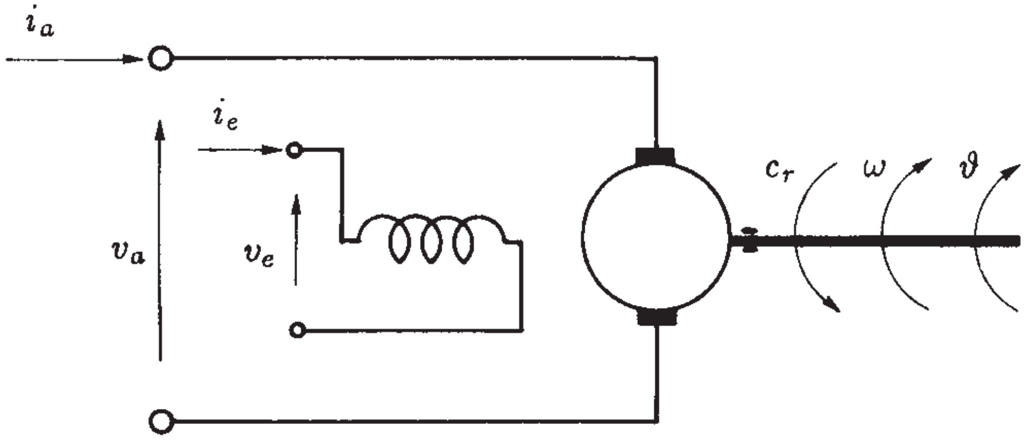
Sistemi e modelli matematici

- L'*automazione* è un complesso di tecniche volte a sostituire l'intervento umano, o a migliorarne l'efficienza, nell'esercizio di dispositivi e impianti.
- Un importante capitolo della scienza dell'automazione o *automatica* è costituito dalla disciplina denominata *controlli automatici*.
- Tale disciplina studia i dispositivi (detti *regolatori*, *controllori* o *dispositivi di controllo*), mediante i quali si fanno variare automaticamente le grandezze liberamente manipolabili di un sistema (detto *sistema controllato*)
- Un *sistema* è un complesso, normalmente costituito di più elementi interconnessi, in cui si possono distinguere grandezze soggette a variare nel tempo (indicate semplicemente con il nome di *variabili*).
- *Segnali*: sono le funzioni che rappresentano l'andamento delle variabili nel tempo.
- *Variabili di ingresso*: sono le *variabili indipendenti* o *cause*.
- *Variabili di uscita*: sono le *variabili dipendenti* o *effetti*.
- *Sistema orientato*: è un sistema in le cui variabili siano state suddivise in variabili di ingresso e variabili di uscita.
- *Variabili manipolabili*: variabili di ingresso il cui andamento nel tempo può essere arbitrariamente imposto.
- *Variabili non manipolabili* o *disturbi*: variabili sul cui andamento nel tempo non si può influire, in quanto casuale o assegnabile ad arbitrio solo da parte di altro operatore.

Esempio: motore in corrente continua

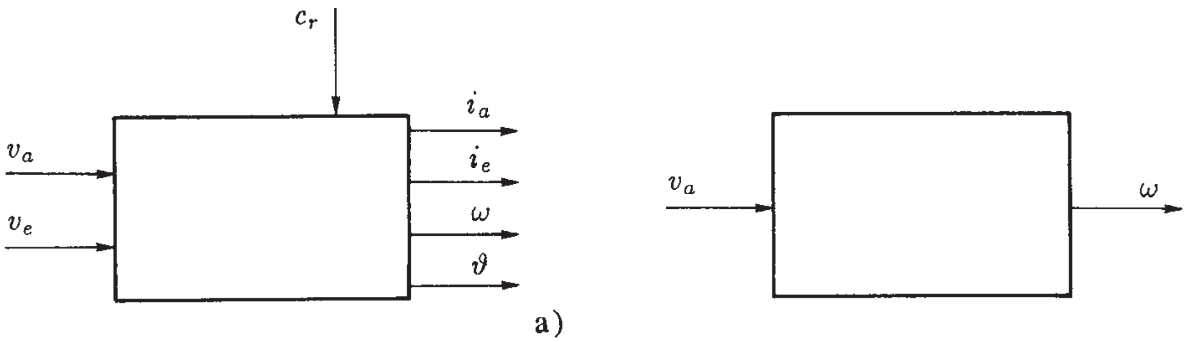
- Il modello semplificato di un motore in corrente continua con eccitazione indipendente è il seguente:



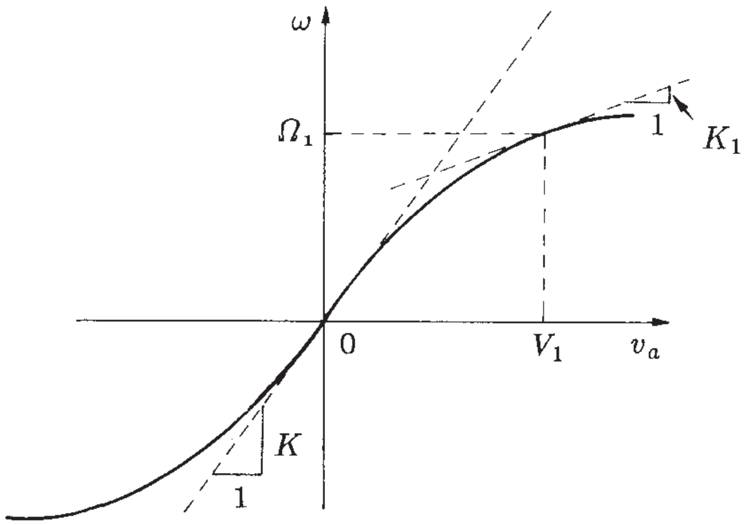
- Variabili di interesse: la tensione e la corrente di armatura v_a e i_a, la tensione e la corrente di campo v_e e i_e, la coppia resistente all'albero c_r, la velocità e la posizione angolare del rotore ω e ϑ.

- Orientamento del sistema:
  - Cause: v_a, v_e e c_r;
  - Effetti: i_a, i_e, ω e ϑ;
  - Variabili manipolabili: v_a e v_e;
  - Variabile non manipolabile: c_r;

- Rappresentazione mediante schemi a blocchi:



- *Modello matematico* di un sistema: è l'insieme di equazioni e di parametri che permettono di determinare gli andamenti nel tempo delle uscite, noti quelli degli ingressi.
- Il modello matematico è sempre un compromesso fra *precisione* e *semplicità*: è inutile infatti ricorrere a modelli sofisticati quando i valori dei parametri che in essi compaiono si conoscono solo approssimativamente.
- *Modello statico* o *puramente algebrico*: descrive il legame fra i valori degli ingressi, supposti costanti, e i valori delle uscite una volta che il sistema abbia raggiunto la *condizione di regime stazionario*, cioè la condizione di funzionamento in cui tutti i segnali siano costanti.
- Caratteristica statica del motore elettrico in corrente continua:



- *Caratteristica statica* ingresso-uscita:

$$\omega = f(v_a)$$

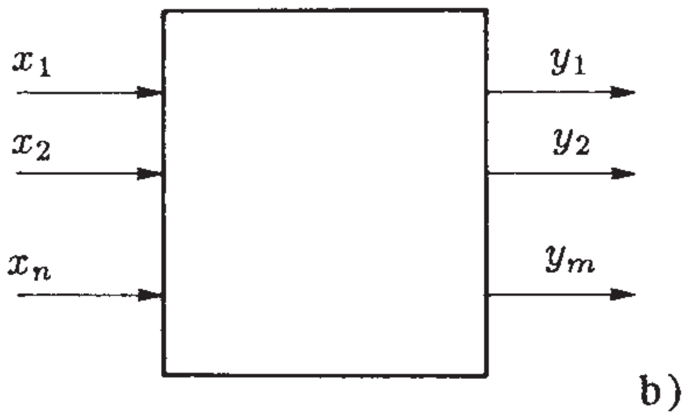
- *Approssimazione lineare* nell'intorno dell'origine: $\omega = K\, v_a$;
- *Linearizzazione* nell'intorno del *punto di lavoro*:

$$\omega - \Omega_1 = K_1 (v_a - V_1)$$

- Modello statico di un sistema MIMO (Multi Input Multi Output): consiste in più funzioni (tante quante sono le uscite) di più variabili (tante quanti sono gli ingressi), cioè

$$y_1 = f_1(x_1, \ldots, x_n), \quad \ldots, \quad y_m = f_m(x_1, \ldots, x_n)$$

- Rappresentazione grafica:



- Punto di lavoro: $(X_1, \ldots, X_n), (Y_1, \ldots, Y_m)$.
- Linearizzazione nell'intorno del punto di lavoro:

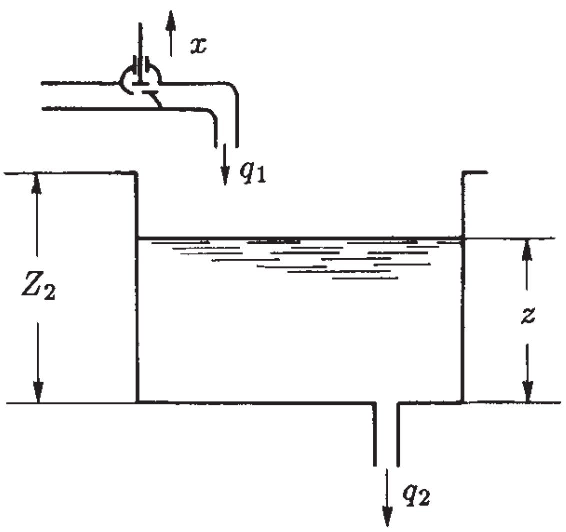
$$\begin{aligned} \Delta y_1 &= a_{11}\,\Delta x_1 + \ldots + a_{1n}\,\Delta x_n \ , \\ &\ldots\ldots \\ \Delta y_m &= a_{m1}\,\Delta x_1 + \ldots + a_{mn}\,\Delta x_n \end{aligned}$$

in cui è

$$\begin{aligned} a_{ij} &:= \left.\frac{\partial f_i}{\partial x_j}\right|_{x_k = X_k \ (k=1,\ldots,n)} \qquad (i = 1, \ldots, m; j = 1, \ldots, n) \\ \Delta y_i &:= y_i - Y_i = y_i - f_i(X_1, \ldots, X_n) \quad (i = 1, \ldots, m) \\ \Delta x_j &:= x_j - X_j \quad (j = 1, \ldots, n) \end{aligned}$$

- I modelli matematici statici non danno alcuna informazione sul *regime transitorio*, cioè sull'andamento nel tempo delle uscite durante il passaggio da uno stato di regime stazionario ad un altro.

- *Modello dinamico*: è costituito da una o più equazioni differenziali esprimenti legami statici fra le variabili di ingresso, di uscita *e le loro derivate rispetto al tempo*.
- Il modello dinamico di un sistema permette di determinare l'andamento del segnale di uscita corrispondente a un dato segnale di ingresso, cioè permette di determinare la *risposta* del sistema a una data *eccitazione*.
- Un modello matematico (o un sistema) si dice *lineare* quando soddisfa la *proprietà di sovrapposizione degli effetti*.
- In caso contrario il sistema si dice *non lineare*.
- Molti sistemi ammettono modelli matematici lineari purché i valori delle variabili non escano da determinati campi. Esempio:



- Modello matematico in forma integrale:

$$z(t) = Z_0 + \frac{1}{A}\int_0^t \big(q_1(\tau) - q_2(\tau)\big)\, d\tau = Z_0 + \frac{1}{A}\int_0^t \big(K\, x(\tau) - q_2(\tau)\big)\, d\tau$$

- Modello matematico in forma differenziale:

$$\frac{dz}{dt} = \frac{1}{A}\big(q_1(t) - q_2(t)\big)\ , \quad z(0) = Z_0$$

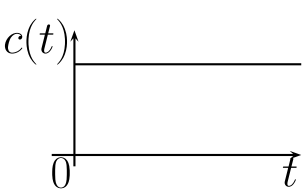
- Tale modello è valido entro i limiti:

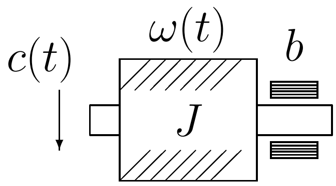
$$X_1 \le x(t) \le X_2\ , \quad Z_1 \le z(t) \le Z_2$$

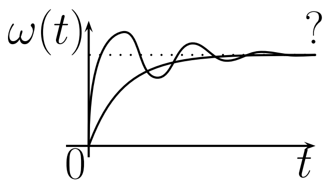
Esempi di modelli fisici

1) Dinamica del rotore di un motore elettrico.

Si consideri un elemento meccanico con inerzia J, coefficiente di attrito lineare b che ruota alla velocità angolare ω al quale venga applicata una coppia esterna $c(t)$.







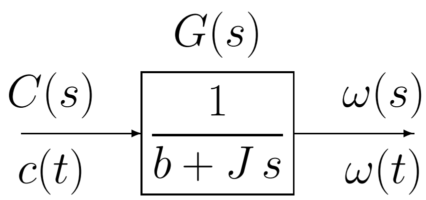
L'equazione differenziale che caratterizza il sistema è quella che si ricava dalla legge di conservazione della quantità di moto angolare:

$$\frac{d[J\omega(t)]}{dt} = c(t) - b\,\omega(t) \qquad \leftrightarrow \qquad J\dot{\omega}(t) + b\,\omega(t) = c(t)$$

Partendo da condizioni iniziali nulle e applicando Laplace si ottiene:

$$J\,s\,\omega(s) + b\,\omega(s) = C(s) \qquad \leftrightarrow \qquad \omega(s) = \frac{1}{b + J\,s}\,C(s)$$

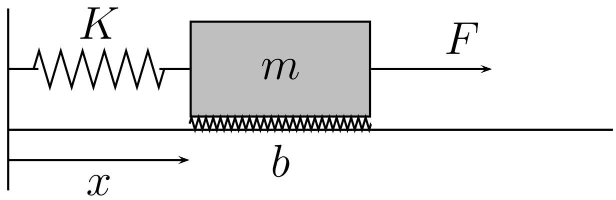
per cui il sistema fisico può essere descritto nel modo seguente:



dove $G(s)$ è la funzione di trasferimento che descrive il sistema fisico:

$$G(s) = \frac{1}{b + J\,s}$$

2) **Sistema massa-molla-smorzatore.**



- Variabili e parametri del sistema fisico:

$x(t)$	:	posizione	m	:	massa
$\dot{x}(t)$	:	velocità	K	:	rigidità della molla
$\ddot{x}(t)$	:	accelerazione	b	:	Coefficiente di attrito lineare
$F(t)$	:	forza applicata	$P(t)$	:	Quantità di moto

- Legge di conservazione della quantità di moto $P(t) = m\,\dot{x}(t)$:

$$\frac{d}{dt}[P(t)] = \sum_i F_i(t) \qquad \rightarrow \qquad m\,\frac{d}{dt}[\dot{x}(t)] = \sum_i F_i(t)$$

- Si ottiene quindi la seguente equazione differenziale:

$$\frac{d}{dt}[m\,\dot{x}(t)] = F - b\,\dot{x}(t) - K\,x(t)$$

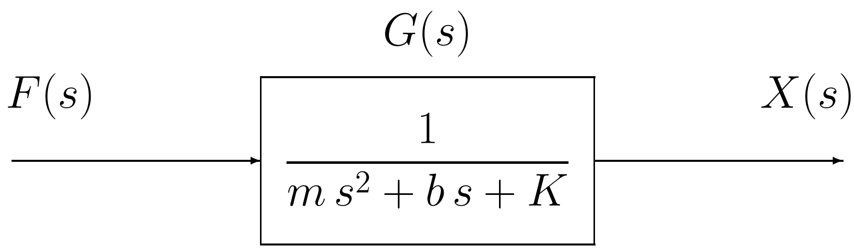
che può essere riscritta nel seguente modo:

$$m\ddot{x}(t) + b\,\dot{x}(t) + K\,x(t) = F(t)$$

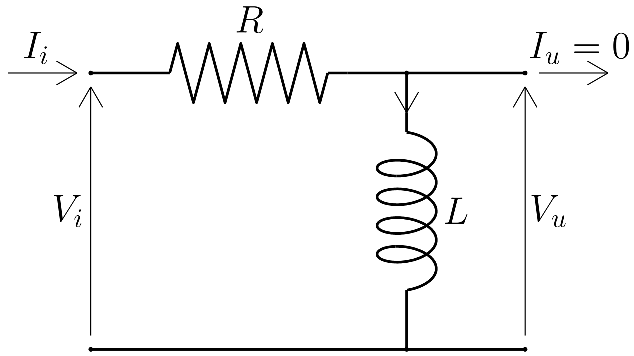
- Utilizzando le trasformate di Laplace ($x(0) = \dot{x}(0) = 0$) si ha:

$$m\,s^2X(s) + b\,s\,X(s) + K\,X(s) = F(s) \qquad \leftrightarrow \qquad X(s) = \frac{F(s)}{m\,s^2 + b\,s + K}$$

Il sistema può quindi essere rappresentato nel modo seguente:



3) Sistema elettrico RL.



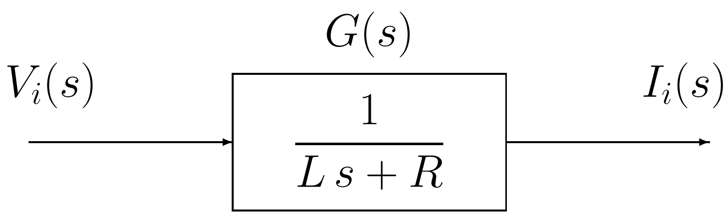
- Legge fisica: la variazione del flusso concatenato $\phi_c(t) = L I_i(t)$ è uguale alla tensione $V_u(t)$ applicata ai capi dell'induttanza.

$$\frac{d}{dt}[\phi_c(t)] = V_u(t) \qquad \rightarrow \qquad L\,\frac{d}{dt}[I_i(t)] = V_i(t) - R\,I_i(t)$$

- Applicando la trasformata di Laplace, con condizioni iniziali nulle, si ha:

$$L\,s\,I_i(s) + R\,I_i(s) = V_i(s) \qquad \leftrightarrow \qquad I_i(s) = \underbrace{\frac{1}{L\,s+R}}_{G(s)}\,V_i(s)$$

- Il sistema può quindi essere rappresentato nel modo seguente:



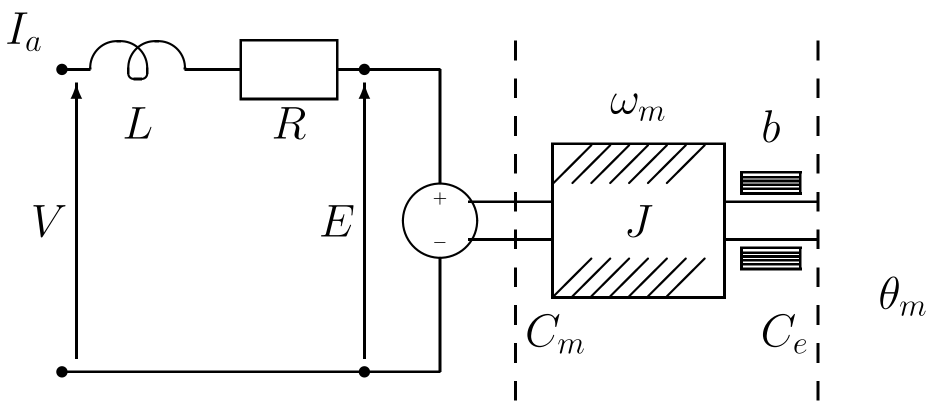
- Il legame tra la tensione di ingresso $V_i(t)$ e la tensione di uscita $V_u(t)$ è descritto dalla seguente funzione di trasferimento (si utilizza la regola del partitore di tensione su impedenze complesse):

$$G_1(s) = \frac{V_u(s)}{V_i(s)} = \frac{L\,s}{L\,s+R}$$

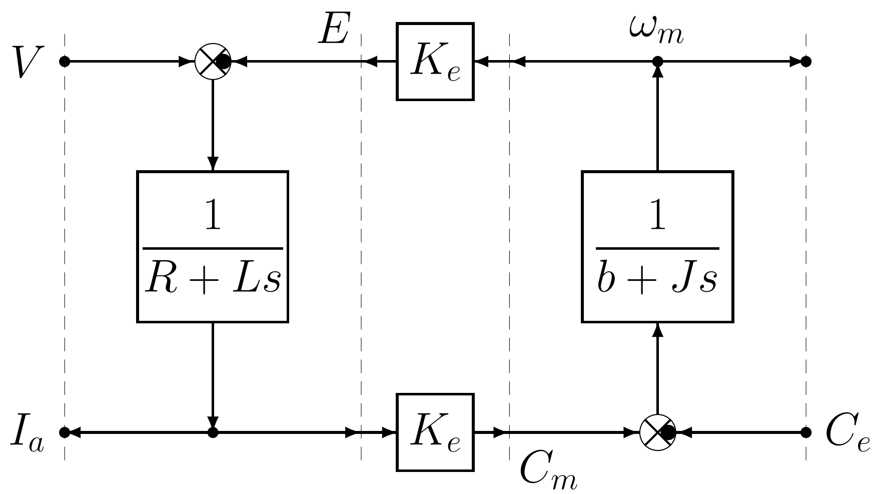
e quindi dalle seguente equazione differenziale:

$$L\,\dot{V}_u(t) + R\,V_u(t) = L\,\dot{V}_i(t)$$

4) Motore elettrico in corrente continua.



- Schema a blocchi POG del motore:



Il sistema è descritto dalle seguenti 2 equazioni differenziali:

$$\begin{cases} L\dot{I}_a = -RI_a - K_e\,\omega_m + V \\ J\dot{\omega}_m = K_e I_a - b\,\omega_m - C_e \end{cases}$$

- Per il principio di conservazione dell'energia, la costante K_e è sia la costante di proporzionalità che lega la corrente di armatura I_a alla coppia motrice C_m, sia la costante di proporzionalità che lega la forza contromotrice E alla velocità angolare ω_m:

$$C_m = K_e I_a \qquad\qquad E = K_e \omega_m$$

- Riducendo "in forma minima" il sistema (vedi "Formula di Mason") si ottiene il seguente legame tra la variabile di uscita $\omega_m(t)$ e le variabili di ingresso $V(t)$ e $C_e(t)$:

$$\omega_m(s) = G_1(s)V(s) + G_2(s)C_e(s)$$

dove $G_1(s)$ lega l'ingresso di controllo $V(t)$ all'uscita $\omega_m(t)$

$$G_1(s) = \frac{K_e}{(R + L\,s)(b + J\,s) + K_e^2}$$

mentre $G_2(s)$ lega l'ingresso di disturbo $C_e(t)$ all'uscita $\omega_m(t)$:

$$G_2(s) = \frac{-(R + L\,s)}{(R + L\,s)(b + J\,s) + K_e^2}$$

- La precedente relazione può essere riscritta come

$$\left[L\,J\,s^2 + (R\,J + L\,b)s + R\,b + K_e^2\right]\omega_m(s) = K_eV(s) - (R + L\,s)C_e(s)$$

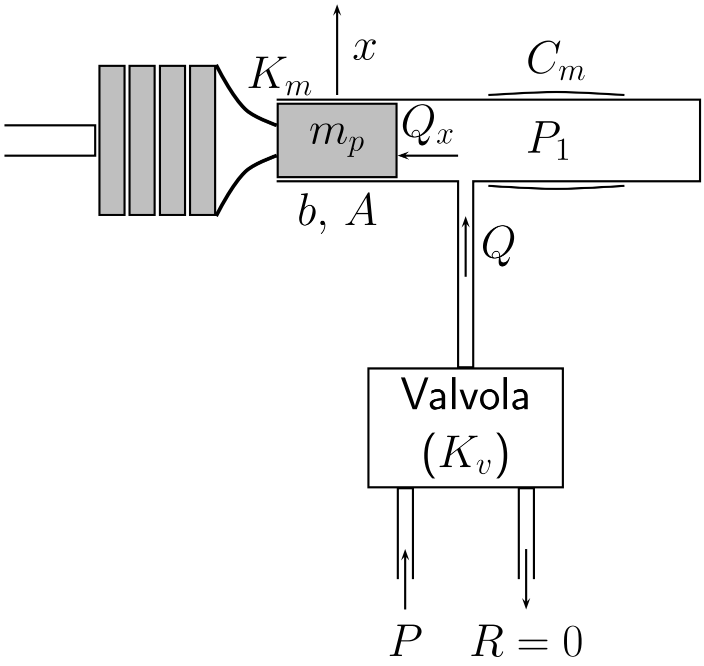
che corrisponde alla seguente equazione differenziale del secondo ordine:

$$L\,J\,\ddot{\omega}_m + (R\,J + L\,b)\dot{\omega}_m + (R\,b + K_e^2)\omega_m = K_eV - R\,C_e - L\,\dot{C}_e$$

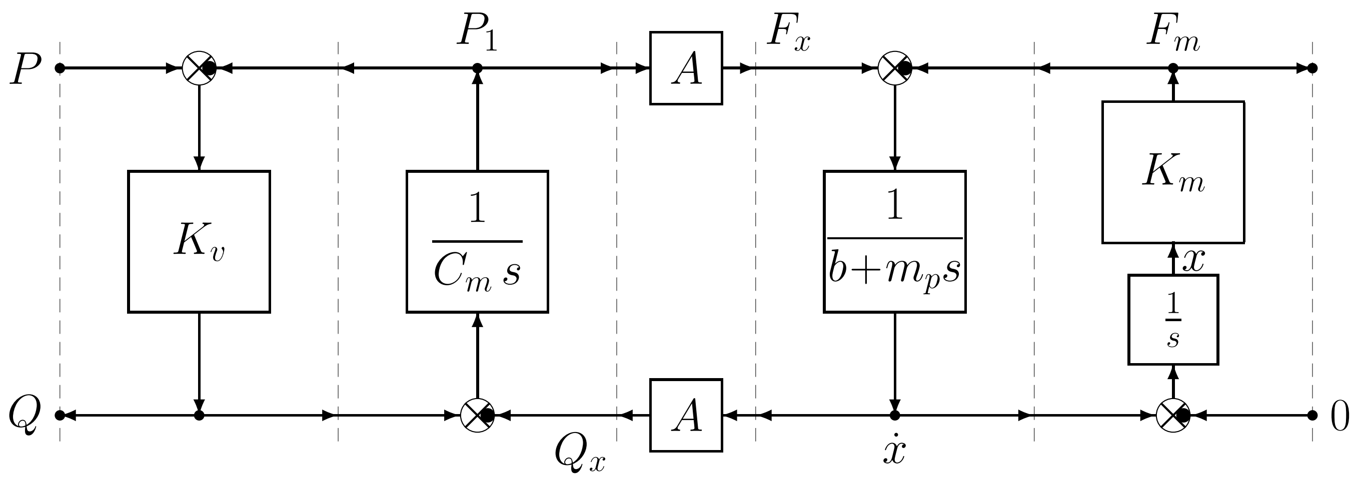
5) Frizione idraulica.

Si consideri il seguente modello idraulico semplificato di una frizione:

P	Pressione di alimentazione
Q	Portata volumetrica nella valvola
K_v	Costante di prop. della valvola
C_m	Capacità idraulica del cilindro
P_1	Pressione all'interno del cilindro
A	Sezione del pistone
x	Posizione del pistone
$\dot{x}$	Velocità del pistone
m_p	Massa del pistone
b	Attrito lineare del pistone
K_m	Rigidità della molla
F_m	Forza della molla sul pistone



• Uno schema a blocchi che descrive la dinamica del sistema è il seguente:



• Riducendo il sistema in forma minima si ottiene la seguente f.d.t. $G(s)$:

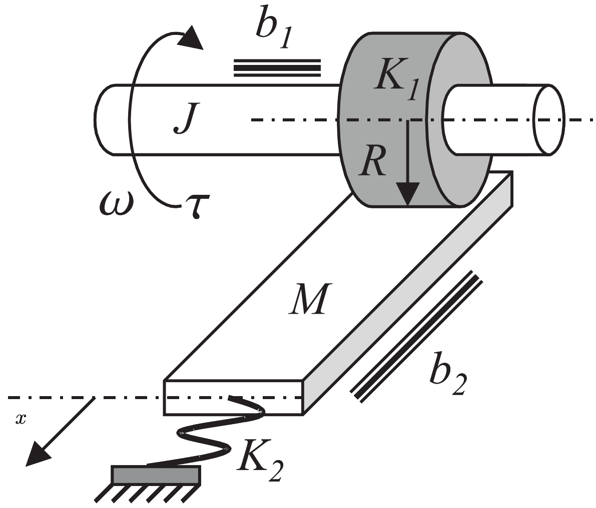
$$G(s) = \frac{F_m(s)}{P(s)} = \frac{AK_mK_v}{C_m m_p s^3 + (C_m\,b + K_v m_p)s^2 + (A^2 + C_m K_m + K_v\,b)s + K_m K_v}$$

a cui corrisponde la seguente equazione differenziale del terzo ordine:

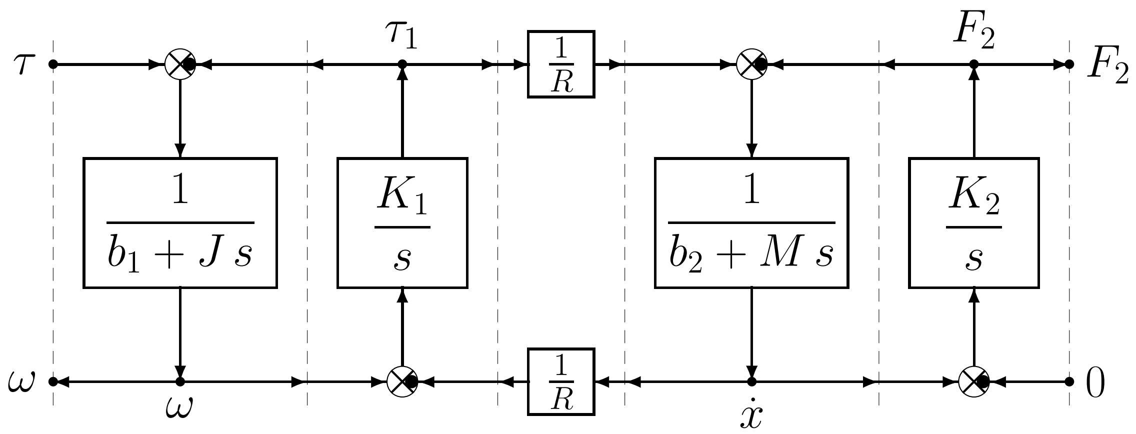
$$C_m m_p \dddot{F}_m + (C_m\,b + K_v m_p)\ddot{F}_m + (A^2 + C_m K_m + K_v\,b)\dot{F}_m + K_m K_v F_m = AK_mK_vP(t)$$

6) Sistema meccanico di trasmissione.

Si consideri il sistema meccanico mostrato in figura, costituito da un albero di inerzia J, che ruota a velocità ω, a cui è applicata la coppia esterna τ. Tramite un rullo elastico avente rigidità torsionale K_1 e raggio costante R, l'albero spinge una massa M che comprime una molla lineare con coefficiente di rigidità K_2.



Un possibile schema a blocchi che descrive la dinamica del sistema è il seguente:



La funzione di trasferimento $G(s)$ che lega l'ingresso τ all'uscita F_2 si calcola facilmente utilizzando la formula di Mason :

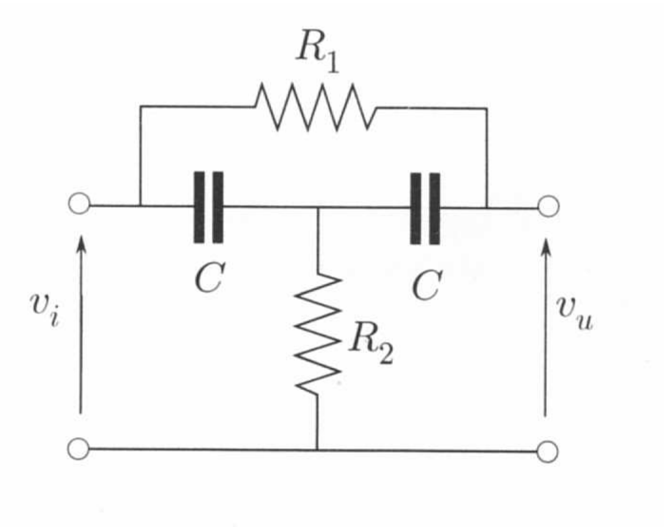
$$G(s) = \frac{K_1 K_2 R}{a_4\, s^4 + a_3\, s^3 + a_2 s^2 + a_1 s + a_0}$$

dove:

$$\begin{aligned}
a_4 &= J\, M\, R^2 \\
a_3 &= (b_2 J + b_1 M) R^2 \\
a_2 &= J\, K_1 + b_1\, b_2\, R^2 + J\, K_2\, R^2 + K_1\, M\, R^2 \\
a_1 &= b_1\, K_1 + b_2\, K_1\, R^2 + b_1\, K_2\, R^2 \\
a_0 &= K_1\, K_2\, R^2
\end{aligned}$$

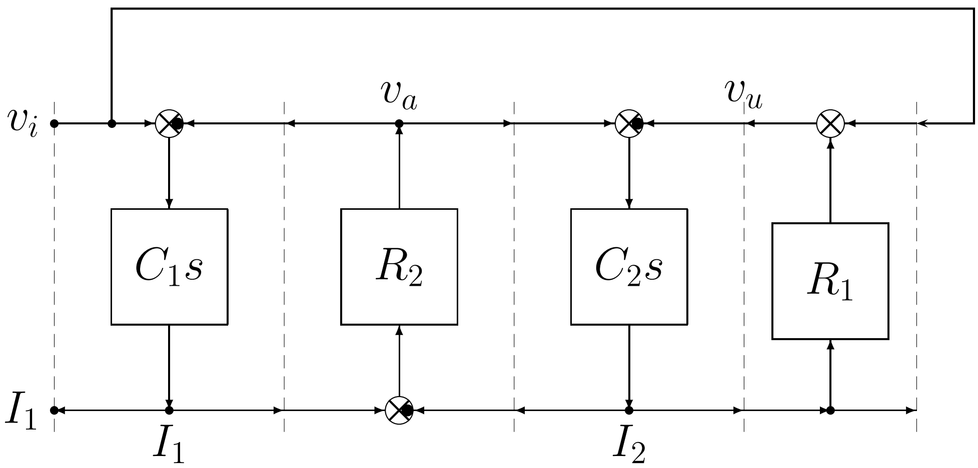
Rete elettrica a T

Sia data la seguente rete elettrica a T:



Supponendo che la corrente I_u assorbita in uscita sia nulla, $I_u = 0$, si determini la funzione di trasferimento $G(s)$ che lega la tensione di ingresso $V_i(s)$ alla tensione di uscita $V_u(s)$.

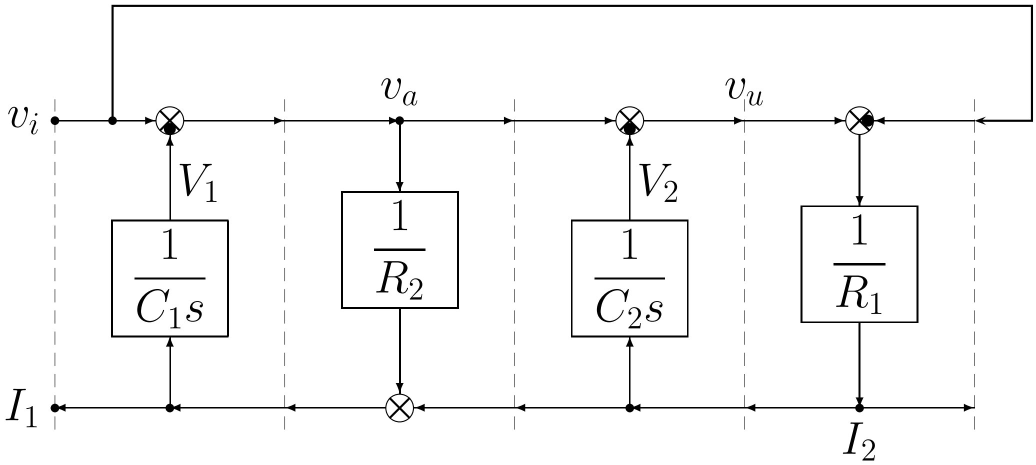
Un possibile schema a blocchi (non utilizzabile in simulazione) che descrive la dinamica del sistema è il seguente:



La funzione di trasferimento di determina facilmente utilizzando Mason:

$$G(s) = \frac{V_u(s)}{V_i(s)} = \frac{1 + R_2(C_1 + C_2)s + C_1 C_2 R_1 R_2 s^2}{1 + C_1 R_2 s + C_2 R_2 s + C_2 R_1 s + C_1 C_2 R_1 R_2 s^2}$$

Invertendo due dei tre anelli del sistema si ottiene uno schema a blocchi utilizzabile anche in simulazione:



Una corrispondente descrizione nello spazio degli stati è la seguente:

$$\begin{bmatrix} \dot V_1 \\ \dot V_2 \end{bmatrix} = \overbrace{\begin{bmatrix} -\frac{1}{R_1C_1} - \frac{1}{R_2C_1} & -\frac{1}{R_1C_1} \\ -\frac{1}{R_1C_2} & -\frac{1}{R_1C_2} \end{bmatrix}}^{\mathbf{A}} \begin{bmatrix} V_1 \\ V_2 \end{bmatrix} + \overbrace{\begin{bmatrix} \frac{1}{R_2C_1} \\ 0 \end{bmatrix}}^{\mathbf{B}} v_i$$

$$v_u = \underbrace{\begin{bmatrix} -1 & -1 \end{bmatrix}}_{\mathbf{C}} \begin{bmatrix} V_1 \\ V_2 \end{bmatrix} + \underbrace{\begin{bmatrix} 1 \end{bmatrix}}_{\mathbf{D}} v_i$$

Il determinante del grafo Δ è proporzionale al determinante della matrice $(s\mathbf{I}-\mathbf{A})$:

$$\det(s\mathbf{I}-\mathbf{A}) = \frac{1 + C_1R_2s + C_2R_2s + C_2R_1s + C_1C_2R_1R_2s^2}{C_1C_2R_1R_2}$$

Si noti che la funzione di trasferimento $G(s)$ può essere calcolata anche utilizzando la seguente formula:

$$G(s) = \mathbf{C}(s\mathbf{I}-\mathbf{A})^{-1}\mathbf{B} + \mathbf{D}$$