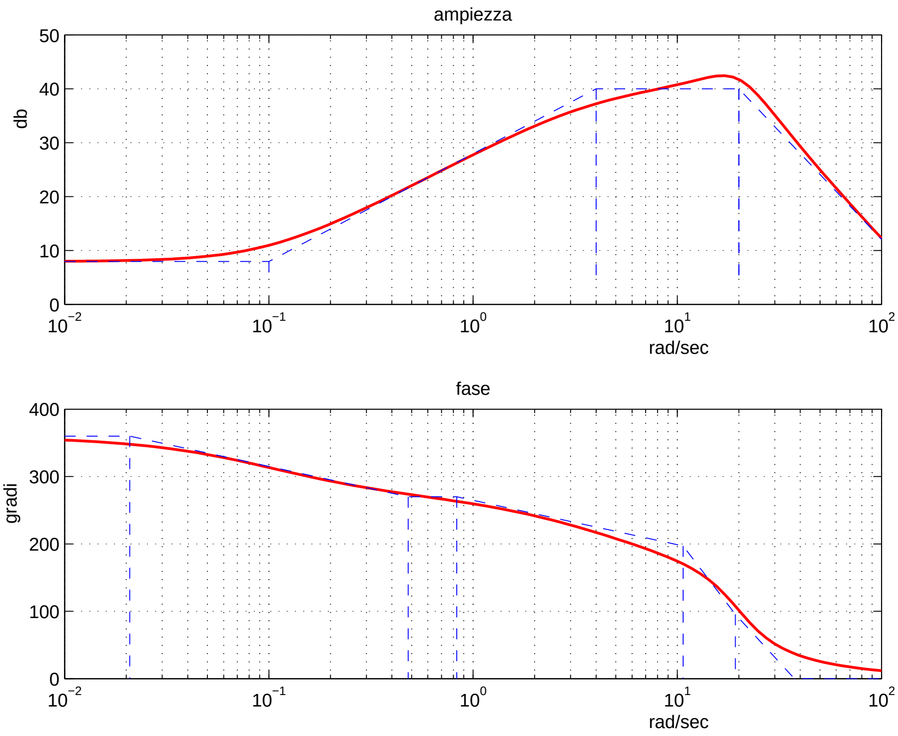
$$y_\infty = A\,G(0) = 2 \cdot 2.5 = 5$$

La costante di tempo del polo dominante è $\tau = 2$ per cui il tempo di assestamento T_a è

$$T_a = 3\tau = 6 \text{ s},$$

Non esiste oscillazione.

e) Facendo riferimento ai diagrammi di Bode della funzione $G(s)$ mostrati in figura

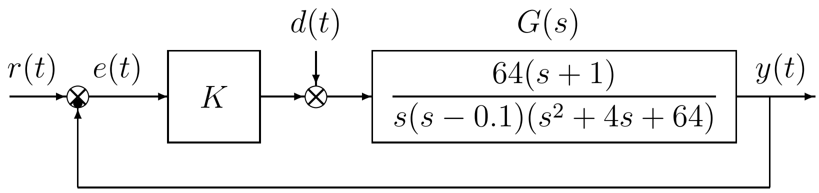


si ricavi l'espressione analitica della funzione $G(s)$.

<u>Soluzione</u>

$$G(s) = -40000 \frac{(s-0.1)}{(s+4)(s^2+16s+400)}$$

f) Sia dato il seguente sistema retroazionato:



f.1) Determinare per quali valori del parametro K il sistema retroazionato è asintoticamente stabile.

<u>Soluzione:</u>

l'equazione caratteristica del sistema retroazionato è

$$1+K\frac{64(s+1)}{s(s-0.1)(s^2+4s+64)} = 0 \qquad \rightarrow \qquad s^4+3.9s^3+63.6s^2+(64K-6.4)s+64K = 0$$

La corrispondente tabella di Routh è la seguente

$$\begin{array}{c|ccc l}
4 & 1 & 63.6 & 64K & \\
3 & 3.9 & 64K-6.4 & & \\
2 & 254.44-64K & 249.6K & & \rightarrow \quad K < 3.9756 \\
1 & -4096K^2+15720K-1628.4 & & & \rightarrow \quad 0.1065 < K < 3.7314 \\
0 & 249.6K & & & \rightarrow \quad K > 0
\end{array}$$

Quindi il sistema retroazionato è asintoticamente stabile per:

$$K_1^* = 0.1065 < K < 3.7314 = K_2^*$$

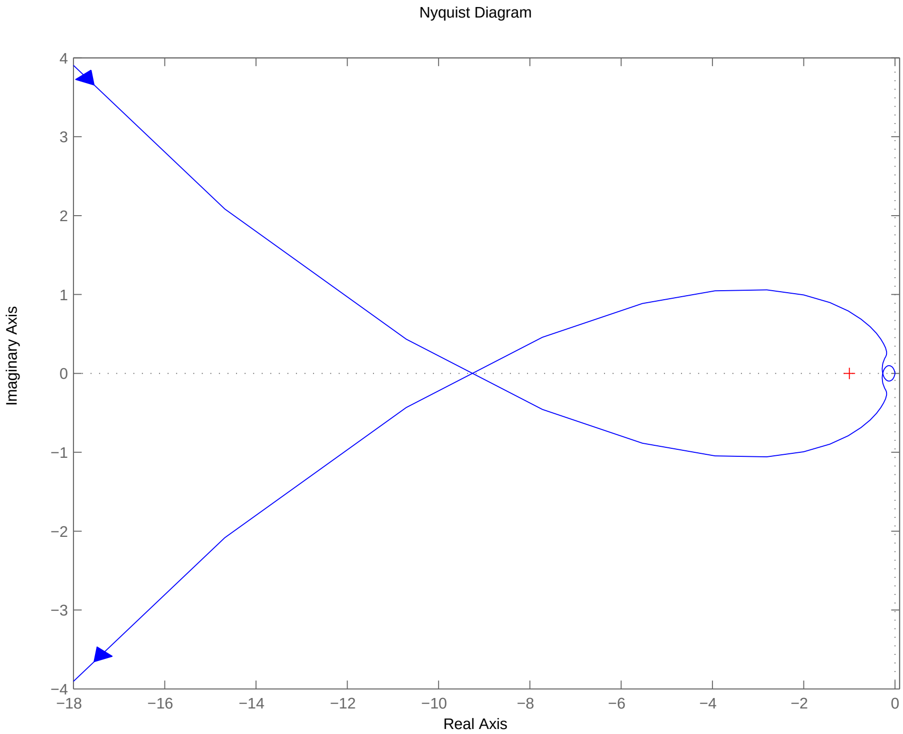
Le pulsazioni ω_1^* e ω_2^* corrispondenti ai valori limite K_1^* e K_2^* sono:

$$\omega_1^\star = \sqrt{\frac{64K_1^*-6.4}{3.9}} \simeq 0.3266 \text{ rad/s} \qquad \omega_2^\star = \sqrt{\frac{64K_2^*-6.4}{3.9}} \simeq 7.7196 \text{ rad/s}$$

f.2) Posto $K = 1$ disegnare qualitativamente il diagramma di Nyquist completo della funzione d'anello $KG(s)$. Calcolare esattamente la posizione σ_0 di un eventuale asintoto, le eventuali intersezioni con l'asse reale e i corrispondenti valori delle pulsazioni.

Soluzione:

Il diagramma di Nyquist della funzione $G(s)$ è riportato in figura.



La funzione approssimante per $\omega \to 0$ è

$$G_0(s) = \frac{-10}{s}$$

pertanto il diagramma parte all'infinito con fase iniziale $\varphi_0 = -\frac{3}{2}\pi$.
La funzione approssimante per $\omega \to \infty$ è

$$G_\infty(s) = \frac{64}{s^3}$$

e quindi il diagramma giunge nell'origine con fase finale $\varphi_\infty = -\frac{3}{2}\pi$.
Il parametro Δ_τ vale

$$\Delta_\tau = 1 - \left(-\frac{1}{0.1} + \frac{4}{64}\right) = 10.9375 > 0$$

pertanto il diagramma parte in anticipo rispetto alla fase iniziale φ_0.
Il sistema è di tipo 1 pertanto esiste un asintoto verticale la cui ascissa è

$$\sigma_0 = -10\Delta_\tau = -109.375$$

Il parametro Δ_p vale

$$\Delta_p = -1 - (0.1 - 4) = 2.9 > 0$$

pertanto il diagramma arriva in anticipo rispetto alla fase finale φ_∞.
Lo sfasamento complessivo è

$$\Delta\varphi = 0$$

Esistono due intersezioni con l'asse reale che, in virtù dell'analisi svolta con Routh al primo punto, risultano alle ascisse

$$\sigma_1^* = -1/K_1^* = -1/0.1065 = -9.39 \qquad \sigma_2^* = -1/K_2^* = -1/3.7314 = -0.268$$

Le corrispondenti pulsazioni sono

$$\omega_1^\star \simeq 0.3266 \text{ rad/s} \qquad \omega_2^\star \simeq 7.7196 \text{ rad/s}$$

f.3) Posto $K = 2$, calcolare l'errore a regime $e(\infty)$ quando sul sistema retroazionato agiscono contemporaneamente il segnale $r(t) = 5$ e il disturbo $d(t) = 2\sin(t)$.

Soluzione:

Dato che il sistema è lineare e soggetto quindi alla sovrapposizione degli effetti, l'errore $E(s)$, espresso mediante la trasformata di Laplace, risulterà:

$$E(s) = E_r(s) + E_d(s)$$

dove $E_r(s)$ è l'errore dovuto al riferimento mentre $E_d(s)$ è l'errore dovuto al disturbo. L'errore $e_r(\infty)$ dovuto al riferimento sarà nullo in quanto si considera un ingresso a gradino in un sistema di tipo 1. L'errore dovuto al disturbo $d(t)$ è dato da:

$$E_d(s) = F_d(s)D(s)$$

dove $D(s)$ è la trasformata di Laplace di $d(t)$ e $F_d(s)$ è la funzione di trasferimento tra $D(s)$ e $E_d(s)$ che vale

$$F_d(s) = -\frac{G(s)}{1 + KG(s)} = \frac{-64s - 64}{s^4 + 3.9s^3 + 63.6s^2 + 121.6s + 128}.$$

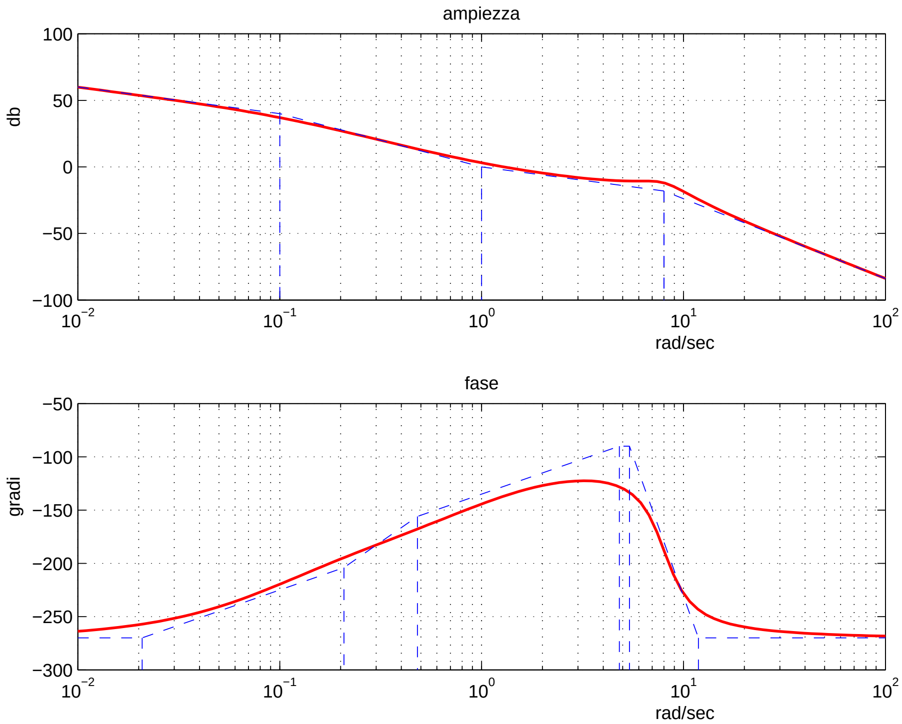
Essendo $d(t)$ un segnale sinusoidale, per trovarne la risposta a regime si sfrutta il concetto di risposta armonica, per cui $e_d(t) = 5|F_d(j1)|\sin(t + \arg\{F_d(j1)\})$ con $|F_d(j1)| = 0.6722$ e $\arg\{F_d(j1)\} \simeq 164^o$. In conclusione

$$e(\infty) = e_r(\infty) + e_d(\infty) = 0 + 1.3444\sin(t + 164^o)$$

f.4) Posto $K = 1$, tracciare (nello schema fornito in allegato) i diagrammi di Bode delle ampiezze e delle fasi del guadagno di anello $K\,G(s)$.
Indicare sui diagrammi il margine di ampiezza e il margine di fase. Infine, fornire una stima della larghezza di banda del sistema retroazionato.

Soluzione:

In figura sono riportati i diagrammi di Bode del sistema. Sul diagramma asintotico delle ampiezze il guadagno β in corrispondenza della pulsazione $\omega = 0.1$ è $\beta = \left|\frac{-10}{0.1}\right| = 100 = 40$ dB.
Il coefficiente di smorzamento della coppia di poli complessi coniugati è $\delta = 0.25$ pertanto si avrà $M_{\omega_n} = \frac{1}{2\delta} = 2 \simeq 6$ dB.



Il margine di ampiezza risulta $M_a = 11.4$dB per $\omega = 7.72$ rad/sec e il margine di fase $M_f \simeq 43.1^o$ per $\omega \simeq 1.29$ rad/sec.
La banda del sistema retroazionato può essere stimata sulla base della pulsazione di incrocio del sistema in catena aperta e sarà quindi circa [0, 1.3] rad/sec.

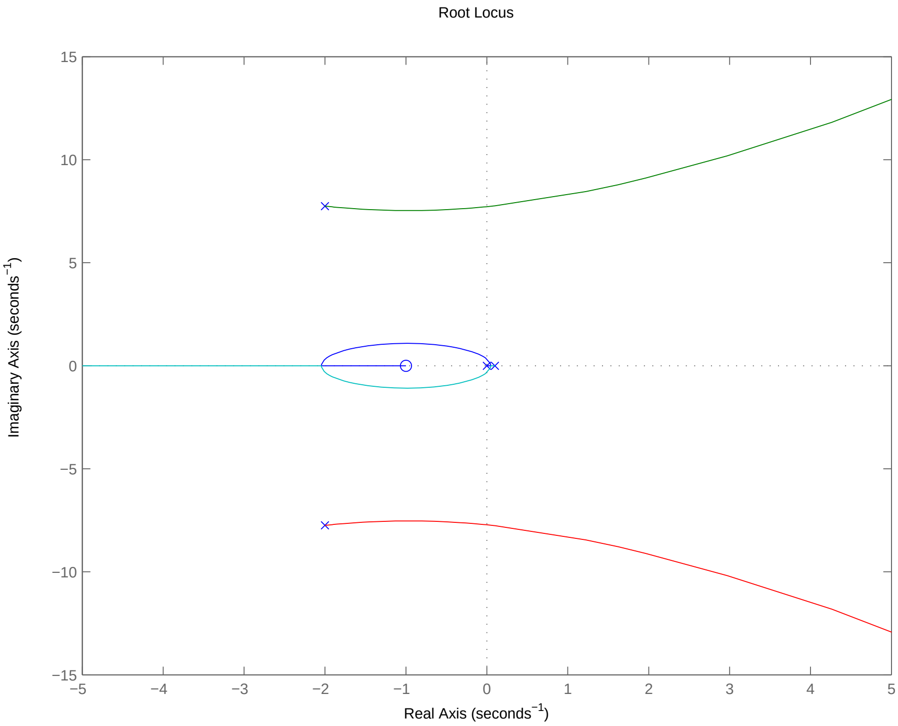
g) **Non è richiesto lo svolgimento di questo esercizio agli iscritti ad Ingegneria Ambientale o a corsi per i quali l'esame è da 5 CFU.**

Con riferimento al sistema descritto nell'esercizio f), tracciare qualitativamente il luogo delle radici del sistema retroazionato per valori positivi del parametro K. Determinare esattamente gli asintoti, il centro degli asintoti, le intersezioni con l'asse immaginario e i corrispondenti valori del guadagno K. Determinare gli eventuali punti di diramazione solo qualitativamente.

Soluzione: Essendo 3 il grado relativo del sistema, esistono 3 asintoti che formano una stella con centro nel punto sull'asse reale di ascissa

$$\sigma_a = \frac{1}{3}(0.1 - 4 + 1) = -0.97$$

Il luogo delle radici finale è riportato nella seguente figura.



Dall'analisi svolta mediante il criterio di Routh, risulta che il luogo delle radici attraversa l'asse immaginario in corrispondenza di $\pm j\omega_1^\star = \pm j0.3266$ per $K = K_1^*$ e di $\pm j\omega_2^\star = \pm j7.7196$ per $K = K_2^*$.

Fondamenti di Controlli Automatici

Diagrammi di Bode

Cognome	
Nome	
Matricola	
Corso