Fondamenti di Controlli Automatici - A.A. 2011/12
3 luglio 2012 - Domande Teoriche

Cognome Nome:	
Matricola:	
Corso di Laurea:	

Per ciascuno dei test a soluzione multipla segnare con una crocetta tutte le affermazioni che si ritengono giuste. In ogni quiz almeno una affermazione è corretta.

1. L'evoluzione libera del sistema $M\,\dot{y}(t) + b\,y(t) = 0$ partendo dalla condizione iniziale $y(0) = a$ è:

   ◯ $y(t) = a\,e^{-\frac{M}{b}\,t}$
   ◯ $y(t) = a(1 - e^{-\frac{M}{b}\,t})$
   ◯ $y(t) = \frac{a}{M}\,e^{-\frac{b}{M}\,t}$
   ◯ $y(t) = a\,e^{-\frac{b}{M}\,t}$

2. Un sistema in retroazione negativa avente $G(s)$ sul ramo diretto, $H(s)$ sul ramo di retroazione e con un elevato guadagno statico d'anello

   ◯ è poco sensibile alle variazioni parametriche di $G(s)$
   ◯ presenta una forte attenuazione dei disturbi
   ◯ è poco sensibile alle variazioni parametriche di $H(s)$

3. Il tempo di assestamento della risposta al gradino unitario del sistema
   $G(s) = \dfrac{50(4 + 0.1\,s)}{(20 + 0.2\,s)(s^2 + 12\,s + 100)}$ vale circa

   ◯ $T_a \simeq 4$ s
   ◯ $T_a \simeq 0.5$ s
   ◯ $T_a \simeq 0.25$ s
   ◯ $T_a \simeq 0.03$ s

4. Il valore iniziale della risposta all'impulso $g(t)$ del sistema $G(s) = \frac{3s+1}{s^2+2}$ vale:

   ◯ 0
   ◯ 3
   ◯ 1/2
   ◯ ∞

5. Per $\omega = 1/\tau$ il diagramma "reale" di Bode delle ampiezze della funzione $G(j\omega) = \frac{1}{(1+j\tau\omega)^2}$

   ◯ vale 1
   ◯ vale $\simeq -3$ dB
   ◯ vale $\simeq 6$ dB
   ◯ vale 1/2
   ◯ vale $\simeq -6$ dB

6. Il metodo della Trasformata di Laplace nella risoluzione di equazioni differenziali lineari a parametri concentrati

   - ○ permette di calcolare la risposta libera del sistema
   - ○ permette di calcolare la risposta forzata del sistema
   - ○ può essere utilizzato solo nel caso di equazioni tempo invarianti
   - ○ può essere utilizzato anche nel caso di equazioni tempo varianti

7. La funzione di trasferimento $G(s) = \frac{Y(s)}{X(s)}$ corrispondente all'equazione differenziale $\dddot{y} + 7\dot{y} + 2\,y = 3\ddot{x} + \dot{x} + 4\,x$ è:

   - ○ $G(s) = \dfrac{3s^2 + s + 4}{s^3 + 7s^2 + 2s}$
   - ○ $G(s) = \dfrac{3s^2 + s + 4}{s^3 + 7s + 2}$
   - ○ $G(s) = \dfrac{s^3 + 7s + 2}{3s^2 + s + 4}$

8. Il criterio di Nyquist afferma che condizione necessaria e sufficiente affinché un sistema con guadagno d'anello $G(s)$ sia stabile una volta chiuso in retroazione è che il diagramma polare completo di $G(j\omega)$:

   - ○ passi per il punto $-1 + j0$
   - ○ non passi per il punto $-1 + j0$
   - ○ circondi il punto $-1 + j0$ in senso orario tante volte quante sono i poli di $G(s)$ a parte reale positiva
   - ○ circondi il punto $-1 + j0$ in senso antiorario tante volte quante sono i poli di $G(s)$ a parte reale positiva

9. Un sistema di tipo 1

   - ○ ha uno zero nell'origine
   - ○ ha un polo nell'origine
   - ○ ha un errore a regime costante e non nullo nella risposta al gradino
   - ○ ha un errore a regime nullo nella risposta al gradino

10. Se gli elementi della prima colonna della tabella di Routh di una equazione caratteristica di 3° grado sono tutti positivi tranne uno che è negativo, ne segue che l'equazione caratteristica

    - ○ può avere una coppia di radici complesse coniugate a parte reale positiva
    - ○ ha solo una radice a parte reale positiva
    - ○ ha almeno una radice a parte reale positiva

Fondamenti di Controlli Automatici - A.A. 2011/12

3 luglio 2012 - Esercizi

Cognome Nome:	
Matricola:	
Corso di Laurea:	

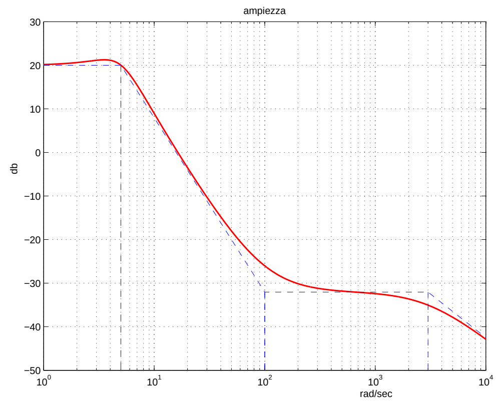
a) Calcolare la trasformata di Laplace $X(s)$ dei seguenti segnali temporali $x_i(t)$:

$$x_1(t) = \frac{\cos(3t)}{3}\, e^{-2\,t} + 3\,\delta(t), \qquad x_2(t) = 1 + 2\sin(4\,t - 8) + t^4\, e^{-t}$$

b) Calcolare la risposta impulsiva $g_i(t)$ delle seguenti funzioni di trasferimento $G_i(s)$:

$$G_1(s) = \frac{2s^3 + 27s^2 + 32s - 60}{s^3 + 12s^2 + 20s}, \qquad G_2(s) = \frac{24s^2 + 213s + 519}{(s+5)^2\,(s-1)\,(s+2)}$$

c) In figura è mostrato il diagramma di Bode dei moduli di un sistema lineare $G(s)$ a fase minima.



1) Determinare la posizione dei poli dominanti:

$p_{1,2} \simeq$

2) Calcolare il guadagno statico del sistema:

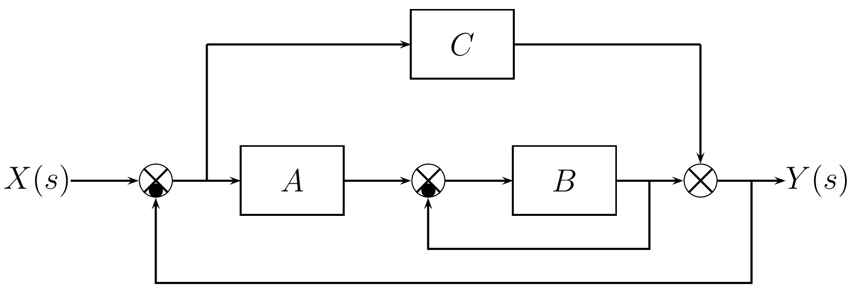
$G(0) =$

3) Calcolare la larghezza di banda ω_{f0} del sistema $G(s)$ posto in retroazione unitaria negativa:

$\omega_{f0} \simeq$

4) Disegnare l'andamento qualitativo della risposta al gradino $x(t) = 2$ di ampiezza 2 del sistema $G(s)$. Stimare qualitativamente il tempo di assestamento T_a del sistema e il periodo T_ω dell'eventuale oscillazione smorzata.

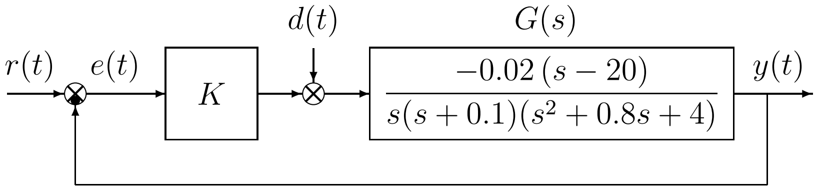
d) Dato il seguente schema a blocchi:



utilizzando la formula di Mason calcolare la funzione di trasferimento $G(s)$ che lega l'ingresso $X(s)$ all'uscita $Y(s)$:

$$G(s) = \frac{Y(s)}{X(s)} =$$

e) Sia dato il seguente sistema retroazionato:



e.1) Determinare per quali valori del parametro K il sistema retroazionato è asintoticamente stabile.

e.2) Disegnare qualitativamente il diagramma di Nyquist completo della funzione $G(s)$. Calcolare esattamente la posizione di eventuali asintoti e, se esistono, le intersezioni con l'asse reale.

e.3) Posto $K = 2$, calcolare l'errore a regime $e(\infty)$ quando sul sistema retroazionato siano applicati contemporaneamente $r(t) = 10$ e $d(t) = 2$.

e.4) Posto $K = 1$, tracciare (nello schema fornito in allegato) i diagrammi di Bode asintotici delle ampiezze e della fasi del guadagno di anello $K\,G(s)$. Indicare sui diagrammi il margine di ampiezza e il margine di fase. Infine, fornire una stima della larghezza di banda del sistema. retroazionato.

f) **Non è richiesto lo svolgimento di questo esercizio agli iscritti ad Ingegneria Ambientale.**

Con riferimento al sistema descritto nell'esercizio e), tracciare qualitativamente il luogo delle radici del sistema retroazionato per valori positivi del parametro K. Determinare esattamente gli asintoti, le intersezioni $\omega^\star$ con l'asse immaginario e i corrispondenti valori $K^\star$ del guadagno.

Fondamenti di Controlli Automatici - A.A. 2011/12
3 luglio 2012 - Domande Teoriche

Cognome Nome:	
Matricola:	
Corso di Laurea:	

Per ciascuno dei test a soluzione multipla segnare con una crocetta tutte le affermazioni che si ritengono giuste. In ogni quiz almeno una affermazione è corretta.

1. L'evoluzione libera del sistema $M\,\dot{y}(t) + b\,y(t) = 0$ partendo dalla condizione iniziale $y(0) = a$ è:

   ◯ $y(t) = a\,e^{-\frac{M}{b}\,t}$
   ◯ $y(t) = a(1 - e^{-\frac{M}{b}\,t})$
   ◯ $y(t) = \frac{a}{M}\,e^{-\frac{b}{M}\,t}$
   ⊗ $y(t) = a\,e^{-\frac{b}{M}\,t}$

2. Un sistema in retroazione negativa avente $G(s)$ sul ramo diretto, $H(s)$ sul ramo di retroazione e con un elevato guadagno statico d'anello

   ⊗ è poco sensibile alle variazioni parametriche di $G(s)$
   ⊗ presenta una forte attenuazione dei disturbi
   ◯ è poco sensibile alle variazioni parametriche di $H(s)$

3. Il tempo di assestamento della risposta al gradino unitario del sistema
   $G(s) = \dfrac{50(4 + 0.1\,s)}{(20 + 0.2\,s)(s^2 + 12\,s + 100)}$ vale circa

   ◯ $T_a \simeq 4$ s
   ⊗ $T_a \simeq 0.5$ s
   ◯ $T_a \simeq 0.25$ s
   ◯ $T_a \simeq 0.03$ s

4. Il valore iniziale della risposta all'impulso $g(t)$ del sistema $G(s) = \frac{3s+1}{s^2+2}$ vale:

   ◯ 0
   ⊗ 3
   ◯ 1/2
   ◯ ∞

5. Per $\omega = 1/\tau$ il diagramma "reale" di Bode delle ampiezze della funzione $G(j\omega) = \frac{1}{(1+j\tau\omega)^2}$

   ◯ vale 1
   ◯ vale $\simeq -3$ dB
   ◯ vale $\simeq 6$ dB
   ⊗ vale 1/2
   ⊗ vale $\simeq -6$ dB

6. Il metodo della Trasformata di Laplace nella risoluzione di equazioni differenziali lineari a parametri concentrati

   $\otimes$ permette di calcolare la risposta libera del sistema

   $\otimes$ permette di calcolare la risposta forzata del sistema

   $\otimes$ può essere utilizzato solo nel caso di equazioni tempo invarianti

   $\bigcirc$ può essere utilizzato anche nel caso di equazioni tempo varianti

7. La funzione di trasferimento $G(s) = \frac{Y(s)}{X(s)}$ corrispondente all'equazione differenziale $\dddot{y} + 7\dot{y} + 2\,y = 3\ddot{x} + \dot{x} + 4\,x$ è:

   $\bigcirc$ $G(s) = \dfrac{3s^2+s+4}{s^3+7s^2+2s}$

   $\otimes$ $G(s) = \dfrac{3s^2+s+4}{s^3+7s+2}$

   $\bigcirc$ $G(s) = \dfrac{s^3+7s+2}{3s^2+s+4}$

8. Il criterio di Nyquist afferma che condizione necessaria e sufficiente affinché un sistema con guadagno d'anello $G(s)$ sia stabile una volta chiuso in retroazione è che il diagramma polare completo di $G(j\omega)$:

   $\bigcirc$ passi per il punto $-1+j0$

   $\otimes$ non passi per il punto $-1+j0$

   $\bigcirc$ circondi il punto $-1+j0$ in senso orario tante volte quante sono i poli di $G(s)$ a parte reale positiva

   $\otimes$ circondi il punto $-1+j0$ in senso antiorario tante volte quante sono i poli di $G(s)$ a parte reale positiva

9. Un sistema di tipo 1

   $\bigcirc$ ha uno zero nell'origine

   $\otimes$ ha un polo nell'origine

   $\bigcirc$ ha un errore a regime costante e non nullo nella risposta al gradino

   $\otimes$ ha un errore a regime nullo nella risposta al gradino

10. Se gli elementi della prima colonna della tabella di Routh di una equazione caratteristica di 3° grado sono tutti positivi tranne uno che è negativo, ne segue che l'equazione caratteristica

    $\otimes$ può avere una coppia di radici complesse coniugate a parte reale positiva

    $\bigcirc$ ha solo una radice a parte reale positiva

    $\otimes$ ha almeno una radice a parte reale positiva

Fondamenti di Controlli Automatici - A.A. 2011/12

3 luglio 2012 - Esercizi

Cognome Nome:	
Matricola:	
Corso di Laurea:	

a) Calcolare la trasformata di Laplace $X(s)$ dei seguenti segnali temporali $x_i(t)$:

$$x_1(t) = \frac{\cos(3t)}{3}\, e^{-2\,t} + 3\,\delta(t), \qquad x_2(t) = 1 + 2\sin(4\,t - 8) + t^4\, e^{-t}$$

Soluzione:

$$X_1(s) = 3 + \frac{s+2}{3\,[(s+2)^2 + 3^2]}, \qquad X_2(s) = \frac{1}{s} + \frac{8}{s^2+4^2}e^{-2s} + \frac{24}{(s+1)^5}$$

b) Calcolare la risposta impulsiva $g_i(t)$ delle seguenti funzioni di trasferimento $G_i(s)$:

$$G_1(s) = \frac{2s^3 + 27s^2 + 32s - 60}{s^3 + 12s^2 + 20s}, \qquad G_2(s) = \frac{24s^2 + 213s + 519}{(s+5)^2\,(s-1)\,(s+2)}$$

Soluzione:
La funzione $G_1(s)$ può essere scomposta in fratti semplici nel seguente modo

$$G_1(s) = 2 - \frac{3}{s} + \frac{2}{s+2} + \frac{4}{s+10}$$

di conseguenza la risposta impulsiva (ovvero l'anti-trasformata di Laplace) risulta

$$g_1(t) = 2\delta(t) - 3 + 2\,e^{-2\,t} + 4e^{-10\,t}$$

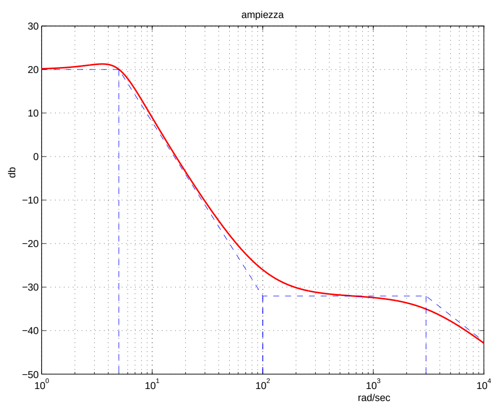
La funzione $G_2(s)$ può essere riscritta come

$$G_2(s) = \frac{3}{(s+5)^2} + \frac{7}{(s-1)} - \frac{7}{(s+2)}$$

di conseguenza la sua risposta impulsiva risulta

$$g_1(t) = 3t\,e^{-5t} + 7\,e^{t} - 7\,e^{-2t}$$

c) In figura è mostrato il diagramma di Bode dei moduli di un sistema lineare $G(s)$ a fase minima.



1) Determinare la posizione dei poli dominanti:

$$p_{1,2} \simeq -2.5 \pm 4.33\,j;$$

2) Calcolare il guadagno statico del sistema:

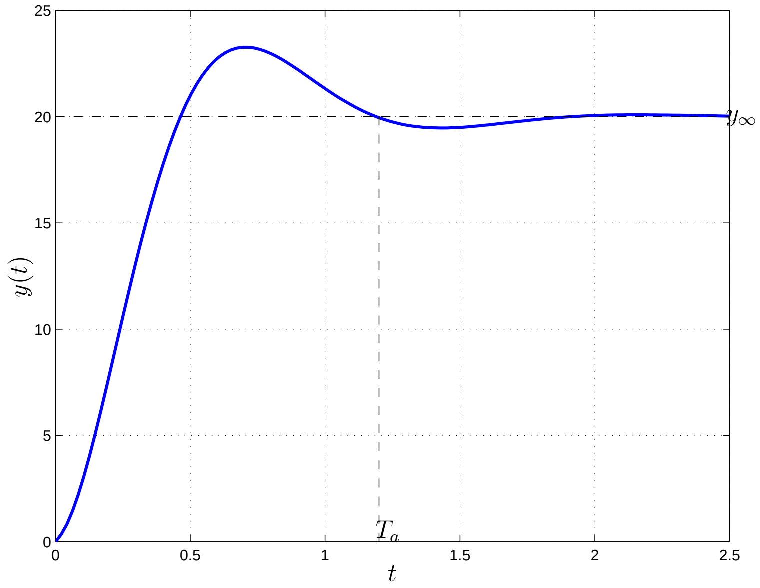
$$G(0) = 20 \text{ db} = 10;$$

3) Calcolare la larghezza di banda ω_{f0} del sistema $G(s)$ posto in retroazione unitaria negativa:

$$\omega_{f0} \simeq 16.4$$

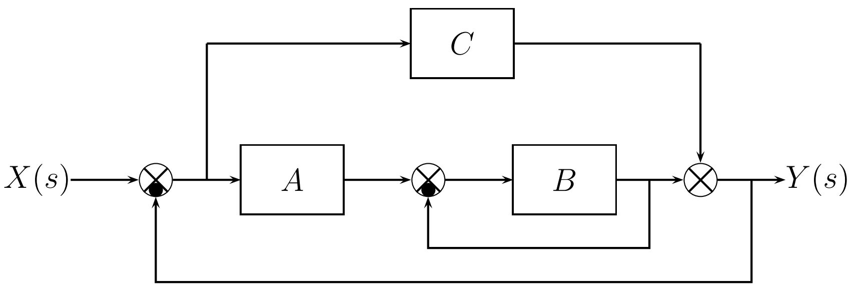
4) Disegnare l'andamento qualitativo della risposta al gradino $x(t) = 2$ di ampiezza 2 del sistema $G(s)$. Stimare qualitativamente il tempo di assestamento T_a del sistema e il periodo T_ω dell'eventuale oscillazione smorzata.

Il grafico dell'andamento temporale della risposta al gradino $x(t) = 2$ del sistema $G(s)$ è riportato in figura.



Il tempo di assestamento è $T_a \simeq \frac{3}{2.5} = 1.2$ s e il periodo $T_\omega = \frac{2\pi}{4.33} \simeq 1.45$ s.

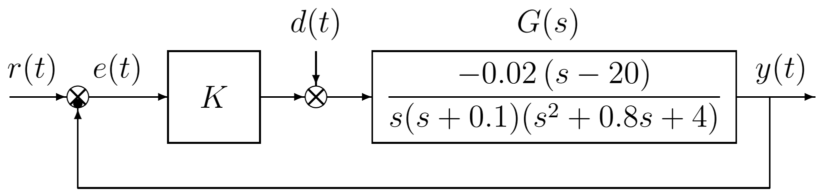
d) Dato il seguente schema a blocchi:



utilizzando la formula di Mason calcolare la funzione di trasferimento $G(s)$ che lega l'ingresso $X(s)$ all'uscita $Y(s)$:

$$G(s) = \frac{Y(s)}{X(s)} = \frac{AB + C(1+B)}{1 + AB + B + C + BC}$$

e) Sia dato il seguente sistema retroazionato:



e.1) Determinare per quali valori del parametro K il sistema retroazionato è asintoticamente stabile.

Soluzione: l'equazione caratteristica del sistema retroazionato è

$$1-\frac{0.02\,K(s-20)}{s(s+0.1)(s^2+0.8s+4)}=0 \qquad \to \qquad s^4+0.9s^3+4.08\,s^2+(0.4-0.02K)\,s+0.4K=0$$

La corrispondente tabella di Routh è la seguente

$$\begin{array}{c|ccc}
4 & 1 & 4.08 & 0.4K \\
3 & 0.9 & 0.4-0.02K & \\
2 & 3.272+0.02K & 0.36K & \\
1 & -0.0004(K-3.42)(K+957.02) & & \\
0 & 0.36K & &
\end{array}
\qquad
\begin{array}{l}
\\
\\
\to\ K>-163.6\\
\to\ -957.02<K<3.42\\
\to\ K>0
\end{array}$$

Il sistema retroazionato è asintoticamente stabile per:

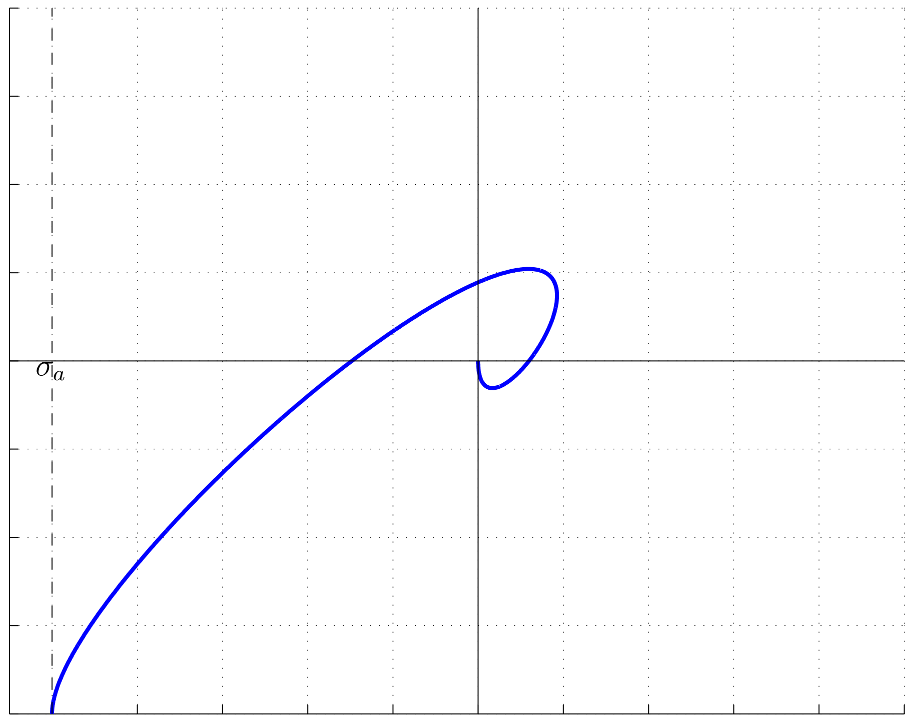
$$0<K<K^\star=3.42$$

La pulsazione ω^* corrispondente al valore limite $K^\star$ è:

$$\omega^*=\sqrt{\frac{0.4-0.02\,K^\star}{0.9}}=0.607$$

e.2) Disegnare qualitativamente il diagramma di Nyquist completo della funzione $G(s)$. Calcolare esattamente la posizione di eventuali asintoti e, se esistono, le intersezioni con l'asse reale.

Soluzione: Il diagramma di Nyquist qualitativo della funzione $G(s)$ è riportato in figura.



La funzione approssimante per $\omega\to 0$ è $G_0(s)=\dfrac{1}{s}$ pertanto il diagramma parte all'infinito con fase iniziale $\varphi_0=-\frac{\pi}{2}$. La funzione approssimante per $\omega\to\infty$ è $G_\infty(s)=\dfrac{-0.02}{s^3}$ e

quindi il diagramma giunge nell'origine con fase finale $\varphi_\infty = -\pi - \frac{3}{2}\pi = -\frac{5}{2}\pi$.
Il parametro Δ_τ vale

$$\Delta_\tau = -\frac{1}{20} - \frac{1}{0.1} - \frac{0.8}{4} = -10.25 < 0$$

pertanto il diagramma parte in ritardo rispetto alla fase iniziale φ_0.
Il parametro Δ_p vale

$$\Delta_p = 20 - (-0.1 - 0.8) = 20.9 > 0$$

pertanto il diagramma arriva in anticipo rispetto alla fase finale φ_∞. Lo sfasamento complessivo è $\Delta\varphi = 2\pi$.
Essendo il sistema di tipo 1, è presente un asintoto verticale che ha ascissa

$$\sigma_a = K\,\Delta_\tau = -10.25$$

Dal diagramma risultano inoltre esistere due intersezioni con l'asse reale (una per l'asse reale negativo e una per l'asse reale positivo), che in virtù dell'analisi svolta con Routh al primo punto risultano rispettivamente essere pari a

$$\sigma^\star = -1/K^\star = -1/3.42 = -0.29 \quad \text{e} \quad \sigma_1^\star = -1/K_1 = -1/-957.02 = 0.001$$

La pulsazione $\omega^\star$ corrispondente a $K^\star$ è $\omega^\star = \sqrt{\frac{0.4-0.02\,K^\star}{0.9}} = 0.607$ rad/s mentre la pulsazione ω_1 corrispondente a K_1 è $\omega_1 = \sqrt{\frac{0.4-0.02\,K_1}{0.9}} = 4.66$ rad/s.

e.3) Posto $K = 2$, calcolare l'errore a regime $e(\infty)$ quando sul sistema retroazionato siano applicati contemporaneamente $r(t) = 10$ e $d(t) = 2$. Dato che il sistema è lineare e soggetto quindi alla sovrapposizione degli effetti, l'errore $E(s)$, espresso mediante la trasformata di Laplace, risulterà:

$$E(s) = E_r(s) + E_d(s)$$

dove $E_r(s)$ è l'errore dovuto al riferimento mentre $E_d(s)$ è l'errore dovuto al disturbo. Senza fare alcun calcolo si può dire che a regime $e_r(\infty)$ sarà nullo, in quanto si considera un ingresso a gradino in un sistema di tipo 1 (cioè con un polo nell'origine). Di conseguenza il calcolo dell'errore a regime si riduce a quello dovuto al segnale $d(t)$:

$$E(s) = F_d(s)D(s)$$

dove $D(s)$ è la trasformata di laplace di $d(t)$ e $F_d(s)$ è la funzione di trasferimento tra $D(s)$ e $E(s)$ che vale

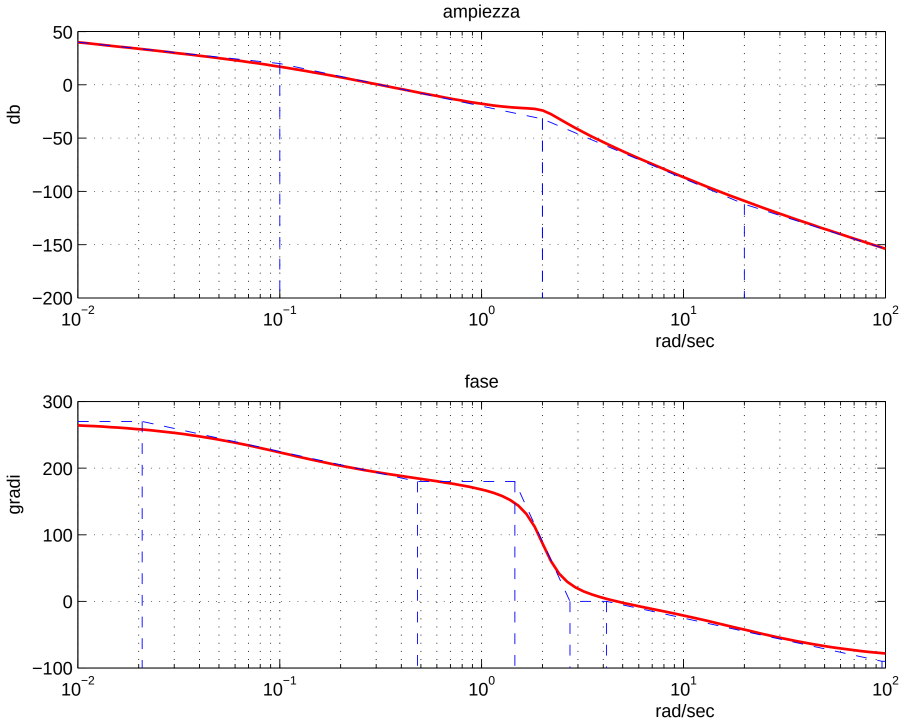
$$F_d(s) = -\frac{G(s)}{1+KG(s)} = -\frac{0.02s - 0.4}{s^4 + 0.9s^3 + 4.08s^2 + 0.36s + 0.8}.$$

Essendo $d(t) = 2$ un segnale costante, la risposta a regime è data da

$$e(\infty) = e_d(\infty) = 2 \cdot F_d(0) = -1$$

dove $F_d(0) = -1/2$ è il guadagno statico di $F_d(s)$.

e.4) Posto $K = 1$, tracciare (nello schema fornito in allegato) i diagrammi di Bode asintotici delle ampiezze e della fasi del guadagno di anello $K\,G(s)$. Indicare sui diagrammi il margine di ampiezza e il margine di fase. Infine, fornire una stima della larghezza di banda del sistema. retroazionato.
Soluzione:
In figura sono riportati i diagrammi di Bode del sistema. Sul diagramma asintotico delle ampiezze il guadagno β in corrispondenza della pulsazione $\omega = 0.1$ è $\beta = 10 = 20$ dB. Il coefficiente di smorzamento della coppia di poli complessi coniugati è $\delta = 0.2$ da cui si ricava $M_{\omega_m} = \frac{1}{2\delta} = 2.5 \simeq 8$dB.



Il margine di ampiezza risulta : $M_a = 3.43 (= 10.7dB)$ per $\omega = 0.607$ rad/s, e il margine di fase: $M_f = 13.2^o$ per $\omega = 0.312$ rad/s. La banda del sistema retroazionato può essere stimata sulla base della pulsazione di incrocio del sistema in catena aperta e sarà quindi [0, 0.312] rad/s.

f) **Non è richiesto lo svolgimento di questo esercizio agli iscritti ad Ingegneria Ambientale.**

Con riferimento al sistema descritto nell'esercizio e), tracciare qualitativamente il luogo delle radici del sistema retroazionato per valori positivi del parametro K. Determinare esattamente gli asintoti, le intersezioni $\omega^\star$ con l'asse immaginario e i corrispondenti valori $K^\star$ del guadagno.

Soluzione: Il guadagno della $G(s)$ nella forma poli-zeri è negativo, pertanto il guadagno $K_2 = -0.02\,K$ quando $K > 0$ sarà negativo. Pertanto il luogo delle radici verrà tracciato per $K_2 < 0$. Gli asintoti sono 3, essendo 3 il grado relativo, e il centro degli asintoti è il punto di ascissa

$$\sigma_a = \frac{1}{3}(-0.1 - 0.8 - 20) = -6.97$$

Il luogo delle radici finale per valori negativi di K_2 e uno zoom sono riportati nelle seguenti figure.

Dall'analisi svolta mediante il criterio di Routh, risulta che il luogo delle radici (per $K > 0$) attraversa l'asse immaginario, passando dal semipiano sinistro a quello destro, in corrispondenza di $s^\star = \pm j\omega^\star = \pm j0.607$, per $K = K^\star = 3.42$.

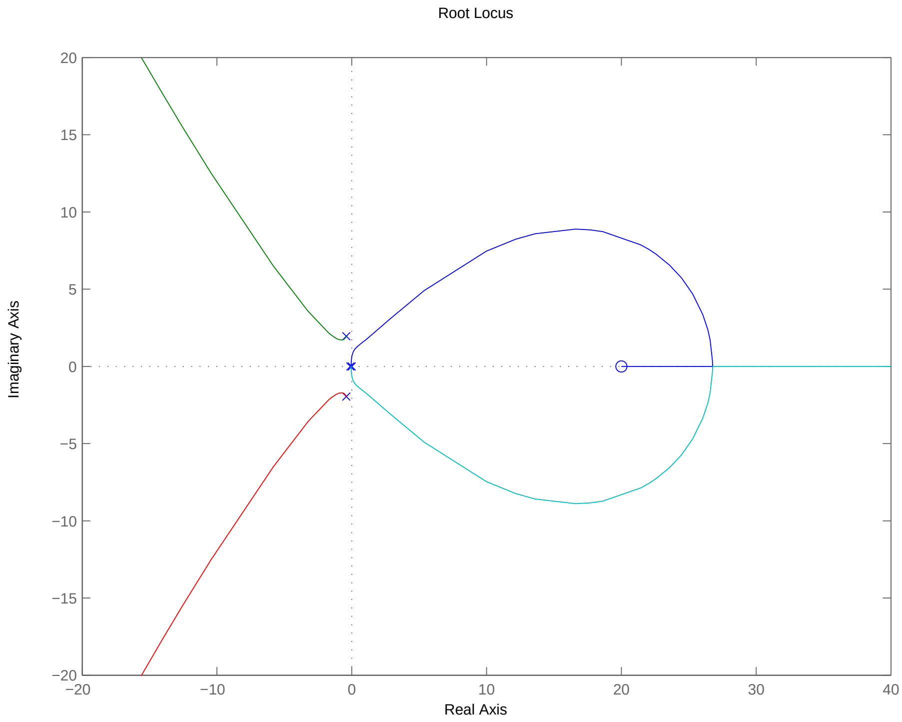


Figura 1: Luogo delle radici

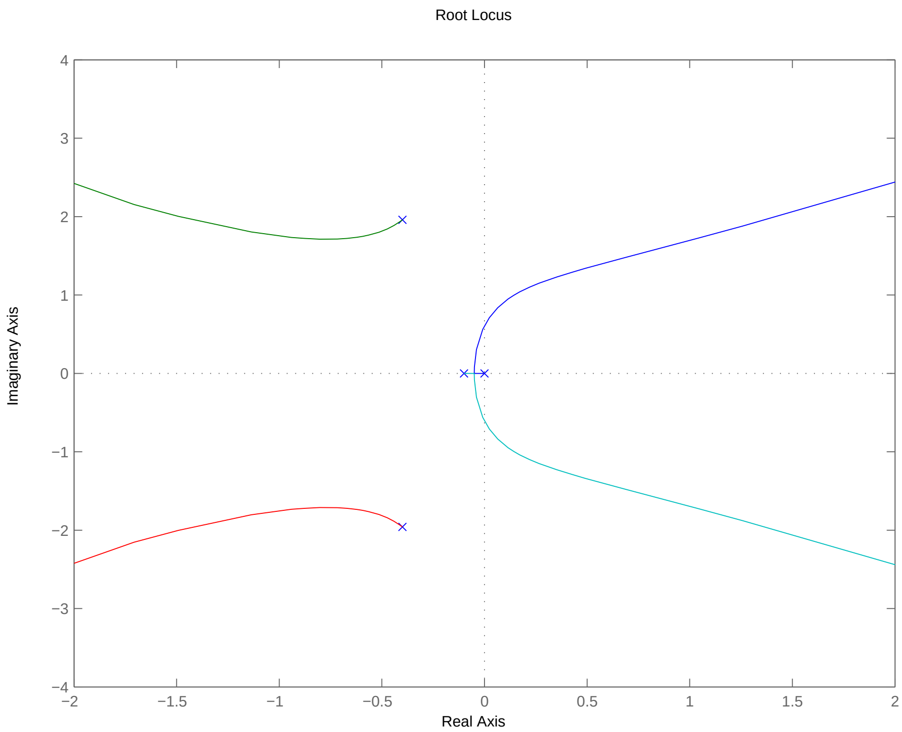


Figura 2: Luogo delle radici: zoom

Diagrammi di Bode

Cognome Nome:	
Matricola:	
Corso di Laurea: