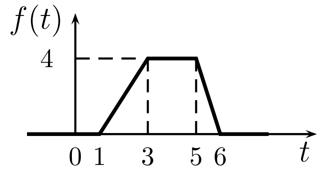
Fondamenti di Controlli Automatici - A.A. 2011/12

7 Novembre 2011 - Esercizi

Nome:	
Nr. Mat.	
Firma:	

a) Determinare la trasformata di Laplace $X_i(s)$ dei seguenti segnali temporali $x_i(t)$:

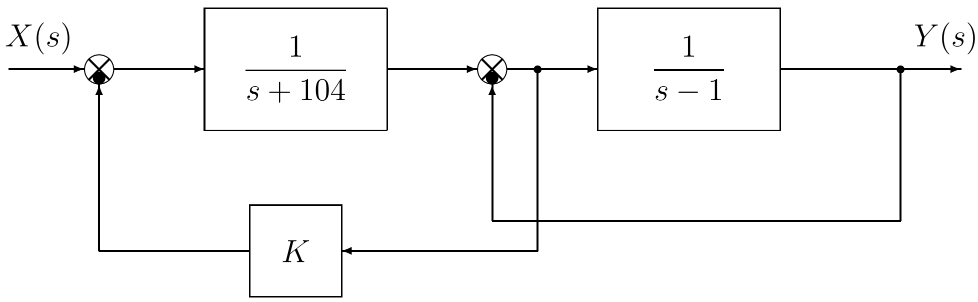
$$x_1(t) = t^5\, e^{-2\,t} + \cos(3\,\pi\, t), \qquad x_2(t) = 3\,\sin(2\,t - 8),$$



b) Calcolare la risposta impulsiva $g_i(t)$ delle seguenti funzioni di trasferimento $G_i(s)$:

$$G_1(s) = \frac{s-1}{(s-4)\,(s+6)^2}, \qquad G_2(s) = \frac{2}{(s+3)^4}, \qquad G_3(s) = \frac{(s+2)^2}{(s-3)\,(s+3)\,(s+4)}$$

c) Si consideri il seguente schema a blocchi:



c.1) Posto $K = -100$, utilizzando la formula di Mason calcolare la funzione di trasferimento $G(s)$ che lega l'ingresso $X(s)$ all'uscita $Y(s)$:

$$G(s) = \frac{Y(s)}{X(s)} =$$

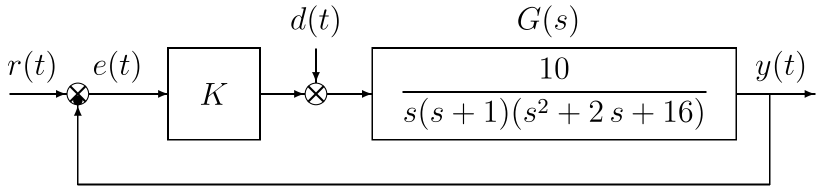
c.2) Relativamente alla funzione di trasferimento $G(s)$ calcolare:

1. la parte reale σ dei poli dominanti del sistema;
2. la parte immaginaria ω dei poli dominanti del sistema;
3. la pulsazione naturale ω_n dei poli dominanti del sistema;
4. il coefficiente di smorzamento δ dei poli dominanti del sistema;
5. il guadagno statico K_0;
6. il tempo di assestamento T_a del sistema $G(s)$ alla risposta al gradino;
7. l'istante di massima sovraelongazione;
8. la massima sovraelongazione percentuale;
9. il periodo delle oscillazioni.

c.3) Disegnare l'andamento qualitativo della risposta $y(t)$ della funzione di trasferimento $G(s)$ al gradino in ingesso $x(t) = 5$.

Per quanto è possibile, disegnare l'andamento temporale in modo congruente con il valore dei parametri numerici determinati al punto precedente.

d) Sia dato il seguente sistema retroazionato:



d.1) Determinare per quali valori del parametro K il sistema retroazionato è asintoticamente stabile.

d.2) Posto $r(t) = 0$, si determini il valore del parametro K tale da garantire che in presenza del disturbo costante $d(t) = d_0$, il valore a regime dell'uscita $y(t)$ sia $y_\infty = 0.3\, d_0$.

d.3) Posto $d(t) = 0$, calcolare, in funzione del parametro K, l'errore a regime $e_\infty(t)$ corrispondente all'applicazione del segnale di ingresso a rampa $r(t) = 7\, t$.

d.4) Posto $K = 1$, disegnare qualitativamente il diagramma di Nyquist "completo" del guadagno d'anello $K\, G(s)$. Calcolare esattamente la posizione σ_a dell'asintoto verticale, le eventuali intersezioni σ_i^* con l'asse reale e i corrispondenti valori delle pulsazioni ω_i^*. Determinare inoltre il margine di ampiezza M_α. Indicare sul diagramma di Nyquist il margine di fase M_ϕ.

e) Si faccia riferimento al sistema retroazionato dell'esercizio precedente e si ponga $K = 1$:

e.1) Tracciare qualitativamente i diagrammi di Bode delle ampiezze e della fasi del guadagno di anello $K\, G(s)$;

e.2) Fornire una stima della larghezza di banda del sistema retroazionato;

e.3) Fornire una stima della risposta "a regime" $y_\infty(t)$ del sistema in catena aperta quando in ingresso è presente il segnale $r(t) = 4 + 3\, \cos(0.3\, t + \pi/5)$.

f) **Non è richiesto lo svolgimento di questo esercizio agli iscritti ad Ingegneria Ambientale.**

Con riferimento al sistema descritto nell'esercizio d), tracciare qualitativamente il luogo delle radici del sistema retroazionato per valori positivi del parametro K. Determinare:

1. l'angolo con cui rami entrano o escono dalle radici;
2. la posizione qualitativa dei punti di diramazione;
3. il centro degli asintoti;
4. gli angoli che gli asintoti formano rispetto all'asse reale positivo
5. le intersezioni del luogo delle radici con l'asse immaginario e i corrispondenti valori del parametro K.

Fondamenti di Controlli Automatici - A.A. 2009/10
7 Novembre 2011 - Domande Teoriche

Nome:	
Nr. Mat.	
Firma:	

Per ciascuno dei test a soluzione multipla segnare con una crocetta tutte le affermazioni che si ritengono giuste.

1. Il diagramma di Nyquist della funzione $G(s) = \frac{(s+2)(s+8)}{s^2+4\,s}$ per $\omega \in [0, \infty]$:
   - ◯ termina nell'origine;
   - ◯ presenta un asintoto verticale;
   - ◯ si evolve tutto nel quarto quadrante.
2. Il sistema $G(s) = \frac{(s+z_1)(s+z_2)}{s\,(s+p_1)(s+p_2)}$ con $0 < z_1 < z_2 < p_1 < p_2$ presenta:
   - ◯ margine di fase maggiore di $\pi/2$;
   - ◯ margine di ampiezza infinito;
   - ◯ guadagno statico unitario.
3. Dato il diagramma di Bode asintotico delle fasi di $G(j\omega)$, da esso si può dedurre il diagramma asintotico delle ampiezze:
   - ◯ solo se il diagramma di Bode delle fasi presenta pendenze negative o nulle;
   - ◯ solo se il sistema $G(s)$ ha tutti i poli e tutti gli zeri a parte reale negativa;
   - ◯ solo se il sistema $G(s)$ ha tutti i poli a parte reale negativa;
   - ◯ se nel sistema non sono presenti ritardi.
4. Si consideri un'equazione caratteristica nella quale compaiono solamente le potenze pari di s. Utilizzando la tabella di Routh è possibile affermare che l'equazione caratteristica:
   - ◯ ha un polo nell'origine;
   - ◯ ha lo stesso numero di radici a parte reale strettamente positiva e strettamente negativa;
   - ◯ ha soluzioni simmetriche rispetto all'origine.
5. Il diagramma di Nyquist della funzione di trasferimento $G(s) = -\frac{\tau_z\,s+1}{s(\tau_p\,s+1)}$:
   - ◯ circonda il punto critico -1 se $\tau_z < \tau_p$;
   - ◯ circonda il punto critico -1 se $\tau_z > \tau_p$;
   - ◯ circonda sempre il punto critico -1.
6. Affinch un sistema sia asintoticamente stabile, occorre che i coefficienti della prima colonna della tabella di Routh ad esso associata siano tutti:
   - ◯ positivi o nulli;
   - ◯ a parte reale negativa;
   - ◯ di segno concorde.
7. Il valore finale della risposta all'impulso $g(t)$ del sistema $G(s) = \frac{5\,s+2}{s\,(s+1)}$ vale:
   - ◯ $g(\infty) = 0$;
   - ◯ $g(\infty) = 2$;
   - ◯ $g(\infty) = 5$.

8. La funzione complessa $X(s) = \frac{1}{(s+5)^2}$ è la trasformata di Laplace:

   ○ di un segnale $x(t)$ che tende a $\frac{1}{5}$ per $t \to \infty$;
   ○ di un segnale $x(t)$ che tende a zero per $t \to 0$;
   ○ del segnale $x(t) = te^{-(t-5)}$;
   ○ del segnale $x(t) = te^{-5t}$.

9. La funzione di risposta armonica permette di determinare:

   ○ l'uscita a regime con segnale di ingresso sinusoidale;
   ○ l'uscita a regime con segnale di ingresso non periodico;
   ○ la risposta libera di un sistema.

10. Se gli elementi della prima colonna della tabella di Routh di una equazione caratteristica di 4 grado ha due elementi negativi e i rimanenti positivi, ne segue che l'equazione caratteristica:

    ○ può avere tutte le radici a parte reale positiva;
    ○ ha solo una radice a parte reale positiva;
    ○ ha almeno una radice a parte reale positiva.

11. Un sistema dinamico lineare asintoticamente stabile se i poli della funzione di trasferimento sono:

    ○ tutti a parte reale negativa;
    ○ tutti a parte reale negativa tranne uno uguale a zero;
    ○ tutti a parte reale positiva.

12. Data la funzione di risposta armonica $G(j\,\omega)$, il suo margine di fase definito come:

    ○ $\left.\frac{1}{|G(j\omega)|}\right|_{\omega\,:\,\angle G(j\omega)=-\pi}$;
    ○ $\left.\angle G(j\,\omega)\right|_{\omega\,:\,|G(j\omega)|=0}$;
    ○ $\left.\pi + \angle G(j\,\omega)\right|_{\omega\,:\,|G(j\omega)|=1}$;
    ○ $\left.\pi - \angle G(j\,\omega)\right|_{\omega\,:\,|G(j\omega)|=1}$.

    Non è richiesto lo svolgimento delle seguenti domande agli iscritti ad Ingegneria Ambientale.

13. Gli asintoti del luogo delle radici di un sistema avente 3 poli, 3 zeri e guadagno statico negativo formano, nel caso di guadagno di retroazione $K > 0$, rispetto all'asse reale positivo angoli:

    ○ di 0, 120 e 240 gradi;
    ○ di 60, 180 e 300 gradi;
    ○ il sistema non presenta asintoti.

14. In un sistema con grado relativo pari a 3, la somma dei poli del sistema chiuso in retroazione:

    ○ indipendente dal valore del guadagno statico;
    ○ indipendente dalla posizione degli zeri;
    ○ dipende dal tipo del sistema.

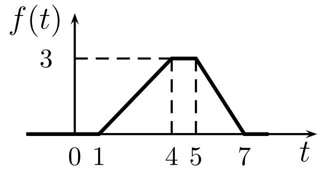
Fondamenti di Controlli Automatici - A.A. 2011/12

7 Novembre 2011 - Esercizi

Nome:	
Nr. Mat.	
Firma:	

a) Determinare la trasformata di Laplace $X_i(s)$ dei seguenti segnali temporali $x_i(t)$:

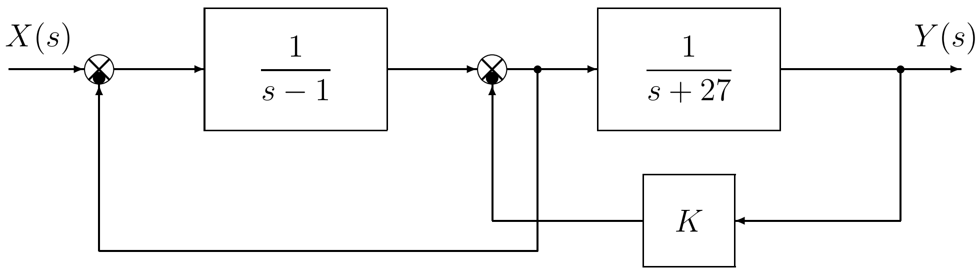
$$x_1(t) = 5\cos(3t - 9), \qquad x_2(t) = 2t^5 e^{-4t} + 2\sin(2\pi t),$$



b) Calcolare la risposta impulsiva $g_i(t)$ delle seguenti funzioni di trasferimento $G_i(s)$:

$$G_1(s) = -\frac{1}{(s+5)^4}, \qquad G_2(s) = \frac{(s+2)^2}{(s-1)(s+1)(s+3)}, \qquad G_3(s) = \frac{s-2}{(s-3)(s-4)^2}$$

c) Si consideri il seguente schema a blocchi:



c.1) Posto $K = -25$, utilizzando la formula di Mason calcolare la funzione di trasferimento $G(s)$ che lega l'ingresso $X(s)$ all'uscita $Y(s)$:

$$G(s) = \frac{Y(s)}{X(s)} =$$

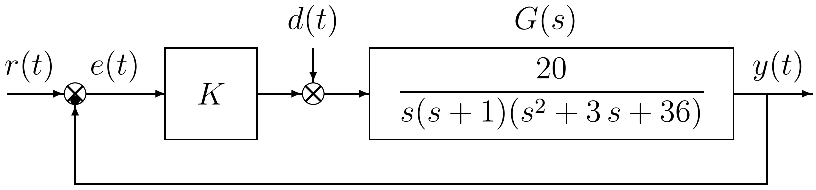
c.2) Relativamente alla funzione di trasferimento $G(s)$ calcolare:

1. la parte reale σ dei poli dominanti del sistema;
2. la parte immaginaria ω dei poli dominanti del sistema;
3. la pulsazione naturale ω_n dei poli dominanti del sistema;
4. il coefficiente di smorzamento δ dei poli dominanti del sistema;
5. il guadagno statico K_0;
6. il tempo di assestamento T_a del sistema $G(s)$ alla risposta al gradino;
7. l'istante di massima sovraelongazione;
8. la massima sovraelongazione percentuale;
9. il periodo delle oscillazioni.

c.3) Disegnare l'andamento qualitativo della risposta $y(t)$ della funzione di trasferimento $G(s)$ al gradino in ingesso $x(t) = 4$.

Per quanto è possibile, disegnare l'andamento temporale in modo congruente con il valore dei parametri numerici determinati al punto precedente.

d) Sia dato il seguente sistema retroazionato:



d.1) Determinare per quali valori del parametro K il sistema retroazionato è asintoticamente stabile.

d.2) Posto $r(t) = 0$, si determini il valore del parametro K tale da garantire che in presenza del disturbo costante $d(t) = d_0$, il valore a regime dell'uscita $y(t)$ sia $y_\infty = 0.5\, d_0$.

d.3) Posto $d(t) = 0$, calcolare, in funzione del parametro K, l'errore a regime $e_\infty(t)$ corrispondente all'applicazione del segnale di ingresso a rampa $r(t) = 8\,t$.

d.4) Posto $K = 1$, disegnare qualitativamente il diagramma di Nyquist "completo" del guadagno d'anello $K\,G(s)$. Calcolare esattamente la posizione σ_a dell'asintoto verticale, le eventuali intersezioni σ_i^* con l'asse reale e i corrispondenti valori delle pulsazioni ω_i^*. Determinare inoltre il margine di ampiezza M_α. Indicare sul diagramma di Nyquist il margine di fase M_ϕ.

e) Si faccia riferimento al sistema retroazionato dell'esercizio precedente e si ponga $K = 1$:

e.1) Tracciare qualitativamente i diagrammi di Bode delle ampiezze e della fasi del guadagno di anello $K\,G(s)$;

e.2) Fornire una stima della larghezza di banda del sistema retroazionato;

e.3) Fornire una stima della risposta "a regime" $y_\infty(t)$ del sistema in catena aperta quando in ingresso è presente il segnale $r(t) = 5 + 2\,\cos(0.4\,t + \pi/4)$.

f) **Non è richiesto lo svolgimento di questo esercizio agli iscritti ad Ingegneria Ambientale.**

Con riferimento al sistema descritto nell'esercizio d), tracciare qualitativamente il luogo delle radici del sistema retroazionato per valori positivi del parametro K. Determinare:

1. l'angolo con cui rami entrano o escono dalle radici;
2. la posizione qualitativa dei punti di diramazione;
3. il centro degli asintoti;
4. gli angoli che gli asintoti formano rispetto all'asse reale positivo
5. le intersezioni del luogo delle radici con l'asse immaginario e i corrispondenti valori del parametro K.

Fondamenti di Controlli Automatici - A.A. 2009/10

7 Novembre 2011 - Domande Teoriche

Nome:	
Nr. Mat.	
Firma:	

Per ciascuno dei test a soluzione multipla segnare con una crocetta tutte le affermazioni che si ritengono giuste.

1. Il diagramma di Nyquist della funzione $G(s) = \frac{(s+2)(s+8)}{s^2+4\,s}$ per $\omega \in [0, \infty]$:
   - ◯ si evolve tutto nel quarto quadrante;
   - ◯ presenta un asintoto verticale;
   - ◯ termina nell'origine.
2. Il sistema $G(s) = \frac{(s+z_1)(s+z_2)}{s\,(s+p_1)(s+p_2)}$ con $0 < z_1 < z_2 < p_1 < p_2$ presenta:
   - ◯ con pendenza di $-60\,db/decade$ per $\omega \to \infty$;
   - ◯ con pendenza di $-40\,db/decade$ per $\omega \to 0$;
   - ◯ con pendenza di $-20\,db/decade$ per $\omega \to \infty$.
3. Dato il diagramma di Bode asintotico delle fasi di $G(j\omega)$, da esso si può dedurre il diagramma asintotico delle ampiezze:
   - ◯ se nel sistema non sono presenti ritardi.
   - ◯ solo se il sistema $G(s)$ ha tutti i poli e tutti gli zeri a parte reale negativa;
   - ◯ solo se il sistema $G(s)$ ha tutti i poli a parte reale negativa;
   - ◯ solo se il diagramma di Bode delle fasi presenta pendenze negative o nulle.
4. Si consideri un'equazione caratteristica nella quale compaiono solamente le potenze pari di s. Utilizzando la tabella di Routh è possibile affermare che l'equazione caratteristica:
   - ◯ ha soluzioni simmetriche rispetto all'origine;
   - ◯ ha lo stesso numero di radici a parte reale strettamente positiva e strettamente negativa;
   - ◯ ha un polo nell'origine.
5. Il diagramma di Nyquist della funzione di trasferimento $G(s) = -\frac{\tau_z\,s+1}{s(\tau_p\,s+1)}$:
   - ◯ circonda il punto critico -1 se $\tau_z > \tau_p$;
   - ◯ circonda il punto critico -1 se $\tau_z < \tau_p$;
   - ◯ circonda sempre il punto critico -1.
6. Affinch un sistema sia asintoticamente stabile, occorre che i coefficienti della prima colonna della tabella di Routh ad esso associata siano tutti:
   - ◯ di segno concorde;
   - ◯ positivi o nulli;
   - ◯ a parte reale negativa.
7. Il valore iniziale della risposta all'impulso $g(t)$ del sistema $G(s) = \frac{5\,s+3}{s\,(s+2)}$ vale:
   - ◯ $g(0^+) = 0$;
   - ◯ $g(0^+) = 2$;
   - ◯ $g(0^+) = 5$.

8. La funzione complessa $X(s) = \frac{1}{(s+5)^2}$ è la trasformata di Laplace:

- ◯ del segnale $x(t) = te^{-5t}$;
- ◯ del segnale $x(t) = te^{-(t-5)}$;
- ◯ di un segnale $x(t)$ che tende a zero per $t \to 0$;
- ◯ di un segnale $x(t)$ che tende a $\frac{1}{5}$ per $t \to \infty$.

9. La funzione di risposta armonica permette di determinare:

- ◯ la risposta libera di un sistema;
- ◯ l'uscita a regime con segnale di ingresso sinusoidale;
- ◯ l'uscita a regime con segnale di ingresso non periodico.

10. Se gli elementi della prima colonna della tabella di Routh di una equazione caratteristica di 4 grado ha due elementi negativi e i rimanenti positivi, ne segue che l'equazione caratteristica:

- ◯ ha solo una radice a parte reale positiva;
- ◯ ha almeno una radice a parte reale positiva;
- ◯ può avere tutte le radici a parte reale positiva.

11. Un sistema dinamico lineare asintoticamente stabile se i poli della funzione di trasferimento sono:

- ◯ tutti a parte reale negativa tranne uno uguale a zero;
- ◯ tutti a parte reale negativa;
- ◯ tutti a parte reale positiva.

12. Data la funzione di risposta armonica $G(j\,\omega)$, il suo margine di fase definito come:

- ◯ $\left.\frac{1}{|G(j\omega)|}\right|_{\omega\,:\,\angle G(j\omega)=-\pi}$;
- ◯ $\left.\angle G(j\,\omega)\right|_{\omega\,:\,|G(j\omega)|=0}$;
- ◯ $\left.\pi - \angle G(j\,\omega)\right|_{\omega\,:\,|G(j\omega)|=1}$;
- ◯ $\left.\pi + \angle G(j\,\omega)\right|_{\omega\,:\,|G(j\omega)|=1}$.

Non è richiesto lo svolgimento delle seguenti domande agli iscritti ad Ingegneria Ambientale.

13. Gli asintoti del luogo delle radici di un sistema avente 3 poli, 3 zeri e guadagno statico negativo formano, nel caso di guadagno di retroazione $K > 0$, rispetto all'asse reale positivo angoli:

- ◯ il sistema non presenta asintoti;
- ◯ di 60, 180 e 300 gradi;
- ◯ di 0, 120 e 240 gradi.

14. In un sistema con grado relativo pari a 3, la somma dei poli del sistema chiuso in retroazione:

- ◯ dipende dal tipo del sistema;
- ◯ indipendente dal valore del guadagno statico;
- ◯ indipendente dalla posizione degli zeri.

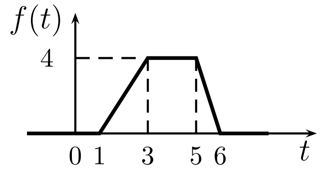
Fondamenti di Controlli Automatici - A.A. 2011/12

7 Novembre 2011 - Esercizi

Nome:	
Nr. Mat.	
Firma:	

a) Determinare la trasformata di Laplace $X_i(s)$ dei seguenti segnali temporali $x_i(t)$:

$$x_1(t) = t^5\, e^{-2\,t} + \cos(3\,\pi\,t), \qquad x_2(t) = 3\,\sin(2\,t - 8),$$



Soluzione:

$$X_1(s) = \frac{120}{(s+2)^6} + \frac{s}{s^2+9\,\pi^2}, \quad X_2(s) = \frac{6\,e^{-4s}}{s^2+4}, \quad X_3(s) = \frac{2}{s^2}\left[e^{-s} - e^{-3\,s} - 2e^{-5\,s} + 2e^{-6\,s}\right]$$

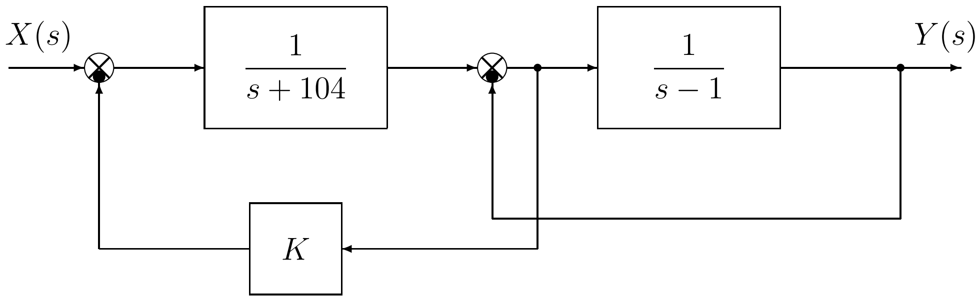
b) Calcolare la risposta impulsiva $g_i(t)$ delle seguenti funzioni di trasferimento $G_i(s)$:

$$G_1(s) = \frac{s-1}{(s-4)\,(s+6)^2}, \qquad G_2(s) = \frac{2}{(s+3)^4}, \qquad G_3(s) = \frac{(s+2)^2}{(s-3)\,(s+3)\,(s+4)}$$

Soluzione:

$$g_1(t) = \frac{3}{100}\,e^{4\,t} - \frac{3}{100}\,e^{-6\,t} + \frac{7}{10}\,t\,e^{-6\,t}, \qquad g_2(t) = \frac{t^3}{3}\,e^{-3\,t}, \qquad g_3(t) = \frac{25}{42}\,e^{3\,t} - \frac{1}{6}\,e^{-3\,t} + \frac{4}{7}\,t\,e^{-4\,t}$$

c) Si consideri il seguente schema a blocchi:

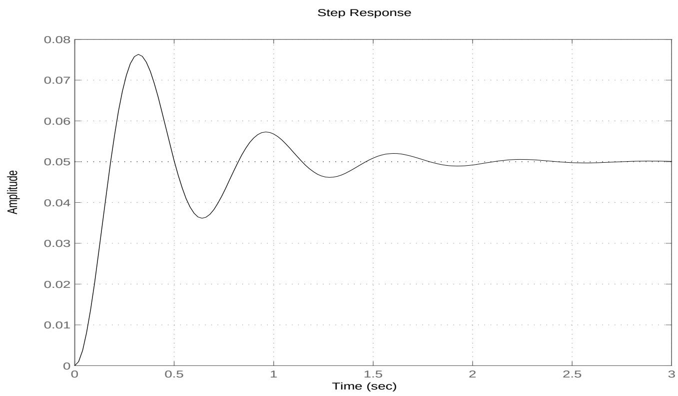


c.1) Posto $K = -100$, utilizzando la formula di Mason calcolare la funzione di trasferimento $G(s)$ che lega l'ingresso $X(s)$ all'uscita $Y(s)$:

$$G(s) = \frac{Y(s)}{X(s)} = \frac{1}{s^2 + 4\,s + 100}$$

c.2) Relativamente alla funzione di trasferimento $G(s)$ calcolare:

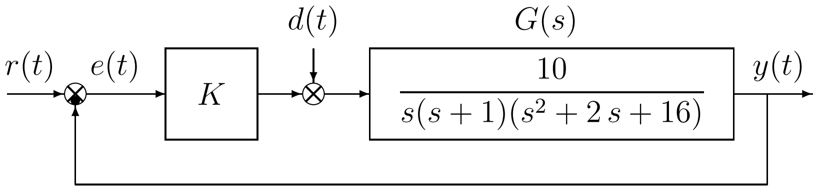
1. la parte reale σ dei poli dominanti del sistema; $\sigma = 2$
2. la parte immaginaria ω dei poli dominanti del sistema; $\omega = 9.79$
3. la pulsazione naturale ω_n dei poli dominanti del sistema; $\omega_n = 10$
4. il coefficiente di smorzamento δ dei poli dominanti del sistema; $\delta = 0.2$
5. il guadagno statico K_0; $K_0 = 1/100$
6. il tempo di assestamento T_a del sistema $G(s)$ alla risposta al gradino; $T_a = \frac{3}{2}$
7. l'istante di massima sovraelongazione; $T_M = 0.32$
8. la massima sovraelongazione percentuale; $S = 53.3\%$
9. il periodo delle oscillazioni. $T = 0.64$



c.3) Disegnare l'andamento qualitativo della risposta $y(t)$ della funzione di trasferimento $G(s)$ al gradino in ingesso $x(t) = 5$.

Per quanto è possibile, disegnare l'andamento temporale in modo congruente con il valore dei parametri numerici determinati al punto precedente.

d) Sia dato il seguente sistema retroazionato:



d.1) Determinare per quali valori del parametro K il sistema retroazionato è asintoticamente stabile.

Soluzione: l'equazione caratteristica del sistema retroazionato è

$$1 + \frac{K}{s\,(s+1)\,(s^2+2\,s+16)} = 0 \qquad \rightarrow \qquad s^4 + 3\,s^3 + 18\,s^2 + 16\,s + 10\,K = 0$$

La corrispondente tabella di Routh è la seguente

4	1	18	$10\,K$
3	3	16	
2	38	$30\,K$	
1	$608 - 90\,K$		
0	$30\,K$		

Dalla riga 1 e dalla riga 0 si ricavano i seguenti vincoli:

$$K > 0, \qquad\qquad K < 6.756$$

La pulsazione ω^* corrispondente al valore limite $K^* = 6.756$ è:

$$\omega^* = \sqrt{\frac{16}{3}} = 2.3$$

d.2) Posto $r(t) = 0$, si determini il valore del parametro K tale da garantire che in presenza del disturbo costante $d(t) = d_0$, il valore a regime dell'uscita $y(t)$ sia $y_\infty = 0.3\,d_0$.

<u>Soluzione</u>: Il valore a regime dell'uscita corrispondente all'applicazione del disturbo costante $d(t) = d_0$ è

$$y_\infty = \frac{G(0)\,d_0}{1 + K\,G(0)} = \frac{d_0}{K} = 0.3\,d_0$$

Il sistema $G(s)$è di tipo 1 e quindi il suo guadagno statico infinito $G(0) = \infty$. Il valore di uscita richiesto si ha per $K = 3.33$.

d.3) Posto $d(t) = 0$, calcolare, in funzione del parametro K, l'errore a regime $e_\infty(t)$ corrispondente all'applicazione del segnale di ingresso a rampa $r(t) = 7\,t$.

Soluzione: L'errore a regime $e_\infty = \frac{7}{K_v}$ con $K_v = \frac{5\,K}{8}$. Si ottiene quindi che:

$$e_\infty = \frac{56}{5\,K}.$$

d.4) Posto $K = 1$, disegnare qualitativamente il diagramma di Nyquist "completo" del guadagno d'anello $K\,G(s)$. Calcolare esattamente la posizione σ_a dell'asintoto verticale, le eventuali intersezioni σ_i^* con l'asse reale e i corrispondenti valori delle pulsazioni ω_i^*. Determinare inoltre il margine di ampiezza M_α. Indicare sul diagramma di Nyquist il margine di fase M_ϕ.

Soluzione: Il diagramma di Nyquist della funzione $G(s)$ per $\omega \in [0,\ \infty]$ è mostrato in Fig. 1.

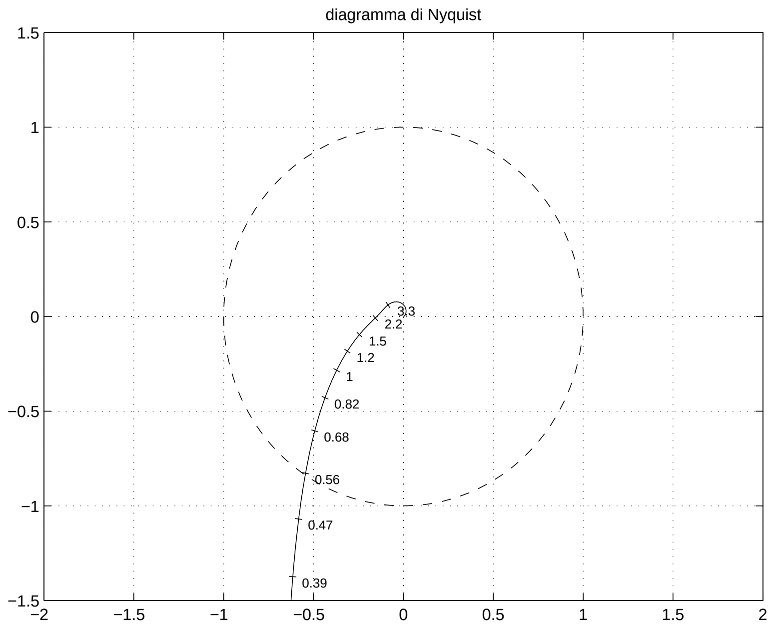


Figura 1: Diagramma di Nyquist della funzione $G(s)$ per $\omega \in [0,\ \infty]$.

Il sistema é di tipo 1 per cui esiste un asintoto verticale in $K_\tau\,\Delta_a = -0.7031$.

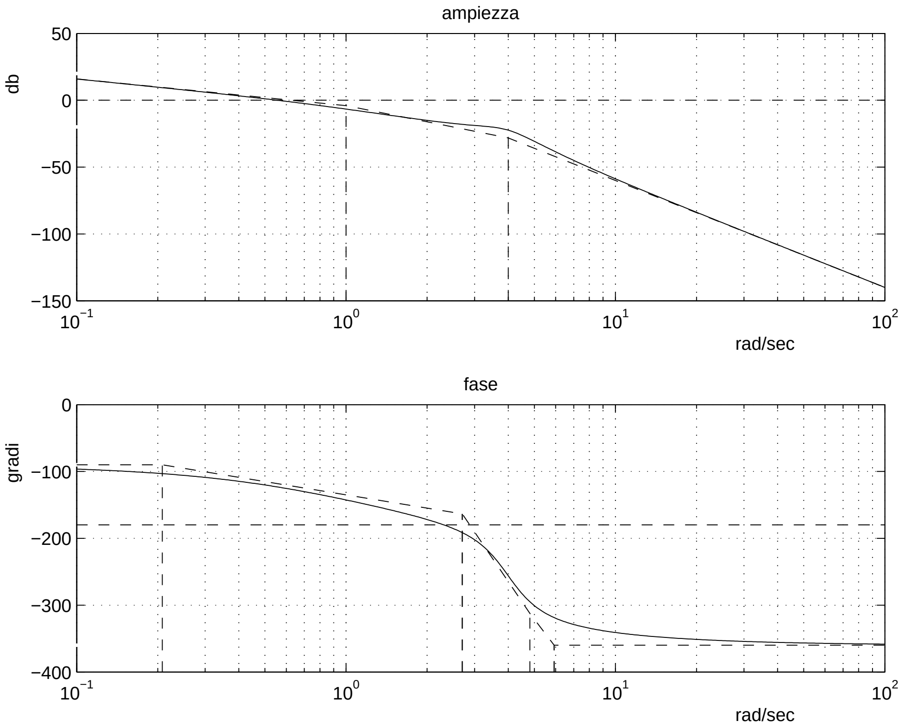
Esiste un'unica intersezione σ^* con l'asse reale. Tale intersezione si determina facilmente dall'analisi di Routh svolta al punto d.1:

$$\sigma^* = -\frac{1}{K^*} = -0.148$$

Il corrispondente valore di ω^* è 2.3 mentre il margine di ampiezza è $M_a = \frac{1}{|\sigma^*|} = 6.756$ ed il margine di fase è $M_f = 57$.

e) Si faccia riferimento al sistema retroazionato dell'esercizio precedente e si ponga $K = 1$:

e.1) Tracciare qualitativamente i diagrammi di Bode delle ampiezze e della fasi del guadagno di anello $K\,G(s)$;



e.2) Fornire una stima della larghezza di banda del sistema retroazionato;

Soluzione: La banda passante del sistema può essere determinata dal punto di incrocio del diagramma di Bode delle ampiezze con l'asse 0 db. Una stima della banda passante del sistema è quindi $\omega_T = 0.4\,rad/s$.

e.3) Fornire una stima della risposta "a regime" $y_\infty(t)$ del sistema in catena aperta quando in ingresso è presente il segnale $r(t) = 4 + 3\,\cos(0.3\,t + \pi/5)$.

Soluzione: La risposta in catena aperta del sistema si pu facilmente determinare a partire dalla trasformata di Laplace dell'ingresso: $R(s) = \dfrac{4}{s} + 3\left(\dfrac{\cos(\pi/5)s - 0.3\sin(\pi/5)}{s^2 + 0.3^2}\right)$.

L'uscita del sistema quindi data da $Y(s) = KR(s)G(s)$.

f) **Non è richiesto lo svolgimento di questo esercizio agli iscritti ad Ingegneria Ambientale.**

Con riferimento al sistema descritto nell'esercizio d), tracciare qualitativamente il luogo delle radici del sistema retroazionato per valori positivi del parametro K. Determinare:

1. l'angolo con cui rami entrano o escono dalle radici;
2. la posizione qualitativa dei punti di diramazione;
3. il centro degli asintoti;
4. gli angoli che gli asintoti formano rispetto all'asse reale positivo
5. le intersezioni del luogo delle radici con l'asse immaginario e i corrispondenti valori del parametro K.

Soluzione: vedi figura 4. Soluzione:

$$\sigma = -0.75$$
$$\phi = 45,\ 135,\ 225,\ 315$$
$$s^* = 2.3\,i$$
$$K^* = 6.75$$

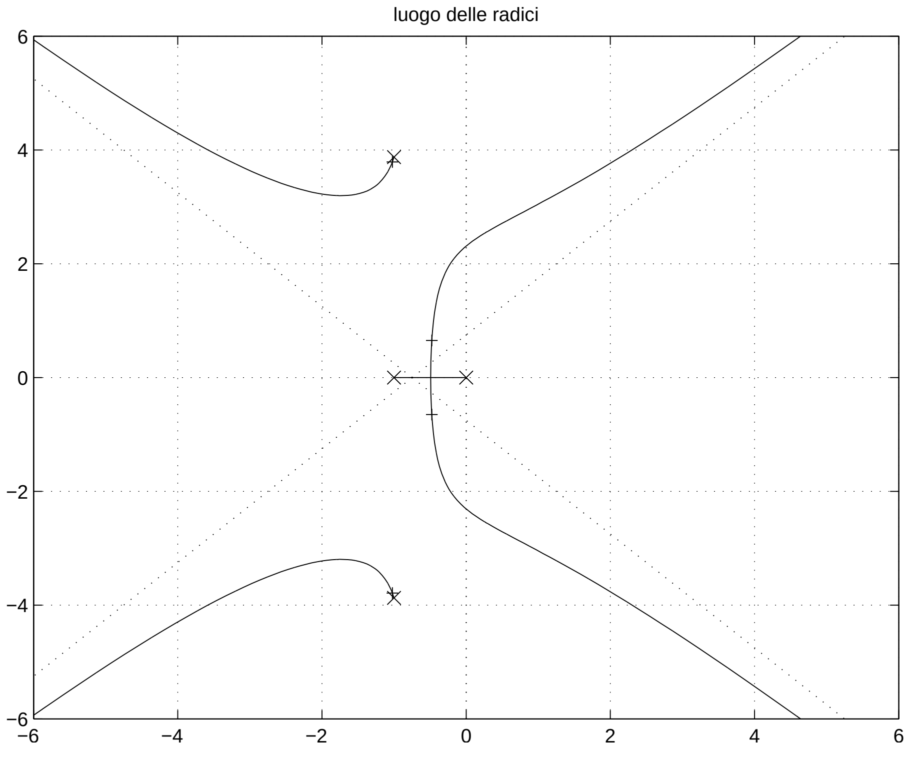


Figura 2: Luogo della radici di $G(s)$.

Fondamenti di Controlli Automatici - A.A. 2009/10

7 Novembre 2011 - Domande Teoriche

Nome:	
Nr. Mat.	
Firma:	

Per ciascuno dei test a soluzione multipla segnare con una crocetta tutte le affermazioni che si ritengono giuste.

1. Il diagramma di Nyquist della funzione $G(s) = \frac{(s+2)(s+8)}{s^2+4\,s}$ per $\omega \in [0, \infty]$:

   ○ termina nell'origine;
   ⊗ presenta un asintoto verticale;
   ⊗ si evolve tutto nel quarto quadrante.

2. Il sistema $G(s) = \frac{(s+z_1)(s+z_2)}{s\,(s+p_1)(s+p_2)}$ con $0 < z_1 < z_2 < p_1 < p_2$ presenta:

   ⊗ margine di fase maggiore di $\pi/2$;
   ⊗ margine di ampiezza infinito;
   ○ guadagno statico unitario.

3. Dato il diagramma di Bode asintotico delle fasi di $G(j\omega)$, da esso si può dedurre il diagramma asintotico delle ampiezze:

   ○ solo se il diagramma di Bode delle fasi presenta pendenze negative o nulle;
   ⊗ solo se il sistema $G(s)$ ha tutti i poli e tutti gli zeri a parte reale negativa;
   ○ solo se il sistema $G(s)$ ha tutti i poli a parte reale negativa;
   ○ se nel sistema non sono presenti ritardi.

4. Si consideri un'equazione caratteristica nella quale compaiono solamente le potenze pari di s. Utilizzando la tabella di Routh è possibile affermare che l'equazione caratteristica:

   ○ ha un polo nell'origine;
   ⊗ ha lo stesso numero di radici a parte reale strettamente positiva e strettamente negativa;
   ⊗ ha soluzioni simmetriche rispetto all'origine.

5. Il diagramma di Nyquist della funzione di trasferimento $G(s) = -\frac{\tau_z\,s+1}{s(\tau_p\,s+1)}$:

   ○ circonda il punto critico -1 se $\tau_z < \tau_p$;
   ○ circonda il punto critico -1 se $\tau_z > \tau_p$;
   ⊗ circonda sempre il punto critico -1.

6. Affinch un sistema sia asintoticamente stabile, occorre che i coefficienti della prima colonna della tabella di Routh ad esso associata siano tutti:

   ○ positivi o nulli;
   ○ a parte reale negativa;
   ⊗ di segno concorde.

7. Il valore finale della risposta all'impulso $g(t)$ del sistema $G(s) = \frac{5\,s+2}{s\,(s+1)}$ vale:

   ○ $g(\infty) = 0$;
   ⊗ $g(\infty) = 2$;
   ○ $g(\infty) = 5$.

8. La funzione complessa $X(s) = \frac{1}{(s+5)^2}$ è la trasformata di Laplace:

   ◯ di un segnale $x(t)$ che tende a $\frac{1}{5}$ per $t \to \infty$;

   ⊗ di un segnale $x(t)$ che tende a zero per $t \to 0$;

   ◯ del segnale $x(t) = te^{-(t-5)}$;

   ⊗ del segnale $x(t) = te^{-5t}$.

9. La funzione di risposta armonica permette di determinare:

   ⊗ l'uscita a regime con segnale di ingresso sinusoidale;

   ⊗ l'uscita a regime con segnale di ingresso non periodico;

   ◯ la risposta libera di un sistema.

10. Se gli elementi della prima colonna della tabella di Routh di una equazione caratteristica di 4 grado ha due elementi negativi e i rimanenti positivi, ne segue che l'equazione caratteristica:

    ⊗ può avere tutte le radici a parte reale positiva;

    ◯ ha solo una radice a parte reale positiva;

    ⊗ ha almeno una radice a parte reale positiva.

11. Un sistema dinamico lineare asintoticamente stabile se i poli della funzione di trasferimento sono:

    ⊗ tutti a parte reale negativa;

    ◯ tutti a parte reale negativa tranne uno uguale a zero;

    ◯ tutti a parte reale positiva.

12. Data la funzione di risposta armonica $G(j\,\omega)$, il suo margine di fase definito come:

    ◯ $\left.\dfrac{1}{|G(j\omega)|}\right|_{\omega\,:\,\angle G(j\omega)=-\pi}$;

    ◯ $\left.\angle G(j\,\omega)\right|_{\omega\,:\,|G(j\omega)|=0}$;

    ⊗ $\left.\pi + \angle G(j\,\omega)\right|_{\omega\,:\,|G(j\omega)|=1}$;

    ◯ $\left.\pi - \angle G(j\,\omega)\right|_{\omega\,:\,|G(j\omega)|=1}$.

    Non è richiesto lo svolgimento delle seguenti domande agli iscritti ad Ingegneria Ambientale.

13. Gli asintoti del luogo delle radici di un sistema avente 3 poli, 3 zeri e guadagno statico negativo formano, nel caso di guadagno di retroazione $K > 0$, rispetto all'asse reale positivo angoli:

    ◯ di 0, 120 e 240 gradi;

    ◯ di 60, 180 e 300 gradi;

    ⊗ il sistema non presenta asintoti.

14. In un sistema con grado relativo pari a 3, la somma dei poli del sistema chiuso in retroazione:

    ⊗ indipendente dal valore del guadagno statico;

    ⊗ indipendente dalla posizione degli zeri;

    ◯ dipende dal tipo del sistema.

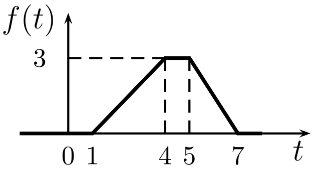
Fondamenti di Controlli Automatici - A.A. 2011/12

7 Novembre 2011 - Esercizi

Nome:	
Nr. Mat.	
Firma:	

a) Determinare la trasformata di Laplace $X_i(s)$ dei seguenti segnali temporali $x_i(t)$:

$$x_1(t) = 5\,\cos(3\,t - 9), \qquad x_2(t) = 2\,t^5\,e^{-4\,t} + 2\,\sin(2\,\pi\,t),$$



Soluzione:

$$X_1(s) = \frac{5\,s\,e^{-3s}}{s^2+9}, \quad X_2(s) = \frac{240}{(s+4)^6} + \frac{4\,\pi}{s^2+4\,\pi^2}, \quad X_3(s) = \frac{1}{2\,s^2}\left[2\,e^{-s} - 2e^{-4\,s} - 3\,e^{-5\,s} + 3\,e^{-7\,s}\right]$$

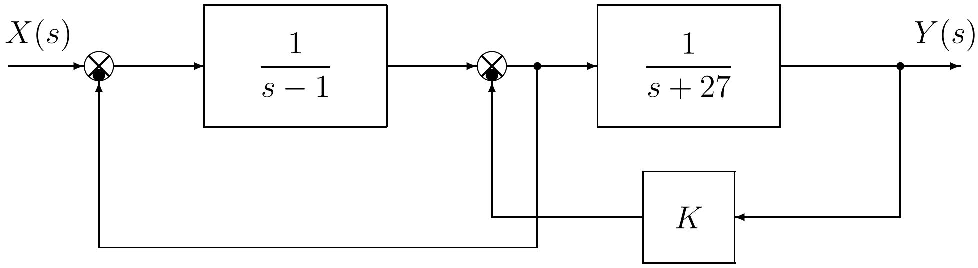
b) Calcolare la risposta impulsiva $g_i(t)$ delle seguenti funzioni di trasferimento $G_i(s)$:

$$G_1(s) = -\frac{1}{(s+5)^4}, \qquad G_2(s) = \frac{(s+2)^2}{(s-1)\,(s+1)\,(s+3)}, \qquad G_3(s) = \frac{s-2}{(s-3)\,(s-4)^2}$$

Soluzione:

$$g_1(t) = -\frac{t^3}{6}\,e^{-5\,t}, \qquad g_2(t) = \frac{9}{8}\,e^{t} - \frac{1}{4}\,e^{-t} + \frac{1}{8}e^{-3\,t}, \qquad g_3(t) = e^{3\,t} - e^{4\,t} + 2\,t\,e^{4\,t}$$

c) Si consideri il seguente schema a blocchi:

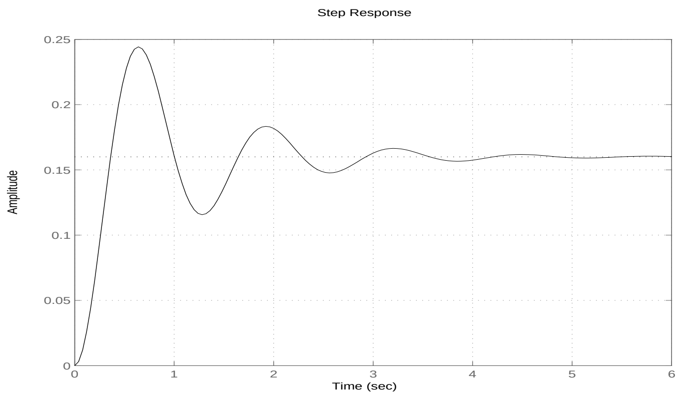


c.1) Posto $K = -25$, utilizzando la formula di Mason calcolare la funzione di trasferimento $G(s)$ che lega l'ingresso $X(s)$ all'uscita $Y(s)$:

$$G(s) = \frac{Y(s)}{X(s)} = \frac{1}{s^2 + 2\,s + 25}$$

c.2) Relativamente alla funzione di trasferimento $G(s)$ calcolare:

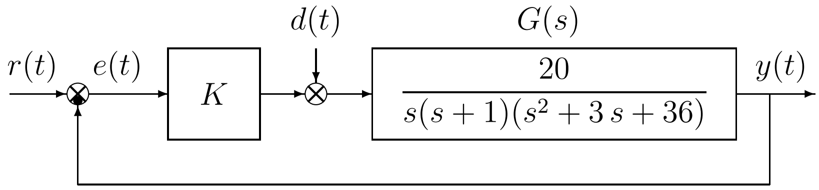
1. la parte reale σ dei poli dominanti del sistema; $\sigma = 1$
2. la parte immaginaria ω dei poli dominanti del sistema; $\omega = 4.89$
3. la pulsazione naturale ω_n dei poli dominanti del sistema; $\omega_n = 5$
4. il coefficiente di smorzamento δ dei poli dominanti del sistema; $\delta = 0.2$
5. il guadagno statico K_0; $K_0 = 1/25$
6. il tempo di assestamento T_a del sistema $G(s)$ alla risposta al gradino; $T_a = 3$
7. l'istante di massima sovraelongazione; $T_M = 0.64$
8. la massima sovraelongazione percentuale; $S = 44.4\%$
9. il periodo delle oscillazioni. $T = 1.28$



c.3) Disegnare l'andamento qualitativo della risposta $y(t)$ della funzione di trasferimento $G(s)$ al gradino in ingesso $x(t) = 4$.

Per quanto è possibile, disegnare l'andamento temporale in modo congruente con il valore dei parametri numerici determinati al punto precedente.

d) Sia dato il seguente sistema retroazionato:



d.1) Determinare per quali valori del parametro K il sistema retroazionato è asintoticamente stabile.

Soluzione: l'equazione caratteristica del sistema retroazionato è

$$1 + \frac{20\,K}{s\,(s+1)\,(s^2+3\,s+36)} = 0 \qquad \rightarrow \qquad s^4 + 4\,s^3 + 39\,s^2 + 36\,s + 20\,K = 0$$

La corrispondente tabella di Routh è la seguente

4	1	39	$20\,K$
3	4	36	
2	30	$20\,K$	
1	$36 - \frac{8}{3}\,K$		
0	$20\,K$		

Dalla riga 1 e dalla riga 0 si ricavano i seguenti vincoli:

$$K > 0, \qquad\qquad K < 13.5$$

La pulsazione ω^* corrispondente al valore limite $K^* = 13.5$ è:

$$\omega^* = \sqrt{\frac{36}{4}} = 3$$

d.2) Posto $r(t) = 0$, si determini il valore del parametro K tale da garantire che in presenza del disturbo costante $d(t) = d_0$, il valore a regime dell'uscita $y(t)$ sia $y_\infty = 0.5\,d_0$.

<u>Soluzione</u>: Il valore a regime dell'uscita corrispondente all'applicazione del disturbo costante $d(t) = d_0$ è

$$y_\infty = \frac{G(0)\,d_0}{1 + K\,G(0)} = \frac{d_0}{K} = 0.5\,d_0$$

Il sistema $G(s)$è di tipo 1 e quindi il suo guadagno statico infinito $G(0) = \infty$. Il valore di uscita richiesto si ha per $K = 2$.

d.3) Posto $d(t) = 0$, calcolare, in funzione del parametro K, l'errore a regime $e_\infty(t)$ corrispondente all'applicazione del segnale di ingresso a rampa $r(t) = 8\,t$.

Soluzione: L'errore a regime $e_\infty = \frac{8}{K_v}$ con $K_v = \frac{5\,K}{9}$. Si ottiene quindi che:

$$e_\infty = \frac{72}{5\,K}.$$

d.4) Posto $K = 1$, disegnare qualitativamente il diagramma di Nyquist "completo" del guadagno d'anello $K\,G(s)$. Calcolare esattamente la posizione σ_a dell'asintoto verticale, le eventuali intersezioni σ_i^* con l'asse reale e i corrispondenti valori delle pulsazioni ω_i^*. Determinare inoltre il margine di ampiezza M_α. Indicare sul diagramma di Nyquist il margine di fase M_ϕ.

Soluzione: Il diagramma di Nyquist della funzione $G(s)$ per $\omega \in [0,\ \infty]$ è mostrato in Fig. 3.

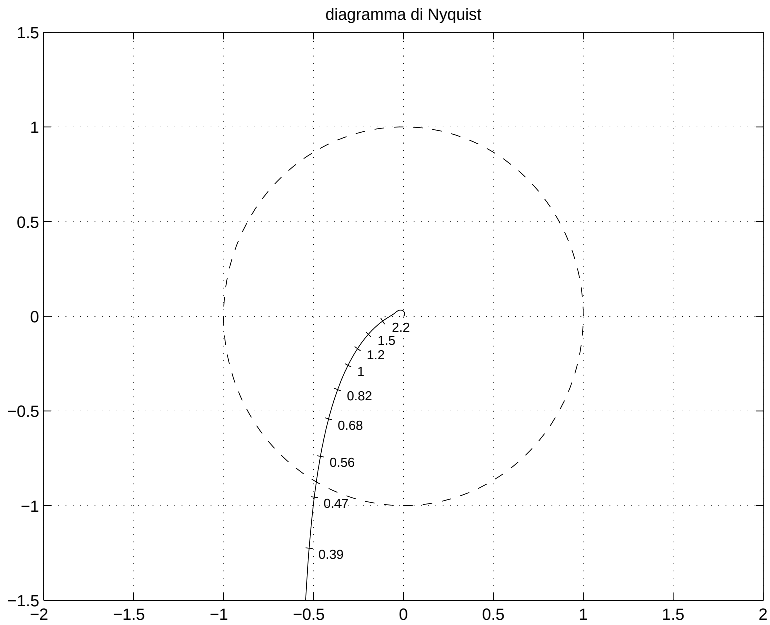


Figura 3: Diagramma di Nyquist della funzione $G(s)$ per $\omega \in [0,\ \infty]$.

Il sistema é di tipo 1 per cui esiste un asintoto verticale in $K_\tau\,\Delta_a = -0.6019$.

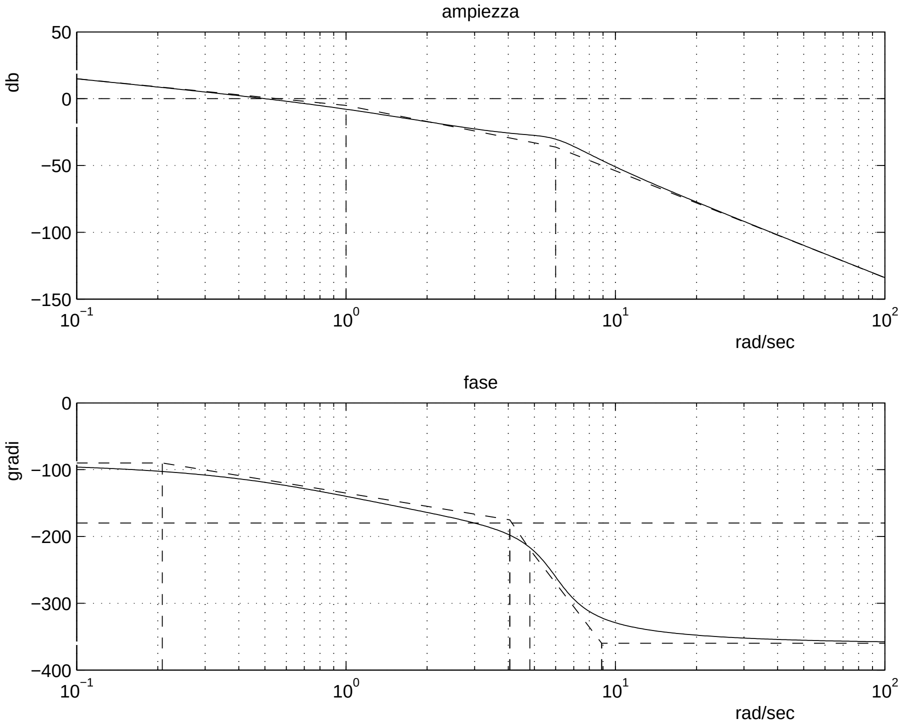
Esiste un'unica intersezione σ^* con l'asse reale. Tale intersezione si determina facilmente dall'analisi di Routh svolta al punto d.1:

$$\sigma^* = -\frac{1}{K^*} = -0.074$$

Il corrispondente valore di ω^* è 3 mentre il margine di ampiezza è $M_a = \frac{1}{|\sigma^*|} = 13.5$ ed il margine di fase è $M_f = 61$.

e) Si faccia riferimento al sistema retroazionato dell'esercizio precedente e si ponga $K = 1$:

e.1) Tracciare qualitativamente i diagrammi di Bode delle ampiezze e della fasi del guadagno di anello $K\,G(s)$;



e.2) Fornire una stima della larghezza di banda del sistema retroazionato;

<u>Soluzione</u>: La banda passante del sistema può essere determinata dal punto di incrocio del diagramma di Bode delle ampiezze con l'asse 0 db. Una stima della banda passante del sistema è quindi $\omega_T = 0.3\,rad/s$.

e.3) Fornire una stima della risposta "a regime" $y_\infty(t)$ del sistema in catena aperta quando in ingresso è presente il segnale $r(t) = 5 + 2\,\cos(0.4\,t + \pi/4)$.

<u>Soluzione</u>: La risposta in catena aperta del sistema si pu facilmente determinare a partire dalla trasformata di Laplace dell'ingresso: $R(s) = \dfrac{5}{s} + 2\left(\dfrac{\cos(\pi/4)s - 0.4\sin(\pi/4)}{s^2+0.4^2}\right)$.

L'uscita del sistema quindi data da $Y(s) = KR(s)G(s)$.

f) **Non è richiesto lo svolgimento di questo esercizio agli iscritti ad Ingegneria Ambientale.**

Con riferimento al sistema descritto nell'esercizio d), tracciare qualitativamente il luogo delle radici del sistema retroazionato per valori positivi del parametro K. Determinare:

1. l'angolo con cui rami entrano o escono dalle radici;
2. la posizione qualitativa dei punti di diramazione;
3. il centro degli asintoti;
4. gli angoli che gli asintoti formano rispetto all'asse reale positivo
5. le intersezioni del luogo delle radici con l'asse immaginario e i corrispondenti valori del parametro K.

<u>Soluzione</u>: vedi figura 4. <u>Soluzione</u>:

$$\sigma = -1$$
$$\phi = 45,\ 135,\ 225,\ 315$$
$$s^* = 3\,i$$
$$K^* = 13.5$$

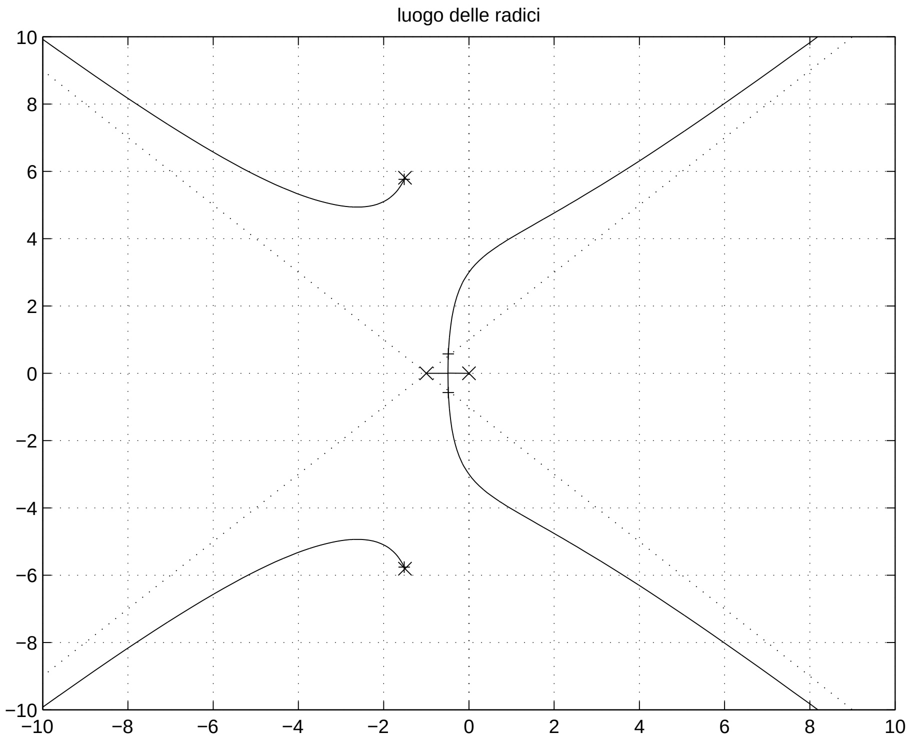


Figura 4: Luogo della radici di $G(s)$.

Fondamenti di Controlli Automatici - A.A. 2009/10

7 Novembre 2011 - Domande Teoriche

Nome:	
Nr. Mat.	
Firma:	

Per ciascuno dei test a soluzione multipla segnare con una crocetta tutte le affermazioni che si ritengono giuste.

1. Il diagramma di Nyquist della funzione $G(s) = \frac{(s+2)(s+8)}{s^2+4\,s}$ per $\omega \in [0, \infty]$:

   ⊗ si evolve tutto nel quarto quadrante;

   ⊗ presenta un asintoto verticale;

   ○ termina nell'origine.

2. Il sistema $G(s) = \frac{(s+z_1)(s+z_2)}{s\,(s+p_1)(s+p_2)}$ con $0 < z_1 < z_2 < p_1 < p_2$ presenta:

   ⊗ con pendenza di $-60\,db/decade$ per $\omega \to \infty$;

   ⊗ con pendenza di $-40\,db/decade$ per $\omega \to 0$;

   ○ con pendenza di $-20\,db/decade$ per $\omega \to \infty$.

3. Dato il diagramma di Bode asintotico delle fasi di $G(j\omega)$, da esso si può dedurre il diagramma asintotico delle ampiezze:

   ○ se nel sistema non sono presenti ritardi.

   ⊗ solo se il sistema $G(s)$ ha tutti i poli e tutti gli zeri a parte reale negativa;

   ○ solo se il sistema $G(s)$ ha tutti i poli a parte reale negativa;

   ○ solo se il diagramma di Bode delle fasi presenta pendenze negative o nulle.

4. Si consideri un'equazione caratteristica nella quale compaiono solamente le potenze pari di s. Utilizzando la tabella di Routh è possibile affermare che l'equazione caratteristica:

   ⊗ ha soluzioni simmetriche rispetto all'origine;

   ⊗ ha lo stesso numero di radici a parte reale strettamente positiva e strettamente negativa;

   ○ ha un polo nell'origine.

5. Il diagramma di Nyquist della funzione di trasferimento $G(s) = -\frac{\tau_z\,s+1}{s(\tau_p\,s+1)}$:

   ○ circonda il punto critico -1 se $\tau_z > \tau_p$;

   ○ circonda il punto critico -1 se $\tau_z < \tau_p$;

   ⊗ circonda sempre il punto critico -1.

6. Affinch un sistema sia asintoticamente stabile, occorre che i coefficienti della prima colonna della tabella di Routh ad esso associata siano tutti:

   ⊗ di segno concorde;

   ○ positivi o nulli;

   ○ a parte reale negativa.

7. Il valore iniziale della risposta all'impulso $g(t)$ del sistema $G(s) = \frac{5\,s+3}{s\,(s+2)}$ vale:

   ○ $g(0^+) = 0$;

   ○ $g(0^+) = 2$;

   ⊗ $g(0^+) = 5$.

8. La funzione complessa $X(s) = \frac{1}{(s+5)^2}$ è la trasformata di Laplace:

⊗ del segnale $x(t) = te^{-5t}$;
○ del segnale $x(t) = te^{-(t-5)}$;
⊗ di un segnale $x(t)$ che tende a zero per $t \to 0$;
○ di un segnale $x(t)$ che tende a $\frac{1}{5}$ per $t \to \infty$.

9. La funzione di risposta armonica permette di determinare:

○ la risposta libera di un sistema;
⊗ l'uscita a regime con segnale di ingresso sinusoidale;
⊗ l'uscita a regime con segnale di ingresso non periodico.

10. Se gli elementi della prima colonna della tabella di Routh di una equazione caratteristica di 4 grado ha due elementi negativi e i rimanenti positivi, ne segue che l'equazione caratteristica:

○ ha solo una radice a parte reale positiva;
⊗ ha almeno una radice a parte reale positiva;
⊗ può avere tutte le radici a parte reale positiva.

11. Un sistema dinamico lineare asintoticamente stabile se i poli della funzione di trasferimento sono:

○ tutti a parte reale negativa tranne uno uguale a zero;
⊗ tutti a parte reale negativa;
○ tutti a parte reale positiva.

12. Data la funzione di risposta armonica $G(j\,\omega)$, il suo margine di fase definito come:

○ $\left.\dfrac{1}{|G(j\omega)|}\right|_{\omega\,:\,\angle G(j\omega)=-\pi}$;
○ $\left.\angle G(j\,\omega)\right|_{\omega\,:\,|G(j\omega)|=0}$;
○ $\left.\pi - \angle G(j\,\omega)\right|_{\omega\,:\,|G(j\omega)|=1}$;
⊗ $\left.\pi + \angle G(j\,\omega)\right|_{\omega\,:\,|G(j\omega)|=1}$.

Non è richiesto lo svolgimento delle seguenti domande agli iscritti ad Ingegneria Ambientale.

13. Gli asintoti del luogo delle radici di un sistema avente 3 poli, 3 zeri e guadagno statico negativo formano, nel caso di guadagno di retroazione $K > 0$, rispetto all'asse reale positivo angoli:

⊗ il sistema non presenta asintoti;
○ di 60, 180 e 300 gradi;
○ di 0, 120 e 240 gradi.

14. In un sistema con grado relativo pari a 3, la somma dei poli del sistema chiuso in retroazione:

○ dipende dal tipo del sistema;
⊗ indipendente dal valore del guadagno statico;
⊗ indipendente dalla posizione degli zeri.