Nome:	
Nr. Mat.	
Firma:	

Fondamenti di Controlli Automatici - A.A. 2011/12

7 giugno 2012 - Domande Teoriche

Per ciascuno dei test a soluzione multipla segnare con una crocetta tutte le affermazioni che si ritengono giuste. In ogni quiz almeno una affermazione è corretta.

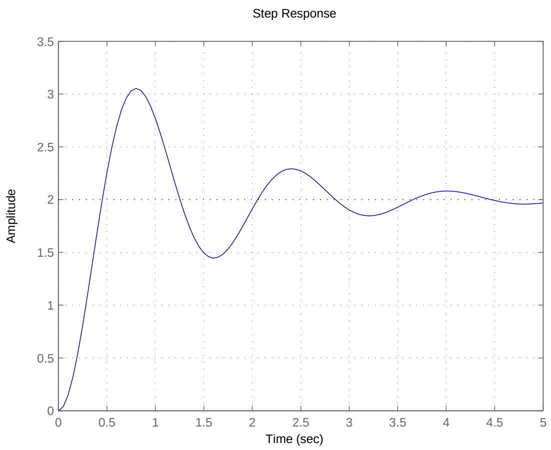
1. La risposta impulsiva $g(t)$ del sistema $G(s) = \dfrac{1}{s^2(s+2)}$:
   - ◯ è limitata ma non tende a zero per $t \to \infty$;
   - ◯ è limitata e tende a zero per $t \to \infty$;
   - ◯ non è limitata.

2. L'anti-trasformata di Laplace della funzione $F(s) = \dfrac{2s^3+14s^2+33s+23}{s^3+5s^2+8s+4} = \dfrac{2s^3+14s^2+33s+23}{(s+2)^2(s+1)}$ è:
   - ◯ $f(t) = 2\,\delta(t) + 2\,e^{-2t} + 2\,e^{-t}$;
   - ◯ $f(t) = 2\,\delta(t) + 2\,e^{-2t} + 3\,t\,e^{-2t} + 2\,e^{-t}$;
   - ◯ $f(t) = 2\,e^{-2t} + 3\,t\,e^{-2t} + 2\,e^{-t}$;
   - ◯ $f(t) = 2\,e^{2t} + 3\,t\,e^{2t} + 2\,e^{t}$.

3. La massima sovraelongazione del sistema $G(s) = \dfrac{1}{s^2+2s+1}$ in risposta ad un gradino unitario è:
   - ◯ $S = 0\,\%$;
   - ◯ $S = 5\,\%$;
   - ◯ $S = 10\,\%$;
   - ◯ $S = 100\,\%$.

4. La derivata iniziale della risposta al gradino unitario del sistema $G(s) = \dfrac{s^3+4s^2+3s+2}{3s^4+27s^3+81s^2+93s+36}$ è pari a:
   - ◯ 0;
   - ◯ ∞;
   - ◯ 1/18;
   - ◯ 1/3.

5. A partire dalla risposta al gradino mostrata in figura è possibile stimare la parte immaginaria ω dei poli dominanti del sistema?
   - ◯ no;
   - ◯ sì, $\omega \approx 2$;
   - ◯ sì, $\omega \approx 4$;
   - ◯ sì, $\omega \approx 8$.

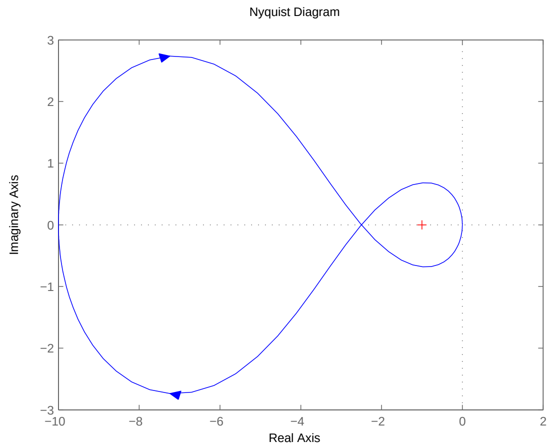


6. L'equazione differenziale corrispondente alla funzione di trasferimento $G(s) = \dfrac{Y(s)}{X(s)} = \dfrac{4\,s+5}{s^2+3\,s+2}$ è:
   - ◯ $\ddot{x}(t) + 3\dot{x}(t) + 2x(t) = 4\dot{y}(t) + 5$;
   - ◯ $\ddot{x}(t) + 3\dot{x}(t) + 2x(t) = 4\dot{y}(t) + 5y(t)$;
   - ◯ $\ddot{y}(t) + 3\dot{y}(t) + 2y(t) = 4\dot{x}(t) + 5x(t)$;
   - ◯ $\ddot{y}(t) + 3\dot{y}(t) + 2 = 4\dot{x}(t) + 5x(t)$.

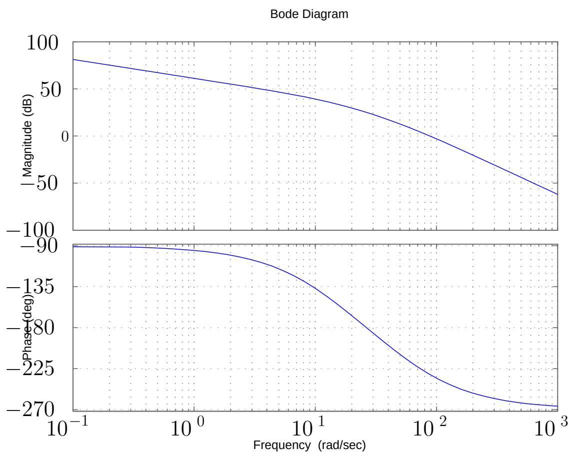
7. Un sistema del secondo ordine a poli complessi coniugati e privo di zeri, ha un picco di risonanza $M_R > 1$
   - ◯ se e solo se $0 < \delta < 1/\sqrt{2}$;
   - ◯ se e solo se $0 < \delta < 0.5$;
   - ◯ se e solo se $0.5 < \delta < 1/\sqrt{2}$;
   - ◯ se e solo se $0 < \delta < 1$.

8. Il tempo di salita di un sistema dinamico retroazionato, con guadagno d'anello $F(s)$ di tipo passa-basso, è:
   - ◯ direttamente proporzionale alla larghezza di banda di $F(s)$;
   - ◯ inversamente proporzionale alla larghezza di banda di $F(s)$;
   - ◯ direttamente proporzionale alla pulsazione di incrocio di $F(s)$;
   - ◯ inversamente proporzionale alla pulsazione di incrocio di $F(s)$.

9. Data la funzione di anello $F(s) = \dfrac{2(s+1)}{(s-1)(s+0.2)}$, a cui corrisponde il diagramma polare completo di figura, posta in retroazione unitaria negativa darà luogo a un sistema con
   - ◯ due poli a parte reale negativa;
   - ◯ due poli a parte reale positiva;
   - ◯ un polo a parte reale positiva e uno a parte reale negativa;
   - ◯ due poli sul cui segno nulla si può desumere.



10. Il sistema di cui si riportano i diagrammi di Bode:
   - ◯ presenta margine di ampiezza e margine di fase entrambi positivi
   - ◯ ha un margine di fase positivo ma un margine di ampiezza negativo
   - ◯ ha un margine di fase negativo ma un margine di ampiezza positivo
   - ◯ presenta margine di ampiezza e margine di fase entrambi negativi



Fondamenti di Controlli Automatici - A.A. 2011/12

7 giugno 2012 - Esercizi

Nome:	
Nr. Mat.	
Firma:	

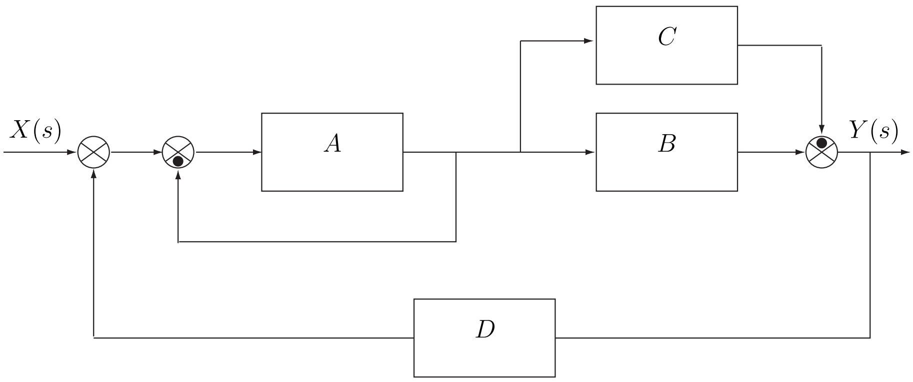
a) Determinare la trasformata di Laplace $X_i(s)$ dei seguenti segnali temporali $x_i(t)$:

$$x_1(t) = 1 - te^{-3\,t+3}, \qquad x_2(t) = (2 + e^{-2\,t})\cos(5\,t),$$

b) Calcolare la risposta impulsiva $g_i(t)$ delle seguenti funzioni di trasferimento $G_i(s)$:

$$G_1(s) = \frac{10\,s^2 - 64\,s + 78}{s(s^2 - 6\,s + 13)}, \qquad G_2(s) = \frac{s-1}{(s+2)^2\,(s+1)}$$

c) Dato il seguente schema a blocchi:



utilizzando la formula di Mason calcolare la funzione di trasferimento $G(s)$ che lega l'ingresso $X(s)$ all'uscita $Y(s)$:

$$G(s) = \frac{Y(s)}{X(s)} =$$

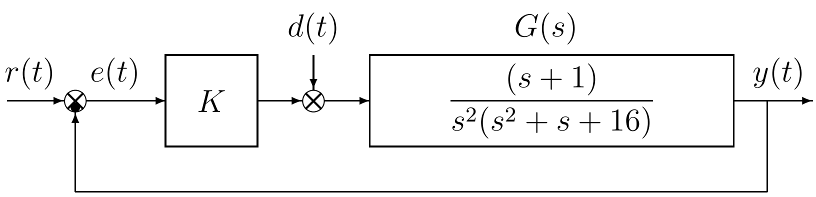
d) Data la funzione di trasferimento $G(s) = \dfrac{(1 + 0.01\,s)(s^2 + 80\,s + 6400)}{(1 + 5\,s)(1 + 0.5s)(s^2 + 4\,s + 80)}$

d.1) Disegnare l'andamento qualitativo della risposta $y(t)$ a un gradino in ingresso di ampiezza 4, $x(t) = 4$.

d.2) Calcolare il valore a regime y_∞ dell'uscita $y(t)$ del sistema.

d.3) Stimare qualitativamente il tempo di assestamento T_a del sistema e il periodo T_ω dell'eventuale oscillazione smorzata.

e) Sia dato il seguente sistema retroazionato:



e.1) Determinare per quali valori del parametro K il sistema retroazionato è asintoticamente stabile.

e.2) Disegnare qualitativamente il diagramma di Nyquist completo della funzione $G(s)$. Calcolare esattamente la posizione di eventuali asintoti e, se esistono, le intersezioni con l'asse reale.

e.3) Posto $K = 1.6$, calcolare l'errore a regime $e(\infty)$ quando sul sistema retroazionato siano applicati contemporaneamente $r(t) = 4t$ e $d(t) = 2\sin(0.1t)$.

e.4) Considerando nuovamente $K = 1.6$, tracciare (nello schema fornito in allegato) i diagrammi di Bode asintotici delle ampiezze e della fasi del guadagno di anello $K\,G(s)$. Indicare sui diagrammi il margine di ampiezza e il margine di fase. Infine, fornire una stima della larghezza di banda del sistema retroazionato.

f) **Non è richiesto lo svolgimento di questo esercizio agli iscritti ad Ingegneria Ambientale.**

Con riferimento al sistema descritto nell'esercizio e), tracciare qualitativamente il luogo delle radici del sistema retroazionato per valori positivi del parametro K. Determinare esattamente gli asintoti, le intersezioni $\omega^\star$ con l'asse immaginario e i corrispondenti valori $K^\star$ del guadagno.

Fondamenti di Controlli Automatici - A.A. 2011/12
7 giugno 2012 - Domande Teoriche

Nome:	
Nr. Mat.	
Firma:	

Per ciascuno dei test a soluzione multipla segnare con una crocetta tutte le affermazioni che si ritengono giuste. In ogni quiz almeno una affermazione è corretta.

1. La risposta impulsiva $g(t)$ del sistema $G(s) = \dfrac{1}{s^2(s+2)}$:

   ○ è limitata ma non tende a zero per $t \to \infty$;
   ○ è limitata e tende a zero per $t \to \infty$;
   ⊗ non è limitata.

2. L'anti-trasformata di Laplace della funzione $F(s) = \dfrac{2s^3+14s^2+33s+23}{s^3+5s^2+8s+4} = \dfrac{2s^3+14s^2+33s+23}{(s+2)^2(s+1)}$ è:

   ○ $f(t) = 2\,\delta(t) + 2\,e^{-2t} + 2\,e^{-t}$;
   ⊗ $f(t) = 2\,\delta(t) + 2\,e^{-2t} + 3\,t\,e^{-2t} + 2\,e^{-t}$;
   ○ $f(t) = 2\,e^{-2t} + 3\,t\,e^{-2t} + 2\,e^{-t}$;
   ○ $f(t) = 2\,e^{2t} + 3\,t\,e^{2t} + 2\,e^{t}$.

3. La massima sovraelongazione del sistema $G(s) = \dfrac{1}{s^2+2s+1}$ in risposta ad un gradino unitario è:

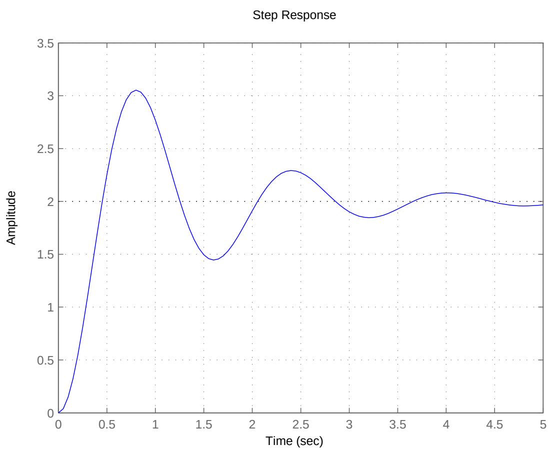
   ⊗ $S = 0\,\%$;
   ○ $S = 5\,\%$;
   ○ $S = 10\,\%$;
   ○ $S = 100\,\%$.

4. La derivata iniziale della risposta al gradino unitario del sistema $G(s) = \dfrac{s^3+4s^2+3s+2}{3s^4+27s^3+81s^2+93s+36}$ è pari a:

   ○ 0;
   ○ ∞;
   ○ 1/18;
   ⊗ 1/3.

5. A partire dalla risposta al gradino mostrata in figura è possibile stimare la parte immaginaria ω dei poli dominanti del sistema?

   ○ no;
   ○ sì, $\omega \approx 2$;
   ⊗ sì, $\omega \approx 4$;
   ○ sì, $\omega \approx 8$.



6. L'equazione differenziale corrispondente alla funzione di trasferimento $G(s) = \dfrac{Y(s)}{X(s)} = \dfrac{4\,s+5}{s^2+3\,s+2}$ è:

   ○ $\ddot{x}(t) + 3\dot{x}(t) + 2x(t) = 4\dot{y}(t) + 5$;
   ○ $\ddot{x}(t) + 3\dot{x}(t) + 2x(t) = 4\dot{y}(t) + 5y(t)$;
   ⊗ $\ddot{y}(t) + 3\dot{y}(t) + 2y(t) = 4\dot{x}(t) + 5x(t)$;
   ○ $\ddot{y}(t) + 3\dot{y}(t) + 2 = 4\dot{x}(t) + 5x(t)$.

7. Un sistema del secondo ordine a poli complessi coniugati e privo di zeri, ha un picco di risonanza $M_R > 1$

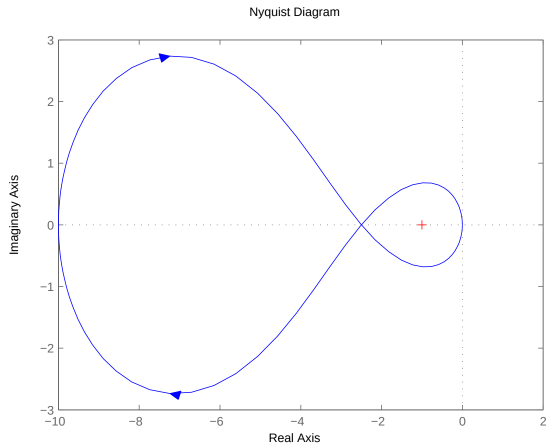
   ⊗ se e solo se $0 < \delta < 1/\sqrt{2}$;
   ○ se e solo se $0 < \delta < 0.5$;
   ○ se e solo se $0.5 < \delta < 1/\sqrt{2}$;
   ○ se e solo se $0 < \delta < 1$.

8. Il tempo di salita di un sistema dinamico retroazionato, con guadagno d'anello $F(s)$ di tipo passa-basso, è:

   ○ direttamente proporzionale alla larghezza di banda di $F(s)$;
   ○ inversamente proporzionale alla larghezza di banda di $F(s)$;
   ○ direttamente proporzionale alla pulsazione di incrocio di $F(s)$;
   ⊗ inversamente proporzionale alla pulsazione di incrocio di $F(s)$.

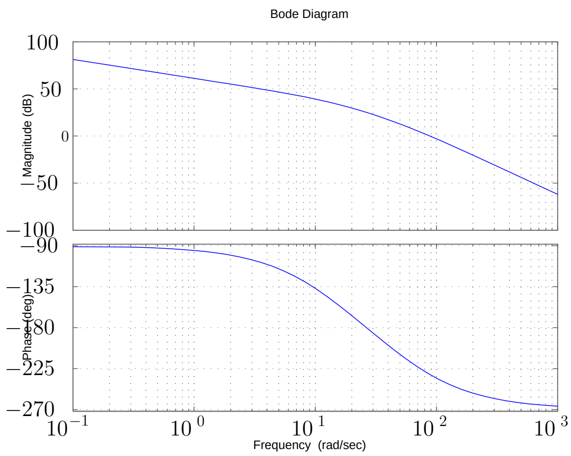
9. Data la funzione di anello $F(s) = \dfrac{2(s+1)}{(s-1)(s+0.2)}$, a cui corrisponde il diagramma polare completo di figura, posta in retroazione unitaria negativa darà luogo a un sistema con

   ⊗ due poli a parte reale negativa;
   ○ due poli a parte reale positiva;
   ○ un polo a parte reale positiva e uno a parte reale negativa;
   ○ due poli sul cui segno nulla si può desumere.



10. Il sistema di cui si riportano i diagrammi di Bode:

   ○ presenta margine di ampiezza e margine di fase entrambi positivi
   ○ ha un margine di fase positivo ma un margine di ampiezza negativo
   ○ ha un margine di fase negativo ma un margine di ampiezza positivo
   ⊗ presenta margine di ampiezza e margine di fase entrambi negativi



Fondamenti di Controlli Automatici - A.A. 2011/12

7 giugno 2012 - Esercizi

Nome:	
Nr. Mat.	
Firma:	

a) Determinare la trasformata di Laplace $X_i(s)$ dei seguenti segnali temporali $x_i(t)$:

$$x_1(t) = 1 - te^{-3\,t+3}, \qquad x_2(t) = (2 + e^{-2\,t})\cos(5\,t),$$

Soluzione:

$$X_1(s) = \frac{1}{s} - e^3 \frac{1}{(s+3)^2}, \qquad X_2(s) = \frac{2\,s}{s^2+25} + \frac{s+2}{(s+2)^2+25}$$

b) Calcolare la risposta impulsiva $g_i(t)$ delle seguenti funzioni di trasferimento $G_i(s)$:

$$G_1(s) = \frac{10\,s^2 - 64\,s + 78}{s(s^2 - 6\,s + 13)}, \qquad G_2(s) = \frac{s-1}{(s+2)^2\,(s+1)}$$

Soluzione:
Poli e corrispondenti residui della funzione $G_1(s)$ sono

Poli		Residui
0	$\rightarrow$	6
$3+2\,j$	$\rightarrow$	$2+4\,j$
$3-2\,j$	$\rightarrow$	$2-4\,j$

di conseguenza la risposta impulsiva (ovvero l'anti-trasformata di Laplace) risulta

$$g_1(t) = 6 + 2\sqrt{20}\,e^{3\,t}\cos(2t + 1.1071\text{rad}) = 6 + 8.9443\,e^{3\,t}\cos(2t + 63.4349^o).$$

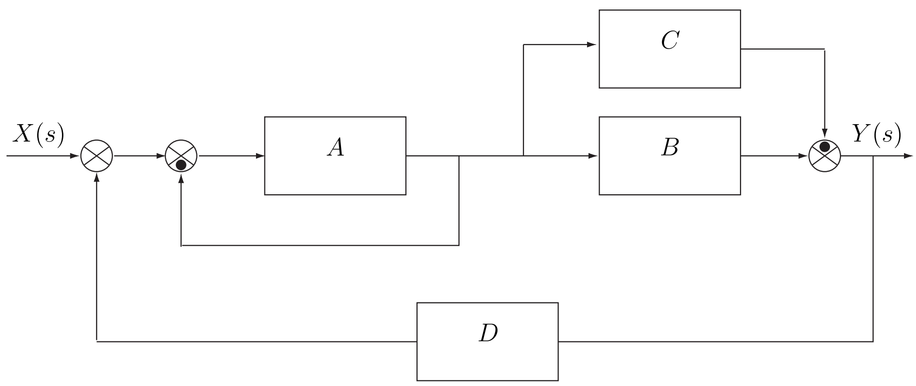
La funzione $G_2(s)$ può essere riscritta come

$$G_2(s) = \frac{2}{s+2} + \frac{3}{(s+2)^2} - \frac{2}{s+1}$$

di conseguenza la sua risposta impulsiva risulta

$$g_1(t) = 2\,e^{-2t} + 3t\,e^{-2t} - 2\,e^{-t}$$

c) Dato il seguente schema a blocchi:

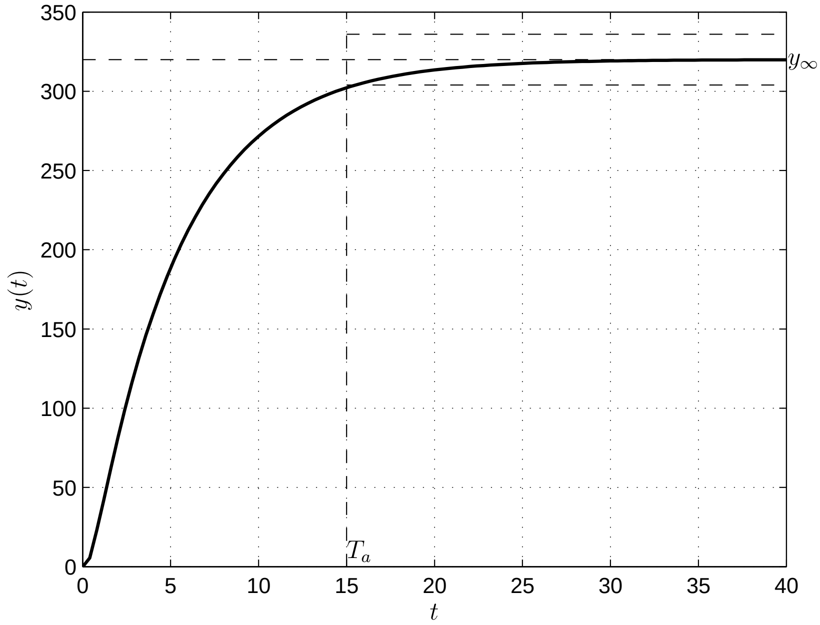


utilizzando la formula di Mason calcolare la funzione di trasferimento $G(s)$ che lega l'ingresso $X(s)$ all'uscita $Y(s)$:

$$G(s) = \frac{Y(s)}{X(s)} = \frac{AB - AC}{1 + A - ABD + ACD}$$

d) Data la funzione di trasferimento $G(s) = \dfrac{(1+0.01\,s)(s^2+80\,s+6400)}{(1+5\,s)(1+0.5s)(s^2+4\,s+80)}$

d.1) Disegnare l'andamento qualitativo della risposta $y(t)$ a un gradino in ingresso di ampiezza 4, $x(t) = 4$.
<u>Soluzione</u>: In figura è riportata la risposta del sistema.



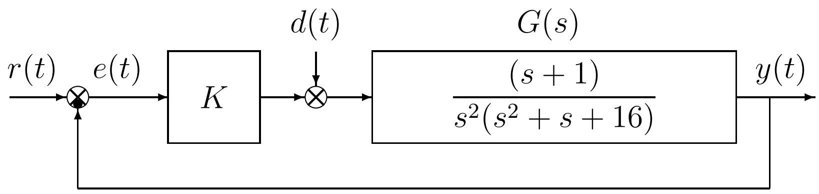
d.2) Calcolare il valore a regime y_∞ dell'uscita $y(t)$ del sistema.
<u>Soluzione</u>: La risposta a regime al gradino di ampiezza $A = 4$ risulta

$$y_\infty = A\,G(0) = 320.$$

d.3) Stimare qualitativamente il tempo di assestamento T_a del sistema e il periodo T_ω dell'eventuale oscillazione smorzata.
<u>Soluzione</u>: Il sistema ha un polo dominante reale con costante di tempo $\tau = 5$ per cui la risposta sarà aperiodica (senza sovraelongazioni) e con un tempo di assestamento

$$T_a = 3\tau = 15 \text{ s}.$$

e) Sia dato il seguente sistema retroazionato:



e.1) Determinare per quali valori del parametro K il sistema retroazionato è asintoticamente stabile.
<u>Soluzione:</u> l'equazione caratteristica del sistema retroazionato è

$$1 + \frac{K(s+1)}{s^2\,(s^2+s+16)} = 0 \qquad \rightarrow \qquad s^4 + s^3 + 16\,s^2 + K\,s + K = 0$$

La corrispondente tabella di Routh è la seguente

$$\begin{array}{c|ccl}
4 & 1 & 16 \quad K & \\
3 & 1 & K & \\
2 & 16-K & K & \rightarrow\; K < 16 \\
1 & K(16-K)-K & & \rightarrow\; K(15-K) > 0 \\
0 & K & & \rightarrow\; K > 0
\end{array}$$

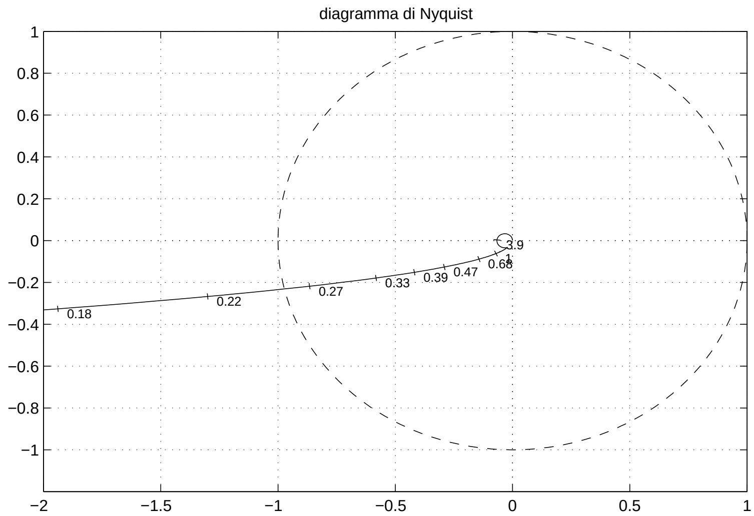
Il sistema retroazionato è asintoticamente stabile per:

$$0 < K < K^{\star} = 15$$

La pulsazione ω^{*} corrispondente al valore limite $K^{\star}$ è:

$$\omega^{*} = \sqrt{K^{\star}} = \sqrt{15}$$

e.2) Disegnare qualitativamente il diagramma di Nyquist completo della funzione $G(s)$. Calcolare esattamente la posizione di eventuali asintoti e, se esistono, le intersezioni con l'asse reale.
Soluzione: Il digramma di Nyquist della funzione $G(s)$ è riportato in figura.



La funzione approssimante per $\omega \to 0$ è $G_0(s) = \dfrac{1}{16s^2}$ pertanto il diagramma parte all'infinito con fase iniziale $\varphi_0 = -\pi$. La funzione approssimante per $\omega \to \infty$ è $G_\infty(s) = \dfrac{1}{s^3}$ e quindi il diagramma giunge nell'origine con fase finale $\varphi_\infty = -\frac{3}{2}\pi$. Il parametro Δ_τ vale $\Delta_\tau = 1 - \frac{1}{16} = \frac{15}{16} > 0$ pertanto il diagramma parte in anticipo rispetto alla fase iniziale φ_0. Il parametro Δ_p vale $\Delta_p = 1 - 1 = 0$ pertanto non da informazioni sull'arrivo in anticipo o in ritardo rispetto alla fase finale φ_∞. Lo sfasamento complessivo è $\Delta\varphi = (1-2)\frac{\pi}{2}$. Dal diagramma risulta inoltre esistere un'unica intersezione con l'asse reale (negativo), che in virtù dell'analisi svolta con Routh al primo punto risulta pari a

$$\sigma^{\star} = -1/K^{\star} = -1/15.$$

La corrispondente pulsazione è $\omega^{\star} = \sqrt{15}$.

e.3) Posto $K = 1.6$, calcolare l'errore a regime $e(\infty)$ quando sul sistema retroazionato siano applicati contemporaneamente $r(t) = 4t$ e $d(t) = 2\sin(0.1t)$. Dato che il sistema è lineare e soggetto quindi alla sovrapposizione degli effetti, l'errore $E(s)$, espresso mediante la trasformata di Laplace, risulterà:

$$E(s) = E_r(s) + E_d(s)$$

dove $E_r(s)$ è l'errore dovuto al riferimento mentre $E_d(s)$ è l'errore dovuto al disturbo. Senza fare alcun calcolo si può dire che a regime $e_r(\infty)$ sarà nullo, in quanto si considera un ingresso a rampa in un sistema di tipo 2 (cioè con due poli nell'origine). Di conseguenza il calcolo dell'errore a regime si riduce a quello dovuto al segnale $d(t)$:

$$E(s) = F_d(s)D(s)$$

dove $D(s)$ è la trasformata di laplace di $d(t)$ e $F_d(s)$ è la funzione di trasferimento tra $D(s)$ e $E(s)$ che vale

$$F_d(s) = -\frac{G(s)}{1 + KG(s)} = -\frac{s+1}{s^4 + s^3 + 16s^2 + 1.6s + 1.6}.$$

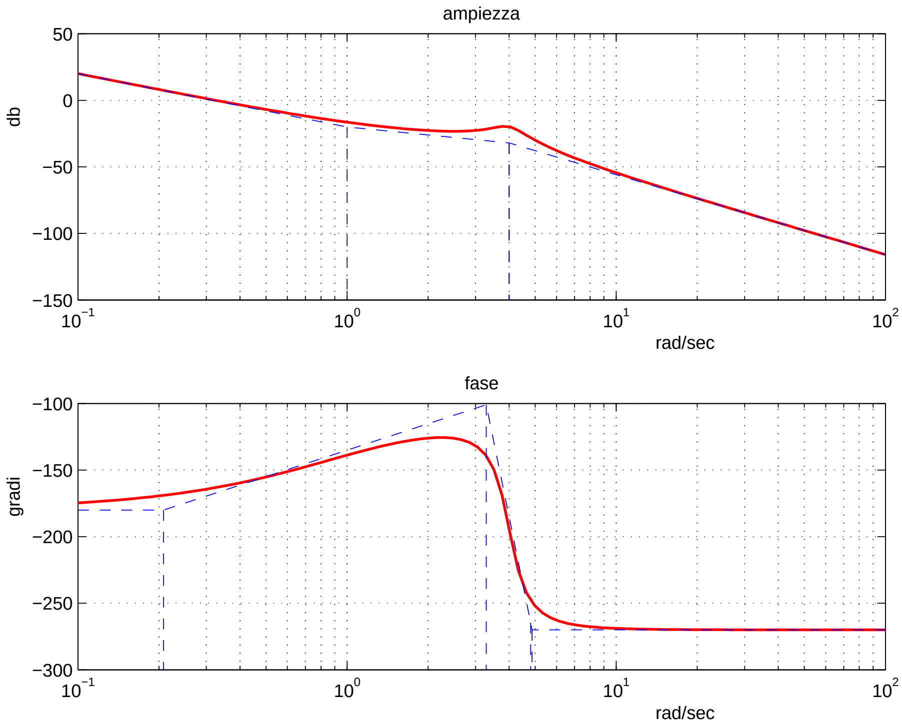
Essendo $d(t)$ un segnale sinusoidale, per trovarne la risposta a regime si sfrutta il concetto di risposta armonica, per cui

$$e_d(t) = 2|F_d(j0.1)|\sin(0.1\,t + \arg\{F_d(j0.1)\})$$

con $|F_d(j0.1)| = 0.6936$ e $\arg\{F_d(j0.1)\} = 179.4101^o$. In conclusione

$$e(\infty) = e_d(\infty) = 1.3873\sin(0.1\,t + 179.4101^o)$$

e.4) Considerando nuovamente $K = 1.6$, tracciare (nello schema fornito in allegato) i diagrammi di Bode asintotici delle ampiezze e della fasi del guadagno di anello $K\,G(s)$. Indicare sui diagrammi il margine di ampiezza e il margine di fase. Infine, fornire una stima della larghezza di banda del sistema retroazionato.
Soluzione:
In figura sono riportati i diagrammi di Bode del sistema. Sul diagramma asintotico delle ampiezze il guadagno β in corrispondenza della pulsazione $\omega = 1$ è $\beta = 0.1 = -20$ dB. Il coefficiente di smorzamento della coppia di poli complessi coniugati è $\delta = 0.125$ da cui si ricava $M_{\omega_m} = \frac{1}{2\delta} = 4 \simeq 12$dB.

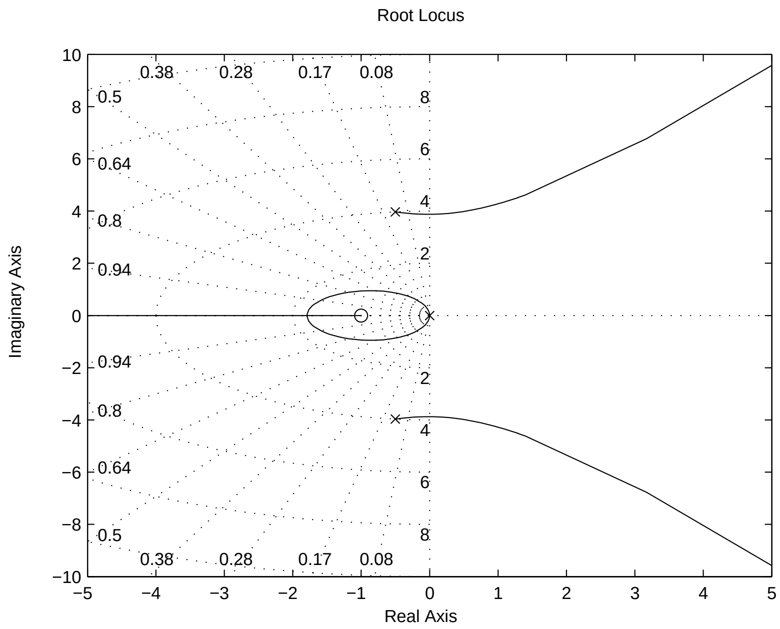


Il margine di ampiezza risulta : $M_a = 9.389 (= 19.45 dB)$ per $\omega = 3.873$ rad/sec, e il margine di fase: $M_f = 16.85^o$ per $\omega = 0.3254$ rad/sec. La banda del sistema retroazionato può essere stimata sulla base della pulsazione di incrocio del sistema in catena aperta e sarà quindi [0, 0.3254] rad/sec.

f) **Non è richiesto lo svolgimento di questo esercizio agli iscritti ad Ingegneria Ambientale.**

Con riferimento al sistema descritto nell'esercizio e), tracciare qualitativamente il luogo delle radici del sistema retroazionato per valori positivi del parametro K. Determinare esattamente gli asintoti, le intersezioni $\omega^\star$ con l'asse immaginario e i corrispondenti valori $K^\star$ del guadagno.

Soluzione: Gli asintoti sono 3, essendo 3 il grado relativo, e si incrociano nel punto $\sigma_a = 0$. Il luogo delle radici finale per valori positivi di K è riportato nella seguente figura.



Dall'analisi svolta mediante il criterio di Routh, risulta che il luogo delle radici attraversa l'asse immaginario, passando dal semipiano sinistro a quello destro, in corrispondenza di $s^{\star} = j\omega^{\star} = j\sqrt{15}$, per $K = K^{\star} = 15$.

Fondamenti di Controlli Automatici - A.A. 2011/12

7 giugno 2012 - Diagrammi di Bode

Nome:	
Nr. Mat.	
Firma: