Fondamenti di Controlli Automatici - A.A. 2012/13
6 settembre 2013 - Quiz di Teoria

Cognome	
Nome	
Matricola	
Corso	

Per ciascuno dei test a soluzione multipla segnare con una crocetta tutte le affermazioni che si ritengono giuste. In ogni quiz almeno una affermazione è corretta.

La prova di teoria si ritiene superata se vengono totalizzati almeno 5 punti su 10; diversamente il compito verrà ritenuto insufficiente a prescindere dal risultato della seconda parte della prova (esercizi).

1. Sia $F(s)$ la trasformata di Laplace della funzione del tempo $f(t)$, $\mathcal{L}[f(t)] = F(s)$ (con $f(t)$ nulla per $t < 0$). La proprietà di traslazione nel tempo delle trasformate di Laplace afferma che:
   - ○ $\mathcal{L}[f(t-t_0)] = e^{t_0}\, F(s)$
   - ○ $\mathcal{L}[f(t-t_0)] = e^{-s}\, F(s)$
   - ○ $\mathcal{L}[f(t-t_0)] = e^{-t_0 s}\, F(s)$
   - ○ $\mathcal{L}[f(t-t_0)] = e^{s/t_0}\, F(s)$

2. La massima sovraelongazione percentuale $S\%$ in un sistema del 2^o ordine è:
   - ○ $S\% = 100\, e^{\frac{\pi\delta}{\sqrt{1-\delta^2}}}$;
   - ○ $S\% = 100\, e^{\frac{\pi\sqrt{1-\delta^2}}{\delta}}$;
   - ○ $S\% = 100\, e^{-\frac{\pi\delta}{\sqrt{1-\delta^2}}}$;
   - ○ $S\% = 100\, e^{-\frac{\pi\sqrt{1-\delta^2}}{\delta}}$.

3. La pulsazione di oscillazione ω della risposta al gradino unitario del sistema $G(s) = \frac{13}{s^2+4\,s+13}$ è:
   - ○ $\omega = 13$;
   - ○ $\omega = \sqrt{13}$;
   - ○ $\omega = 3$;
   - ○ $\omega = 2$.

4. Il valore iniziale della risposta all'impulso del sistema $G(s) = \dfrac{1+3s}{s(1+4s)}$ è:
   - ○ 0
   - ○ ∞
   - ○ $\frac{3}{4}$
   - ○ 1

5. La risposta al gradino di un sistema del primo ordine raggiunge, dopo tre costanti di tempo dall'applicazione dell'ingresso:
   - ○ il 100% del valore finale
   - ○ il 99% del valore finale
   - ○ il 95% del valore finale
   - ○ il 85% del valore finale

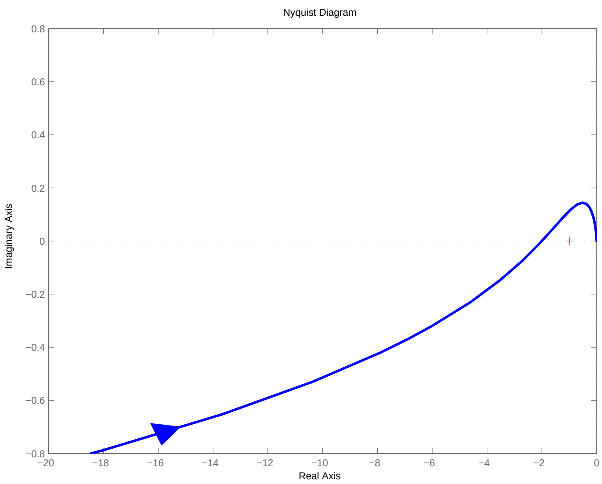
6. Se la prima colonna della tabella di Routh di un'equazione caratteristica di 4^o grado ha due elementi negativi e i rimanenti positivi, ne segue che l'equazione caratteristica:
   - ◯ può avere tutte le radici a parte reale positiva
   - ◯ ha solo una radice a parte reale positiva
   - ◯ ha almeno una radice a parte reale positiva
   - ◯ ha almeno una radice a parte reale negativa

7. L'errore a regime di un sistema $G(s)$ con ingresso a parabola $r(t) = \frac{R_0}{2}t^2$ si può determinare come $e = \frac{R_0}{K_e}$ dove K_e vale:
   - ◯ $K_e = \lim_{s\to 0} G(s)$
   - ◯ $K_e = \lim_{s\to 0} sG(s)$
   - ◯ $K_e = \lim_{s\to 0} s^2G(s)$

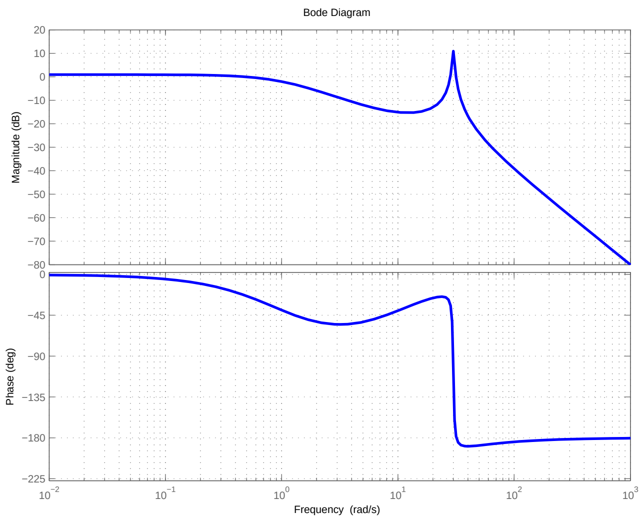
8. La funzione di trasferimento $G(s) = \frac{Y(s)}{X(s)} = \dfrac{5s^2+2s+3}{s^3+s^2+3s}$ corrisponde all'equazione differenziale:
   - ◯ $3\dot{x} + \ddot{x} + \dddot{x} = 5\ddot{y} + 2\dot{y} + 3y$
   - ◯ $\ddot{y} + \dot{y} + 3y = 5\dot{x} + 2x + 3$
   - ◯ $3\dot{y} + \ddot{y} + \dddot{y} = 5\ddot{x} + 2\dot{x} + 3x$

9. Sia data la funzione di anello

$$G(s) = K\frac{(1+\tau_1' s)}{s^2\,(1+\tau_1 s)\,(1+\tau_2 s)}$$



dove le costanti τ_1', τ_1 e τ_2 sono positive. Il corrispondente diagramma di Nyquist per le sole pulsazioni positive è riportato in figura. Determinare per quali valori del guadagno K il sistema retroazionato risulta asintoticamente stabile:
   - ◯ $\forall K > 0$
   - ◯ $\forall K < 0$
   - ◯ il sistema retroazionato è sempre instabile
   - ◯ $0 < K < K_1$ essendo $K_1 > 0$ una costante opportuna
   - ◯ $K_2 < K < 0$ essendo $K_2 < 0$ una costante opportuna



10. La risposta del sistema di cui in figura sono riportati i diagrammi di Bode al segnale $x(t) = 2\sin(30t)$ risulta:
   - ◯ $y(t) \approx 7\sin(30t + 106^o)$;
   - ◯ $y(t) \approx 20\sin(30t - 106^o)$;
   - ◯ $y(t) \approx 0.26\sin(30t - 190^o)$;
   - ◯ $y(t) \approx 7\sin(30t - 106^o)$.

Fondamenti di Controlli Automatici - A.A. 2012/13

6 settembre 2013 - Esercizi

Cognome	
Nome	
Matricola	
Corso	

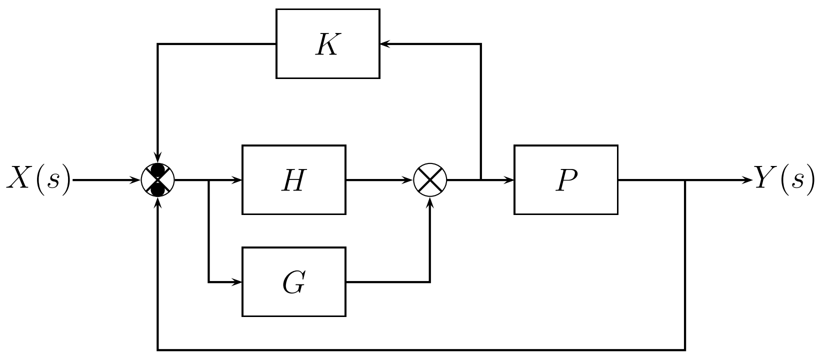
a) Determinare la trasformata di Laplace $X_i(s)$ dei seguenti segnali temporali $x_i(t)$:

$$x_1(t) = e^{-2t}\left[\frac{\cos(2t)}{2} - 2\right], \qquad x_2(t) = 1 + 3t^4\, e^{-9t}$$

b) Calcolare la risposta impulsiva $g_i(t)$ delle seguenti funzioni di trasferimento $G_i(s)$:

$$G_1(s) = \frac{3s^2 + 7s + 6}{s^2 + 3s + 2}, \qquad G_2(s) = \frac{21}{(s+3)^2 + 7^2} + \frac{10}{(s+5)^3}$$

c) Dato il seguente schema a blocchi:



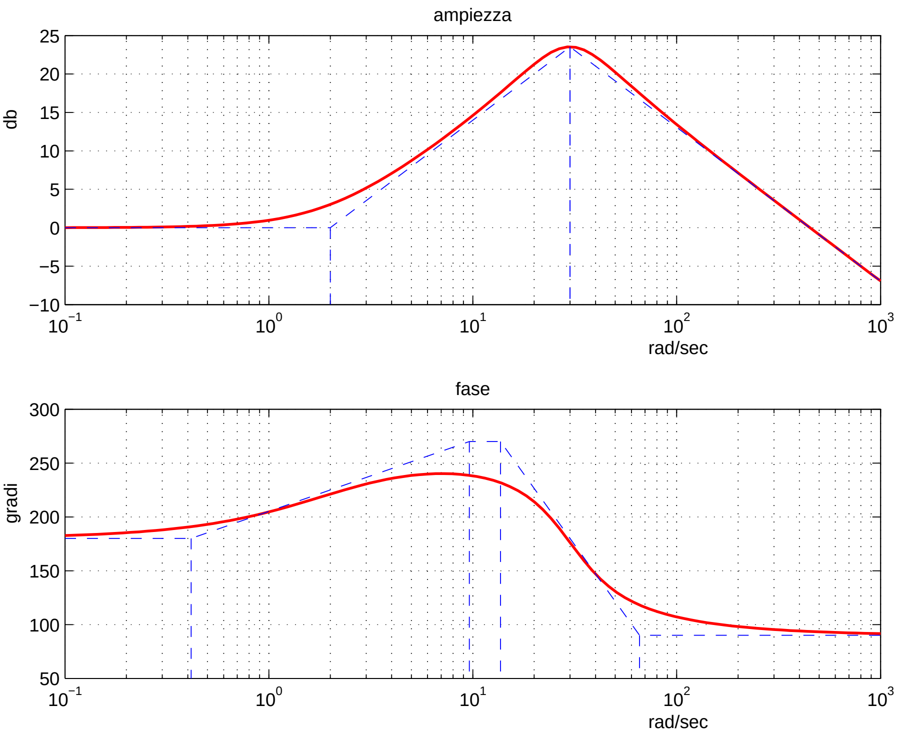
utilizzando la formula di Mason calcolare la funzione di trasferimento $G(s)$ che lega l'ingresso $X(s)$ all'uscita $Y(s)$:

$$G(s) = \frac{Y(s)}{X(s)} =$$

d) Sia data la funzione di trasferimento $G(s) = \dfrac{(s+10)}{(1+7s)(s^2+2s+5)(s+5)}$.

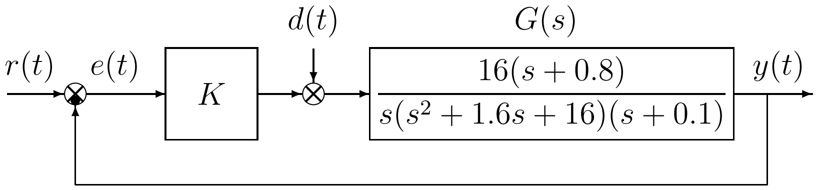
Disegnare l'andamento qualitativo della risposta $y(t)$ a un gradino in ingresso di ampiezza 4, $x(t) = 4$. Calcolare il valore a regime y_∞ dell'uscita $y(t)$ del sistema, stimare qualitativamente il tempo di assestamento T_a del sistema e il periodo T_ω dell'eventuale oscillazione smorzata.

e) Facendo riferimento ai diagrammi di Bode della funzione $G(s)$ mostrati in figura



si ricavi l'espressione analitica della funzione $G(s)$.

f) Sia dato il seguente sistema retroazionato:



f.1) Determinare per quali valori del parametro K il sistema retroazionato è asintoticamente stabile.

f.2) Posto $K = 1$ disegnare qualitativamente il diagramma di Nyquist completo della funzione d'anello $KG(s)$. Calcolare esattamente la posizione σ_0 di un eventuale asintoto, le eventuali intersezioni con l'asse reale e i corrispondenti valori delle pulsazioni.

f.3) Posto $K = 0.5$, calcolare l'errore a regime $e(\infty)$ quando sul sistema retroazionato agiscono contemporaneamente il segnale $r(t) = 10t$ e il disturbo $d(t) = 5\cos(t)$.

f.4) Posto $K = 1$, tracciare (nello schema fornito in allegato) i diagrammi di Bode delle ampiezze e delle fasi del guadagno di anello $K\,G(s)$.
Indicare sui diagrammi il margine di ampiezza e il margine di fase. Infine, fornire una stima della larghezza di banda del sistema retroazionato.

g) **Non è richiesto lo svolgimento di questo esercizio agli iscritti ad Ingegneria Ambientale.**

Con riferimento al sistema descritto nell'esercizio f), tracciare qualitativamente il luogo delle radici del sistema retroazionato per valori positivi del parametro K. Determinare esattamente gli asintoti, il centro degli asintoti, le intersezioni con l'asse immaginario e i corrispondenti valori del guadagno K. Determinare gli eventuali punti di diramazione solo qualitativamente.

Cognome	
Nome	
Matricola	
Corso	

Fondamenti di Controlli Automatici - A.A. 2012/13
6 settembre 2013 - Quiz di Teoria

Per ciascuno dei test a soluzione multipla segnare con una crocetta tutte le affermazioni che si ritengono giuste. In ogni quiz almeno una affermazione è corretta.

La prova di teoria si ritiene superata se vengono totalizzati almeno 5 punti su 10; diversamente il compito verrà ritenuto insufficiente a prescindere dal risultato della seconda parte della prova (esercizi).

1. Sia $F(s)$ la trasformata di Laplace della funzione del tempo $f(t)$, $\mathcal{L}[f(t)] = F(s)$ (con $f(t)$ nulla per $t < 0$). La proprietà di traslazione nel tempo delle trasformate di Laplace afferma che:

   ○ $\mathcal{L}[f(t-t_0)] = e^{t_0}\, F(s)$
   ○ $\mathcal{L}[f(t-t_0)] = e^{-s}\, F(s)$
   ⊗ $\mathcal{L}[f(t-t_0)] = e^{-t_0 s}\, F(s)$
   ○ $\mathcal{L}[f(t-t_0)] = e^{s/t_0}\, F(s)$

2. La massima sovraelongazione percentuale $S\%$ in un sistema del 2^o ordine è:

   ○ $S\% = 100\, e^{\frac{\pi\delta}{\sqrt{1-\delta^2}}}$;
   ○ $S\% = 100\, e^{\frac{\pi\sqrt{1-\delta^2}}{\delta}}$;
   ⊗ $S\% = 100\, e^{-\frac{\pi\delta}{\sqrt{1-\delta^2}}}$;
   ○ $S\% = 100\, e^{-\frac{\pi\sqrt{1-\delta^2}}{\delta}}$.

3. La pulsazione di oscillazione ω della risposta al gradino unitario del sistema $G(s) = \frac{13}{s^2+4\,s+13}$ è:

   ○ $\omega = 13$;
   ○ $\omega = \sqrt{13}$;
   ⊗ $\omega = 3$;
   ○ $\omega = 2$.

4. Il valore iniziale della risposta all'impulso del sistema $G(s) = \dfrac{1+3s}{s(1+4s)}$ è:

   ○ 0
   ○ ∞
   ⊗ $\frac{3}{4}$
   ○ 1

5. La risposta al gradino di un sistema del primo ordine raggiunge, dopo tre costanti di tempo dall'applicazione dell'ingresso:

   ○ il 100% del valore finale
   ○ il 99% del valore finale
   ⊗ il 95% del valore finale
   ○ il 85% del valore finale

6. Se la prima colonna della tabella di Routh di un'equazione caratteristica di 4^o grado ha due elementi negativi e i rimanenti positivi, ne segue che l'equazione caratteristica:

   ⊗ può avere tutte le radici a parte reale positiva
   ○ ha solo una radice a parte reale positiva
   ⊗ ha almeno una radice a parte reale positiva
   ○ ha almeno una radice a parte reale negativa

7. L'errore a regime di un sistema $G(s)$ con ingresso a parabola $r(t) = \frac{R_0}{2}t^2$ si può determinare come $e = \frac{R_0}{K_e}$ dove K_e vale:

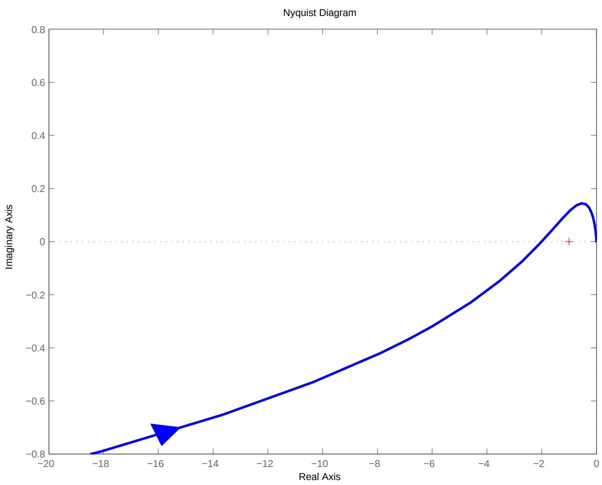
   ○ $K_e = \lim_{s\to 0} G(s)$
   ○ $K_e = \lim_{s\to 0} sG(s)$
   ⊗ $K_e = \lim_{s\to 0} s^2G(s)$

8. La funzione di trasferimento $G(s) = \frac{Y(s)}{X(s)} = \dfrac{5s^2+2s+3}{s^3+s^2+3s}$ corrisponde all'equazione differenziale:

   ○ $3\dot{x} + \ddot{x} + \dddot{x} = 5\ddot{y} + 2\dot{y} + 3y$
   ○ $\ddot{y} + \dot{y} + 3y = 5\dot{x} + 2x + 3$
   ⊗ $3\dot{y} + \ddot{y} + \dddot{y} = 5\ddot{x} + 2\dot{x} + 3x$

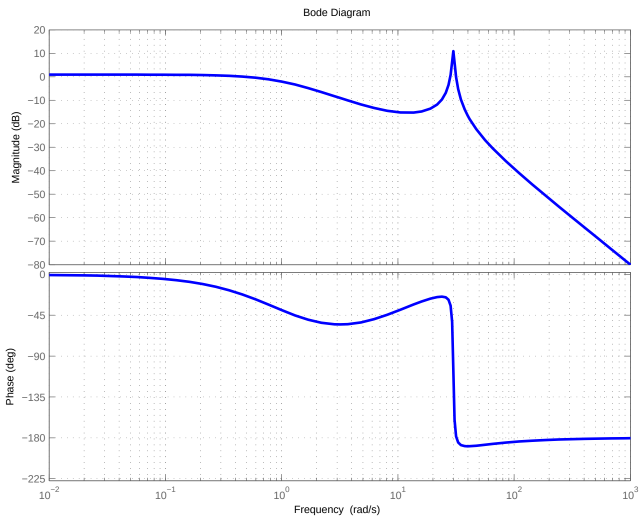
9. Sia data la funzione di anello

$$G(s) = K\frac{(1+\tau_1^{'}s)}{s^2\,(1+\tau_1 s)\,(1+\tau_2 s)}$$



   dove le costanti $\tau_1^{'}$, τ_1 e τ_2 sono positive. Il corrispondente diagramma di Nyquist per le sole pulsazioni positive è riportato in figura. Determinare per quali valori del guadagno K il sistema retroazionato risulta asintoticamente stabile:

   ○ $\forall K > 0$
   ○ $\forall K < 0$
   ○ il sistema retroazionato è sempre instabile
   ⊗ $0 < K < K_1$ essendo $K_1 > 0$ una costante opportuna
   ○ $K_2 < K < 0$ essendo $K_2 < 0$ una costante opportuna



10. La risposta del sistema di cui in figura sono riportati i diagrammi di Bode al segnale $x(t) = 2\sin(30t)$ risulta:

   ○ $y(t) \approx 7\sin(30t + 106^o)$;
   ○ $y(t) \approx 20\sin(30t - 106^o)$;
   ○ $y(t) \approx 0.26\sin(30t - 190^o)$;
   ⊗ $y(t) \approx 7\sin(30t - 106^o)$.

Fondamenti di Controlli Automatici - A.A. 2012/13

6 settembre 2013 - Esercizi

Cognome	
Nome	
Matricola	
Corso	

a) Determinare la trasformata di Laplace $X_i(s)$ dei seguenti segnali temporali $x_i(t)$:

$$x_1(t) = e^{-2t}\left[\frac{\cos(2t)}{2} - 2\right], \qquad x_2(t) = 1 + 3t^4\, e^{-9t}$$

Soluzione:

$$X_1(s) = \frac{1}{2}\frac{(s+2)}{(s+2)^2+4} - \frac{2}{s+2}, \qquad X_2(s) = \frac{1}{s} + \frac{72}{(s+9)^5},$$

b) Calcolare la risposta impulsiva $g_i(t)$ delle seguenti funzioni di trasferimento $G_i(s)$:

$$G_1(s) = \frac{3s^2+7s+6}{s^2+3s+2}, \qquad G_2(s) = \frac{21}{(s+3)^2+7^2} + \frac{10}{(s+5)^3}$$

Soluzione:
La funzione $G_1(s)$ può essere riscritta come

$$G_1(s) = 3 + \frac{2}{s+1} - \frac{4}{s+2}$$

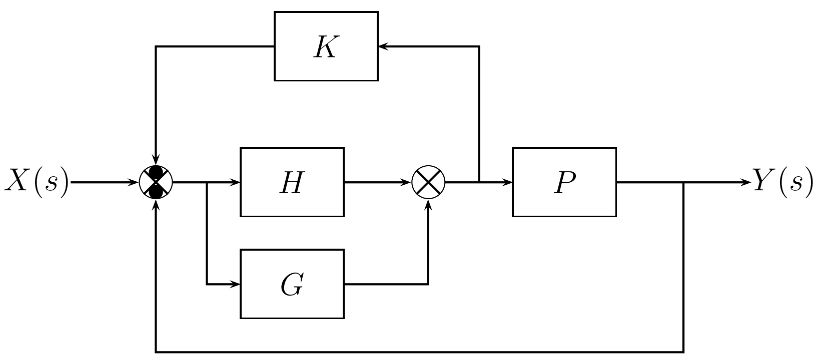
pertanto la sua risposta impulsiva risulta

$$g_1(t) = 3\delta(t) + 2\, e^{-t} - 4e^{-2t}.$$

La funzione $G_2(s)$ può essere direttamente antitrasformata di conseguenza la sua risposta impulsiva risulta

$$g_2(t) = 3\, e^{-3t}\sin(7t) + 5t^2 e^{-5t}$$

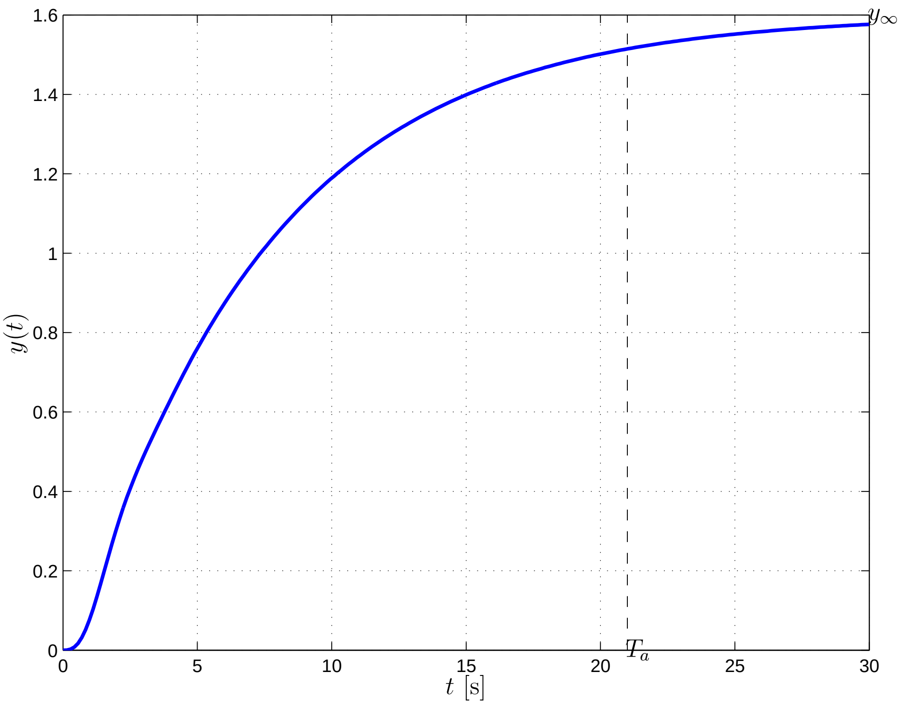
c) Dato il seguente schema a blocchi:



utilizzando la formula di Mason calcolare la funzione di trasferimento $G(s)$ che lega l'ingresso $X(s)$ all'uscita $Y(s)$:

$$G(s) = \frac{Y(s)}{X(s)} = \frac{HP+GP}{1+HP+HK+GK+GP}$$

d) Sia data la funzione di trasferimento $G(s) = \dfrac{(s+10)}{(1+7s)(s^2+2s+5)(s+5)}$.
Disegnare l'andamento qualitativo della risposta $y(t)$ a un gradino in ingresso di ampiezza 4, $x(t) = 4$. Calcolare il valore a regime y_∞ dell'uscita $y(t)$ del sistema, stimare qualitativamente il tempo di assestamento T_a del sistema e il periodo T_ω dell'eventuale oscillazione smorzata.
Soluzione: Il sistema ha un polo reale dominante $p = -1/7$ pertanto la risposta al gradino sarà di tipo aperiodico. In figura è riportata la risposta del sistema.



Il valore a regime dell'uscita per un gradino in ingresso di ampiezza $A = 4$ risulta

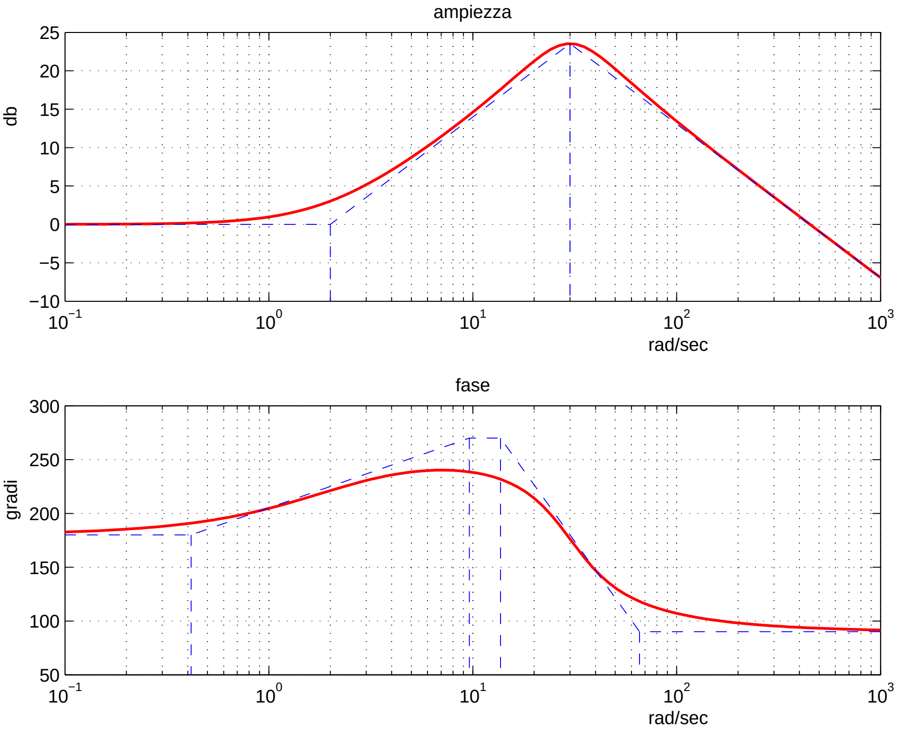
$$y_\infty = A\,G(0) = 4 \cdot 0.4 = 1.6$$

La costante di tempo del polo dominante è $\tau = 7$ per cui il tempo di assestamento T_a è

$$T_a = 3\tau = 21 \text{ s},$$

Non esiste oscillazione.

e) Facendo riferimento ai diagrammi di Bode della funzione $G(s)$ mostrati in figura

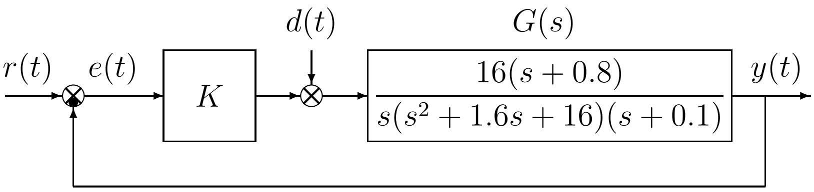


si ricavi l'espressione analitica della funzione $G(s)$.

<u>Soluzione</u>

$$G(s) = -450\frac{(s+2)}{(s^2+30s+900)}$$

f) Sia dato il seguente sistema retroazionato:



f.1) Determinare per quali valori del parametro K il sistema retroazionato è asintoticamente stabile.

<u>Soluzione:</u>

l'equazione caratteristica del sistema retroazionato è

$$1+K\frac{16(s+0.8)}{s(s^2+1.6s+16)(s+0.1)} = 0 \qquad \rightarrow \qquad s^4+1.7s^3+16.16s^2+(1.6+16K)s+12.8K = 0$$

La corrispondente tabella di Routh è la seguente

$$\begin{array}{c|cccl}
4 & 1 & 16.16 & 12.8K & \\
3 & 1.7 & 1.6+16K & & \\
2 & 25.87-16K & 21.76K & & \rightarrow \; K < 1.617 \\
1 & 41.39+351.36K-256K^2 & & & \rightarrow \; -0.11 < K < 1.48 \\
0 & 21.76K & & & \rightarrow \; K > 0
\end{array}$$

Quindi il sistema retroazionato è asintoticamente stabile per:

$$0 < K < 1.48 = K^*$$

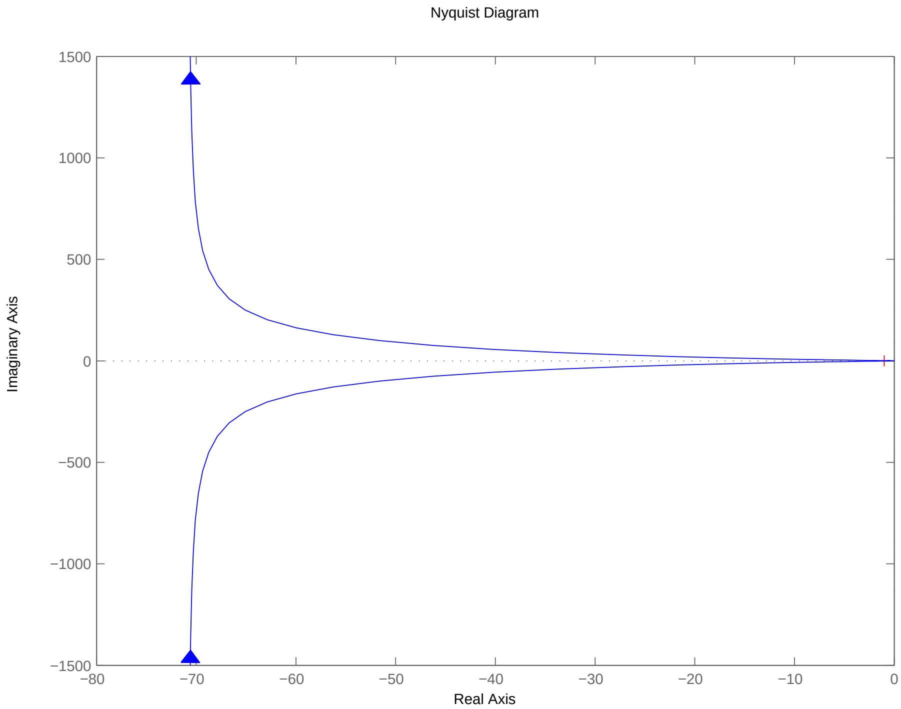
La pulsazione ω^* corrispondente al valore limite K^* è:

$$\omega^\star = \sqrt{\frac{1.6 + 16K^*}{1.7}} \simeq 3.8562 \text{ rad/s}$$

f.2) Posto $K = 1$ disegnare qualitativamente il diagramma di Nyquist completo della funzione d'anello $KG(s)$. Calcolare esattamente la posizione σ_0 di un eventuale asintoto, le eventuali intersezioni con l'asse reale e i corrispondenti valori delle pulsazioni.

Soluzione:

Il diagramma di Nyquist della funzione $G(s)$ è riportato in figura.



La funzione approssimante per $\omega \to 0$ è

$$G_0(s) = \frac{8}{s}$$

pertanto il diagramma parte all'infinito con fase iniziale $\varphi_0 = -\frac{\pi}{2}$.
La funzione approssimante per $\omega \to \infty$ è

$$G_\infty(s) = \frac{16}{s^3}$$

e quindi il diagramma giunge nell'origine con fase finale $\varphi_\infty = -\frac{3}{2}\pi$.
Il parametro Δ_τ vale

$$\Delta_\tau = \frac{1}{0.8} - \frac{1.6}{16} - \frac{1}{0.1} = -8.85 < 0$$

pertanto il diagramma parte in ritardo rispetto alla fase iniziale φ_0.
Il sistema è di tipo 1 pertanto esiste un asintoto verticale la cui ascissa è

$$\sigma_0 = 8\Delta_\tau = -70.8$$

Il parametro Δ_p vale

$$\Delta_p = -0.8 + 1.6 + 0.1 = 0.9 > 0$$

pertanto il diagramma arriva in anticipo rispetto alla fase finale φ_∞.
Lo sfasamento complessivo è

$$\Delta\varphi = -\pi$$

Esiste un'unica intersezione con l'asse reale che, in virtù dell'analisi svolta con Routh al primo punto, risulta all'ascissa

$$\sigma^* = -1/K^* = -1/1.18 = -0.6757$$

La corrispondente pulsazione è $\omega^* = 3.8562$.

f.3) Posto $K = 0.5$, calcolare l'errore a regime $e(\infty)$ quando sul sistema retroazionato agiscono contemporaneamente il segnale $r(t) = 10t$ e il disturbo $d(t) = 5\cos(t)$.
Soluzione:
Dato che il sistema è lineare e soggetto quindi alla sovrapposizione degli effetti, l'errore $E(s)$, espresso mediante la trasformata di Laplace, risulterà:

$$E(s) = E_r(s) + E_d(s)$$

dove $E_r(s)$ è l'errore dovuto al riferimento mentre $E_d(s)$ è l'errore dovuto al disturbo. L'errore $e_r(\infty)$ dovuto al riferimento sarà costante ma diverso da zero in quanto si considera un ingresso a rampa in un sistema di tipo 1 e sarà quindi dato da:

$$e_r(\infty) = \frac{R_0}{K_v} = \frac{10}{4} = 2.5$$

dove $R_0 = 10$ è la pendenza della rampa e K_v è dato da

$$\lim_{s\to 0} s\, KG(s) = 4$$

L'errore dovuto al disturbo $d(t)$ è dato da:

$$E_d(s) = F_d(s)D(s)$$

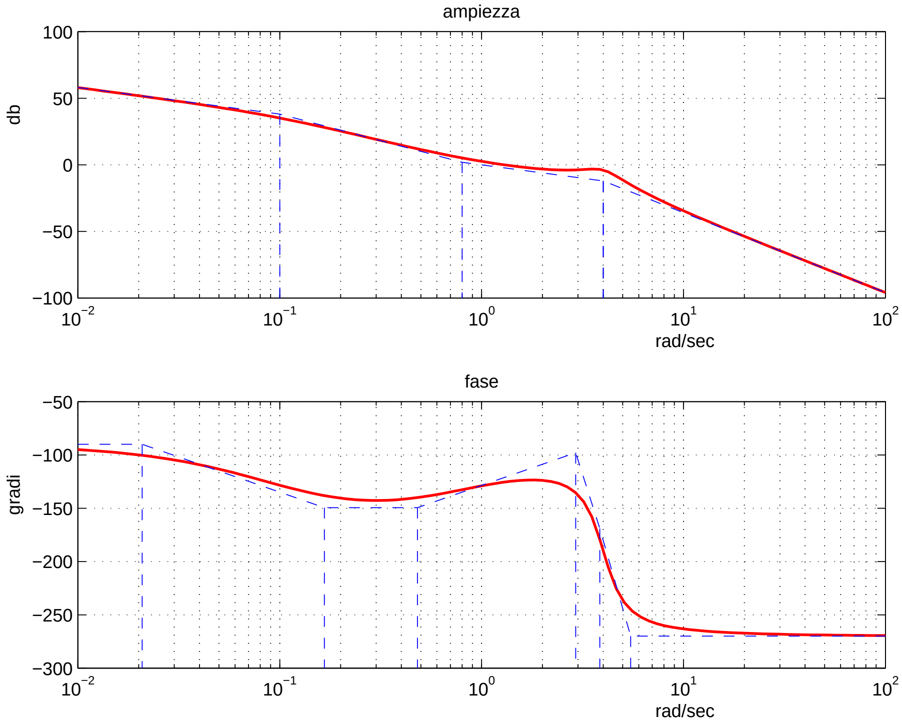
dove $D(s)$ è la trasformata di Laplace di $d(t)$ e $F_d(s)$ è la funzione di trasferimento tra $D(s)$ e $E_d(s)$ che vale

$$F_d(s) = -\frac{G(s)}{1 + KG(s)} = \frac{-16s - 12.8}{s^4 + 1.7s^3 + 16.16s^2 + 9.6s + 6.4}.$$

Essendo $d(t)$ un segnale sinusoidale, per trovarne la risposta a regime si sfrutta il concetto di risposta armonica, per cui $e_d(t) = 5|F_d(j1)|\cos(t + \arg\{F_d(j1)\})$ con $|F_d(j1)| = 1.737$ e $\arg\{F_d(j1)\} \simeq 93.38^o$. In conclusione

$$e(\infty) = e_r(\infty) + e_d(\infty) = 4 + 8.685\cos(t + 93.38^o)$$

f.4) Posto $K = 1$, tracciare (nello schema fornito in allegato) i diagrammi di Bode delle ampiezze e delle fasi del guadagno di anello $K\,G(s)$.
Indicare sui diagrammi il margine di ampiezza e il margine di fase. Infine, fornire una stima della larghezza di banda del sistema retroazionato.
Soluzione:
In figura sono riportati i diagrammi di Bode del sistema. Sul diagramma asintotico delle ampiezze il guadagno β in corrispondenza della pulsazione $\omega = 0.1$ è $\beta = \left|\frac{8}{0.1}\right| = 80 = 38$ dB.
Il coefficiente di smorzamento della coppia di poli complessi coniugati è $\delta = 0.2$ pertanto si avrà $M_{\omega_n} = \frac{1}{2\delta} = 2.5 \simeq 8$ dB.



Il margine di ampiezza risulta : $M_a = 3.41$dB per $\omega = 3.86$ rad/sec, e il margine di fase: $M_f \simeq 54.5^o$ per $\omega = 1.3$ rad/sec.
La banda del sistema retroazionato può essere stimata sulla base della pulsazione di incrocio del sistema in catena aperta e sarà quindi circa [0, 1.3] rad/sec.

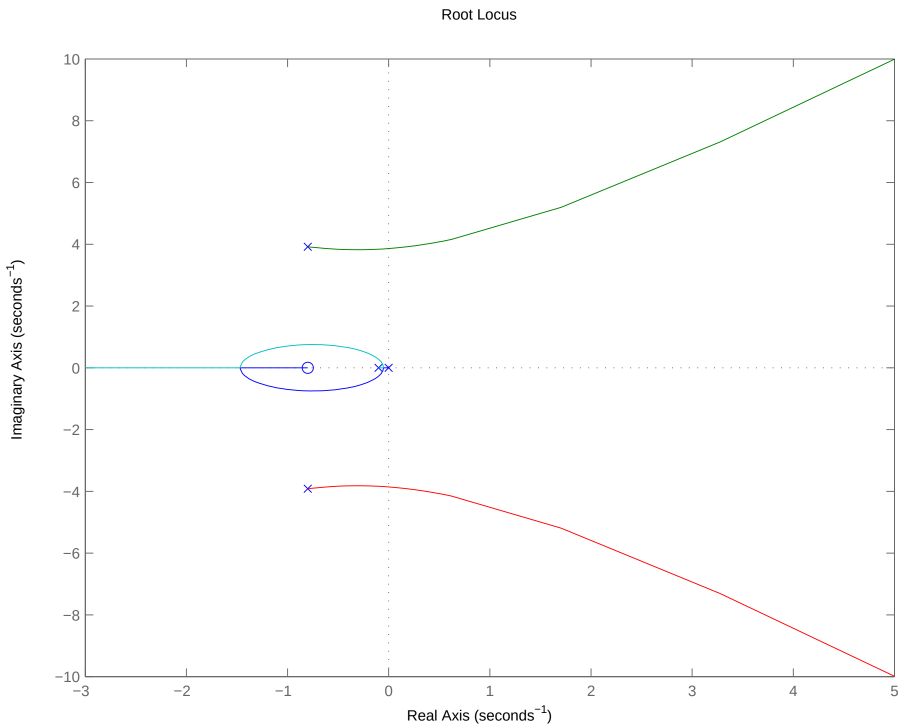
g) **Non è richiesto lo svolgimento di questo esercizio agli iscritti ad Ingegneria Ambientale.**

Con riferimento al sistema descritto nell'esercizio f), tracciare qualitativamente il luogo delle radici del sistema retroazionato per valori positivi del parametro K. Determinare esattamente gli asintoti, il centro degli asintoti, le intersezioni con l'asse immaginario e i corrispondenti valori del guadagno K. Determinare gli eventuali punti di diramazione solo qualitativamente.

Soluzione: Essendo 3 il grado relativo del sistema, esistono 3 asintoti che formano una stella con centro nel punto sull'asse reale di ascissa

$$\sigma_a = \frac{1}{3}(-0.1 - 1.6 + 0.8) = -0.3$$

Il luogo delle radici finale è riportato nella seguente figura.



Dall'analisi svolta mediante il criterio di Routh, risulta che il luogo delle radici attraversa l'asse immaginario, passando dal semipiano sinistro a quello destro, in corrispondenza di $s^* = \pm j\omega^* = \pm j3.8562$, per $K = K^* = 1.48$.

Fondamenti di Controlli Automatici

Diagrammi di Bode

Cognome	
Nome	
Matricola	
Corso