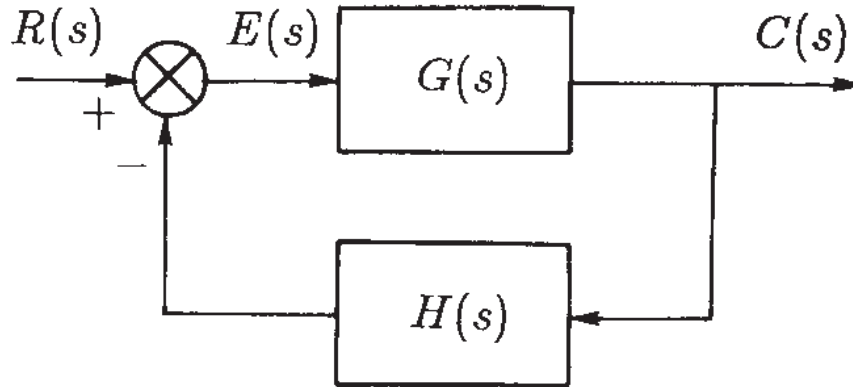


## Luogo delle radici

- Si consideri il seguente schema in retroazione:



- La funzione di trasferimento  $G_0(s)$  del sistema retroazionato è:

$$G_0(s) = \frac{G(s) H(s)}{1 + G(s) H(s)}$$

I poli del sistema retroazionato coincidono le radici dell'equazione caratteristica del sistema in retroazione:

$$1 + G(s) H(s) = 0$$

- Si supponga ora che il prodotto  $G(s) H(s)$  sia una funzione razionale fratta posta nella forma

$$G(s) H(s) = K_1 \frac{(s - z_1)(s - z_2) \dots (s - z_m)}{(s - p_1)(s - p_2) \dots (s - p_n)}, \quad n \geq m$$

e che la costante di guadagno  $K_1$  sia positiva.

- Al variare del parametro  $K_1$  da 0 a  $\infty$ , le radici dell'equazione caratteristica (e quindi i poli del sistema retroazionato) descrivono una curva nel piano  $s$ , cui si dà il nome di *luogo delle radici*.
- Il luogo delle radici risulta di grande utilità per giudicare l'effetto di variazioni della costante di guadagno sulla stabilità e sulla risposta del sistema in retroazione.

- Il metodo si può modificare facilmente per ottenere le variazioni delle radici dell'equazione caratteristica in funzione di parametri diversi dalla costante di guadagno di anello, come ad esempio poli o zeri del sistema ad anello aperto: in tali versioni modificate il metodo viene indicato con il nome di *contorno delle radici*.

- Posto

$$G_1(s) := \frac{(s - z_1)(s - z_2) \dots (s - z_m)}{(s - p_1)(s - p_2) \dots (s - p_n)}$$

l'equazione caratteristica del sistema può essere riscritta come

$$1 + K_1 G_1(s) = 0$$

- Se la costante  $K_1$  è positiva, si ha che

$$|G_1(s)| = \frac{1}{K_1}, \quad \arg G_1(s) = (2\nu + 1)\pi \quad (\nu \text{ intero})$$

- Se  $K_1$  è negativa, si ha

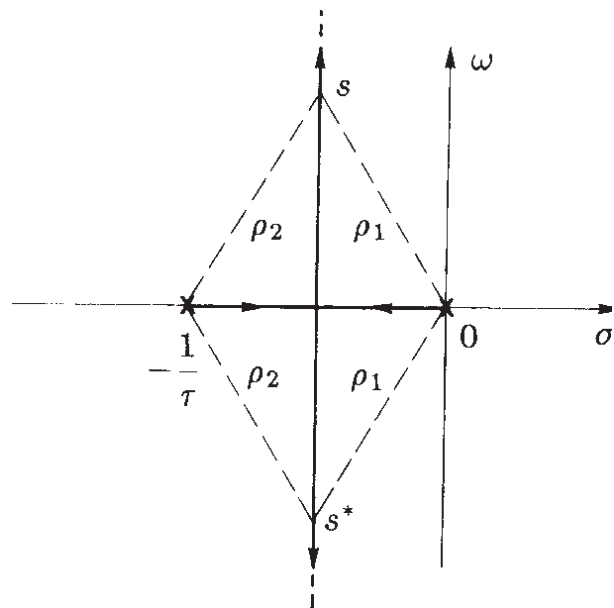
$$|G_1(s)| = -\frac{1}{K_1}, \quad \arg G_1(s) = 2\nu\pi \quad (\nu \text{ intero})$$

- L'equazione relativa agli argomenti è sufficiente per la costruzione del luogo, mentre l'equazione relativa ai moduli serve per la graduazione del luogo stesso in funzione di  $K_1$ .

- Esempio. Dato il sistema

$$G(s)H(s) = \frac{K_1}{s \left( s + \frac{1}{\tau} \right)}$$

al variare di  $K_1$  da 0 a  $\infty$  si ottiene l'andamento riportato a fianco.



## Proprietà del luogo delle radici

Il luogo delle radici presenta alcune proprietà che ne vincolano l'andamento e ne agevolano la costruzione.

- **Proprietà 1.** Il luogo delle radici ha tanti rami quanti sono i poli della funzione di trasferimento ad anello aperto  $K_1 G_1(s)$ , che si intersecano sulle radici multiple. Ogni ramo parte da un polo di  $G_1(s)$  e termina in uno zero di  $G_1(s)$  o in un punto all'infinito.
- **Proprietà 2.** Il luogo delle radici è simmetrico rispetto all'asse reale.
- **Proprietà 3.** Se la costante  $K_1$  è positiva, un punto dell'asse reale fa parte del luogo delle radici se si lascia alla sua destra un numero totale dispari di zeri e poli. Se la costante  $K_1$  è negativa, un punto dell'asse reale fa parte del luogo delle radici se si lascia alla sua destra un numero totale pari di zeri e poli.
- **Proprietà 4.** Se la costante  $K_1$  è positiva, l'angolo secondo il quale il luogo delle radici lascia un polo  $p_i$  è

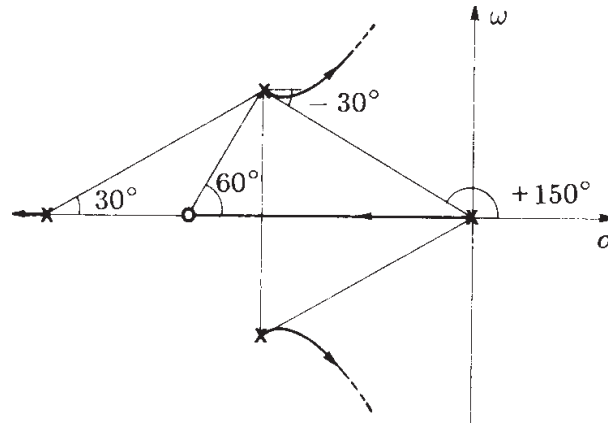
$$(2\nu + 1)\pi + \sum_{j=1}^m \arg(p_i - z_j) - \sum_{j \in \mathcal{J}'} \arg(p_i - p_j),$$

in cui è  $\mathcal{J}' := \{1, 2, \dots, i-1, i+1, \dots, n\}$ . L'angolo secondo il quale il luogo tende a uno zero  $z_i$  è

$$(2\nu + 1)\pi - \sum_{j \in \mathcal{J}''} \arg(z_i - z_j) + \sum_{j=1}^n \arg(z_i - p_j),$$

in cui è  $\mathcal{J}'' := \{1, 2, \dots, i-1, i+1, \dots, m\}$ . Se la costante  $K_1$  è negativa, nell'enunciato si sostituisce  $2\nu\pi$  a  $(2\nu+1)\pi$ .

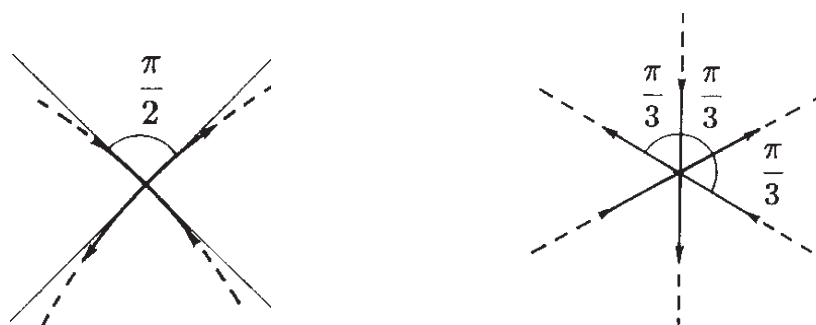
- Esempio:



- **Proprietà 5.** Una radice multipla di ordine  $h$  corrisponde a un punto comune ad  $h$  rami del luogo delle radici, in cui, oltre alla  $1 + K_1 G_1(s) = 0$ , sono soddisfatte le relazioni che esprimono l'annullarsi delle derivate della funzione di guadagno di anello fino alla  $(h-1)$ -esima.

$$\frac{d}{ds} G_1(s) = 0, \dots, \frac{d^{h-1}}{ds^{h-1}} G_1(s) = 0$$

- I due rami che convergono in un punto corrispondente ad una radice doppia, vi convergono da direzioni opposte; nel punto si originano altri due rami, che ne divergono secondo direzioni opposte, disposte a  $90^\circ$  rispetto alle direzioni di arrivo dei primi.



- **Proprietà 6.** In corrispondenza di una radice di ordine  $h$  il luogo presenta  $h$  rami entranti e  $h$  rami uscenti, alternati fra di loro, le cui tangenti dividono lo spazio circostante in settori uguali, di  $\pi/h$  radianti.

- **Proprietà 7.** Il numero degli asintoti del luogo delle radici è pari al grado relativo:  $r = n - m$ . Gli asintoti formano una stella di raggi con centro nel punto dell'asse reale di ascissa:

$$\sigma_a = \frac{1}{n - m} \left( \sum_{i=1}^n p_i - \sum_{i=1}^m z_i \right)$$

Se la costante  $K_1$  è positiva, gli asintoti formano con l'asse reale gli angoli

$$\vartheta_{a,\nu} = \frac{(2\nu + 1)\pi}{n - m} \quad (\nu = 0, 1, \dots, n - m - 1)$$

Se la costante  $K_1$  è negativa, gli asintoti formano con l'asse reale gli angoli

$$\vartheta_{a,\nu} = \frac{2\nu\pi}{n - m} \quad (\nu = 0, 1, \dots, n - m - 1)$$

- La proprietà 7 comporta un'interessante conseguenza: gli asintoti di un sistema in retroazione negativa avente funzione di trasferimento di anello stabile, a fase minima (cioè con tutti i poli e gli zeri nel semipiano sinistro del piano complesso) e con grado relativo  $r = n - m \geq 3$  intersecano l'asse immaginario in punti diversi dall'origine, il che spiega il fatto che i poli dominanti, cioè quelli che per primi, all'aumentare del guadagno, tendono a passare nel semipiano destro, sono di regola complessi coniugati.
- Per il tracciamento del luogo delle radici, specie per ciò che riguarda i rami corrispondenti ai poli dominanti, è utile la conoscenza dei punti di intersezione del luogo con l'asse immaginario e dei relativi valori del parametro  $K_1$ . Poiché tali punti corrispondono al limite di stabilità del sistema in retroazione, per la loro determinazione si può impiegare il criterio di Routh, che fornisce il valore di  $K_1$  corrispondente al limite di stabilità: risolvendo l'equazione ausiliaria, si ottengono poi i valori della pulsazione in corrispondenza dei quali avviene l'intersezione con l'asse immaginario.

**Esempio.** Si consideri la funzione di trasferimento di anello

$$G(s)H(s) = \frac{K_1}{s(s+1)(s+2)}.$$

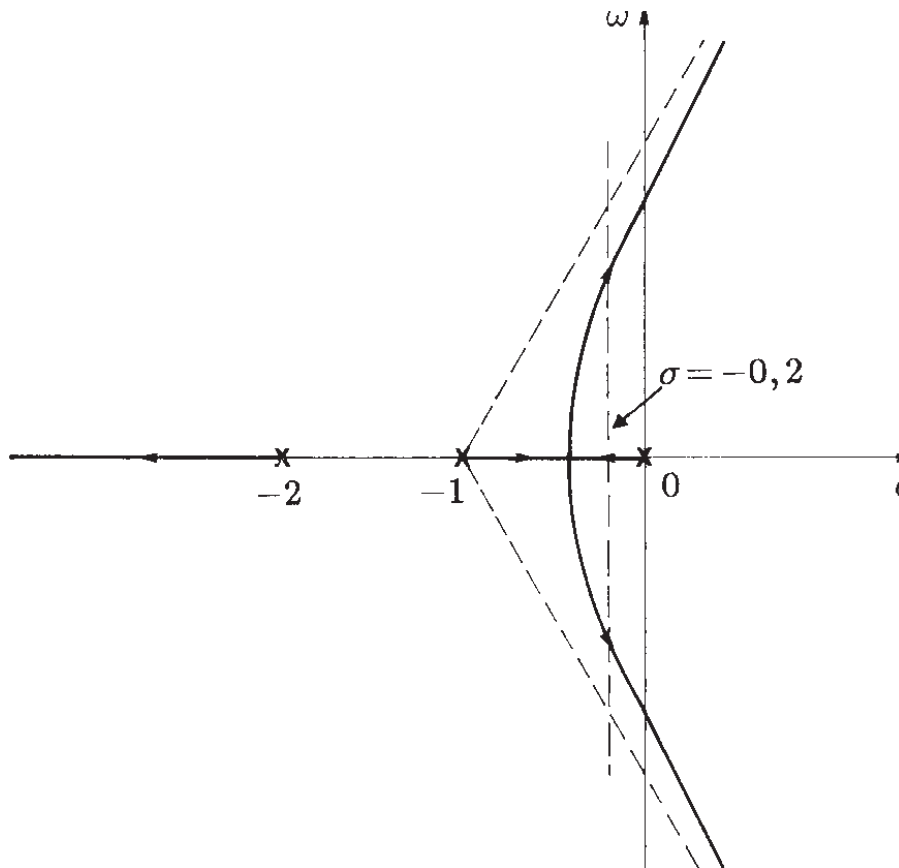
Essendo  $n-m=3$ , il luogo delle radici presenta tre asintoti che si incontrano nel punto:

$$\sigma_a = \frac{0 - 1 - 2}{3} = -1$$

e formano con l'asse reale gli angoli:

$$\vartheta_{a0} = 60^\circ, \quad \vartheta_{a1} = 180^\circ, \quad \vartheta_{a2} = -60^\circ$$

L'andamento del luogo delle radici è il seguente:



Nota: all'aumentare di  $K$  il sistema retroazionato diventa instabile.

Il punto di diramazione sull'asse reale si ottiene risolvendo l'equazione ottenuta derivando l'equazione caratteristica.

$$\frac{d}{ds}[1 + G(s)H(s)] = 0 \quad \rightarrow \quad 3s^2 + 6s + 2 = 0.$$

Essa ammette due radici reali, una delle quali non appartiene al luogo. L'altra, che costituisce il punto di diramazione cercato, è  $s_0 = -0.422$ .

L'equazione caratteristica è

$$s(s+1)(s+2) + K_1 = 0,$$

cioè

$$s^3 + 3s^2 + 2s + K_1 = 0$$

La tabella di Routh ad essa relativa è

$$\begin{array}{c|cc} 3 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & K_1 \\ 1 & (6 - K_1)/3 & 0 \\ 0 & K_1 & \end{array}$$

Il limite di stabilità è dato da  $K_1 = 6$ . Sostituendo nella tabella tale valore, si ottiene l'equazione ausiliaria

$$3s^2 + 6 = 0,$$

che ammette le radici  $s_{1,2} = \pm j\sqrt{2} = \pm j1.41$ . Queste corrispondono alle intersezioni del luogo con l'asse immaginario.

Il procedimento indicato può servire anche per trovare le intersezioni del luogo delle radici con una retta verticale  $\sigma = \lambda$  diversa dall'asse immaginario.

Per ottenere queste intersezioni basta utilizzare il cambiamento di variabile  $z := s - \lambda$ , cioè operare la sostituzione  $s = z + \lambda$  nell'equazione caratteristica e applicare il criterio di Routh all'equazione in  $z$  così ottenuta.

Ad esempio, per calcolare l'intersezione del luogo delle radici con la retta verticale  $\sigma = -0.2$ , nell'equazione caratteristica del sistema si opera la sostituzione  $s = z - 0.2$  ottenendo:

$$z^3 + 2.4z^2 + 0.92z - 0.288 + K_1 = 0$$

La corrispondente tabella di Routh è:

$$\begin{array}{c|cc} 3 & 1 & 0.92 \\ 2 & 2.4 & -0.288 + K_1 \\ 1 & 2.208 - (K_1 - 0.288) & \\ 0 & -0.288 + K_1 & \end{array}$$

Le intersezioni con l'asse verticale  $\sigma = -0.2$  avvengono per:

$$K_{1a} = 0.288 \quad \text{e} \quad K_{1b} = 2.496$$

a cui corrispondono i seguenti poli:

$$p_a = -0.2 \quad \text{e} \quad p_{b1,2} = -0.2 \pm j\sqrt{\frac{2.208}{2.4}} = -0.2 \pm j0.96$$

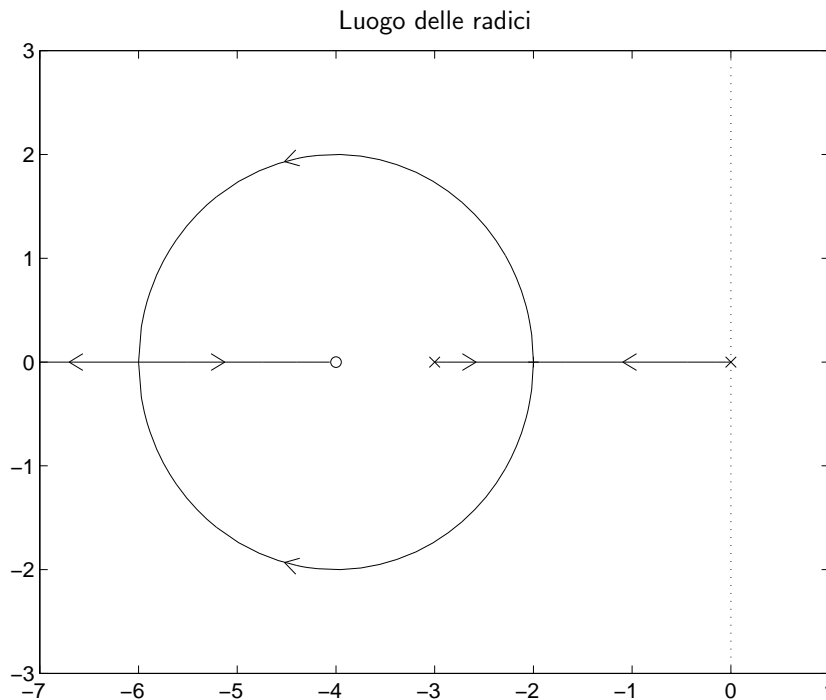
**Esempio.** Disegnare qualitativamente il luogo delle radici del seguente sistema retroazionato al variare del parametro  $K > 0$ .

$$G(s) = \frac{K(s+4)}{s(s+3)}$$

L'equazione caratteristica del sistema retroazionato è

$$1 + \frac{K(s+4)}{s(s+3)} = 0$$

Il luogo delle radici del sistema retroazionato al variare del parametro  $K > 0$  è il seguente:



I punti di diramazione sull'asse reale si determinano come segue:

$$\frac{d}{ds} \left[ \frac{K(s+4)}{s(s+3)} \right] = 0 \quad \rightarrow \quad s(s+3) - (s+4)(2s+3) = 0 \quad \rightarrow \quad s^2 + 8s + 12 = 0$$

I punti di diramazione sono posizionati in  $\sigma_1 = -2$  e in  $\sigma_2 = -6$ . I corrispondenti valori di  $K$  si ricavano nel modo seguente:

$$K_1 = - \frac{1}{G(s)} \Big|_{s=\sigma_1} = 1, \quad K_2 = - \frac{1}{G(s)} \Big|_{s=\sigma_2} = 9$$

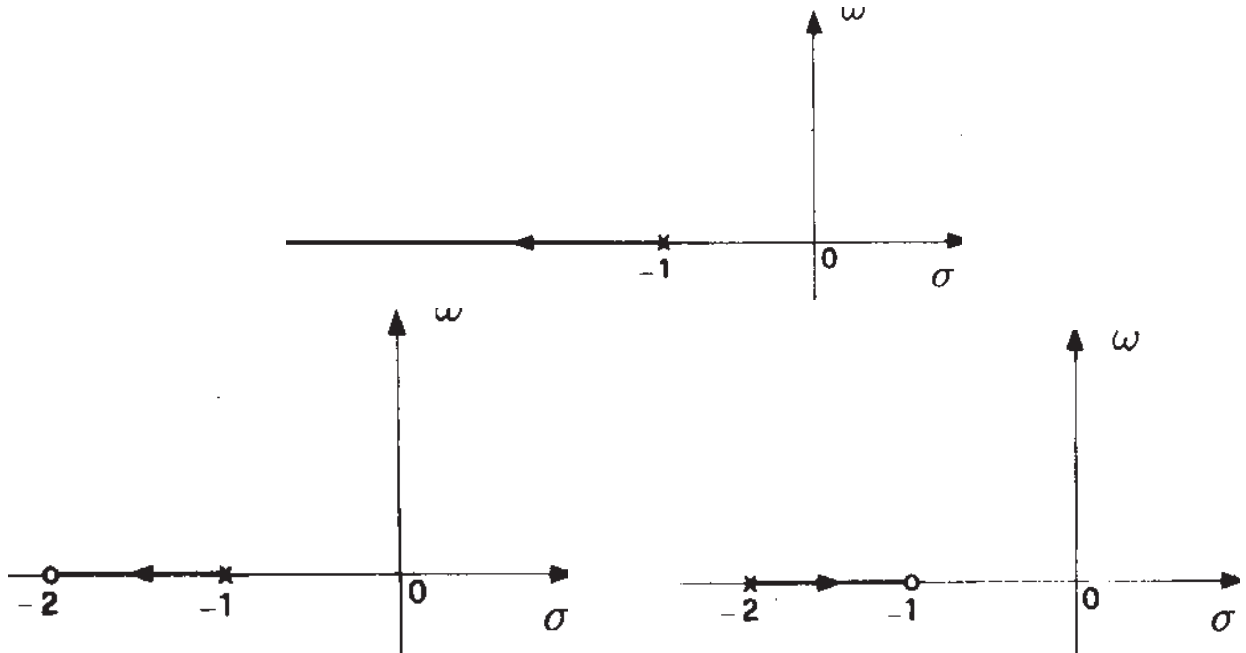
**Nota.** I due rami del luogo delle radici di un sistema avente solo due poli e uno zero, se escono dall'asse reale si spostano sempre lungo un tratto di circonferenza che ha centro nello zero e raggio  $R = \sqrt{d_1 d_2}$ , dove  $d_1$  e  $d_2$  sono la distanza dello zero dai 2 poli. Nel caso in esame si ha:

$$R = \sqrt{(4-1)(4-3)} = 2$$

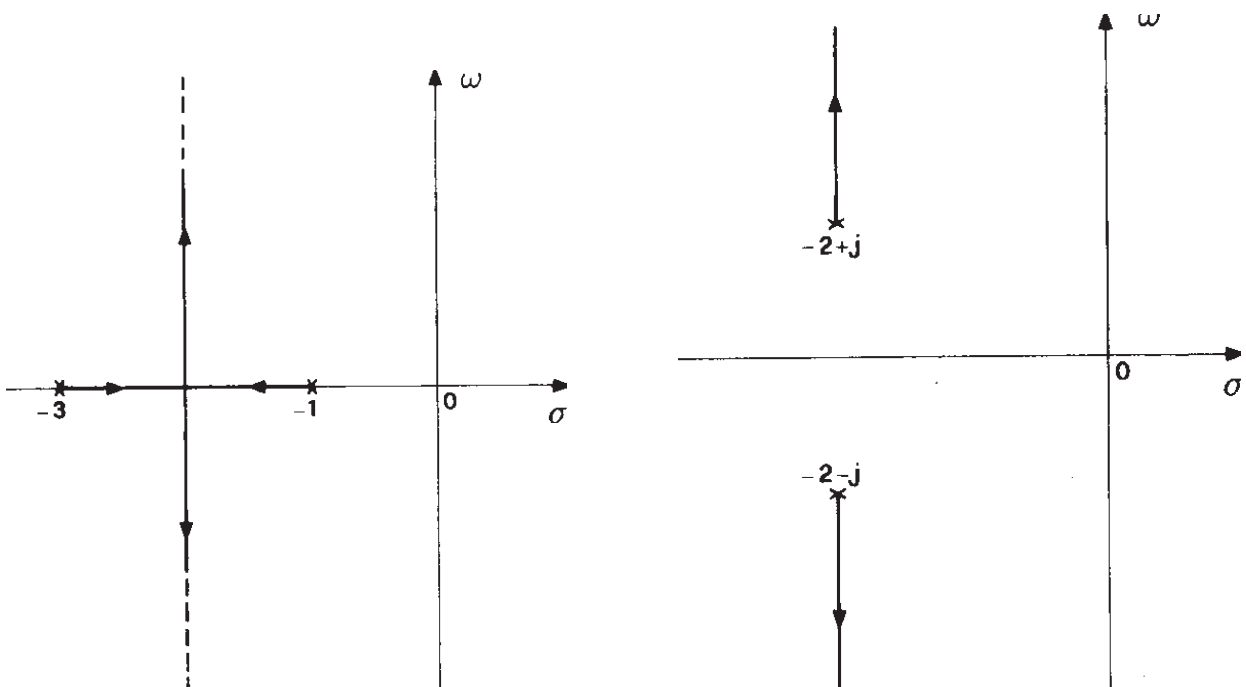
In questo caso, i punti di diramazione potevano anche essere calcolati utilizzando questa proprietà:  $\sigma_1 = -4 + 2 = -2$ ,  $\sigma_2 = -4 - 2 = -6$ .

## Alcuni esempi di luoghi delle radici

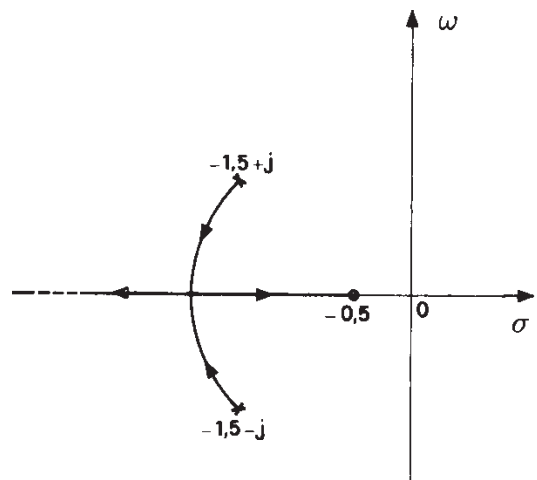
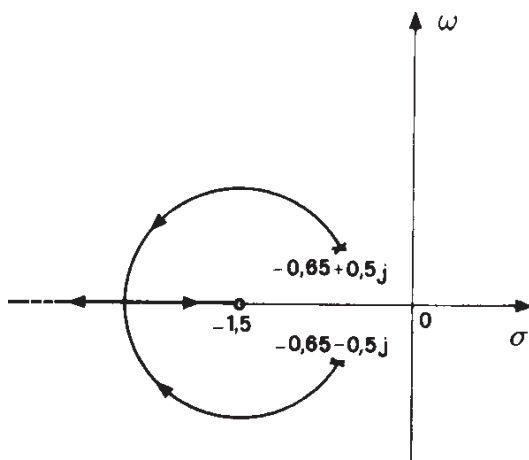
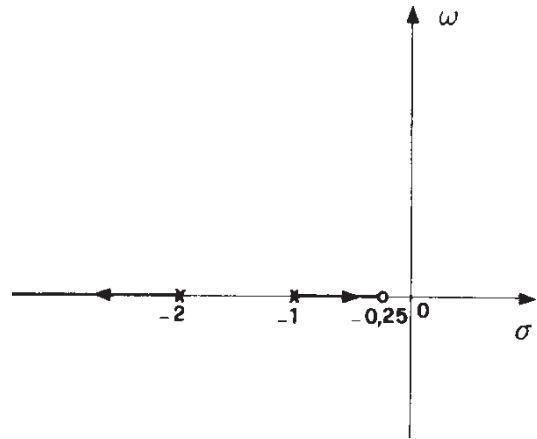
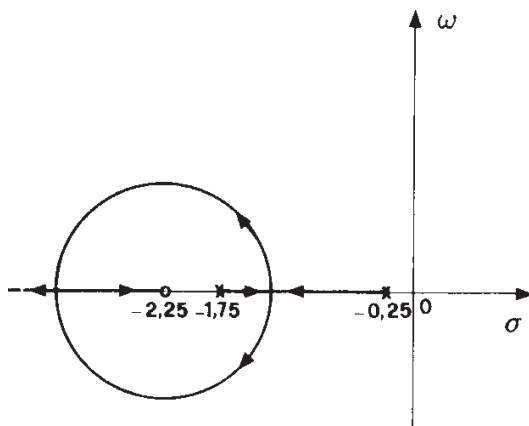
- Luogo delle radici di sistemi del primo ordine:



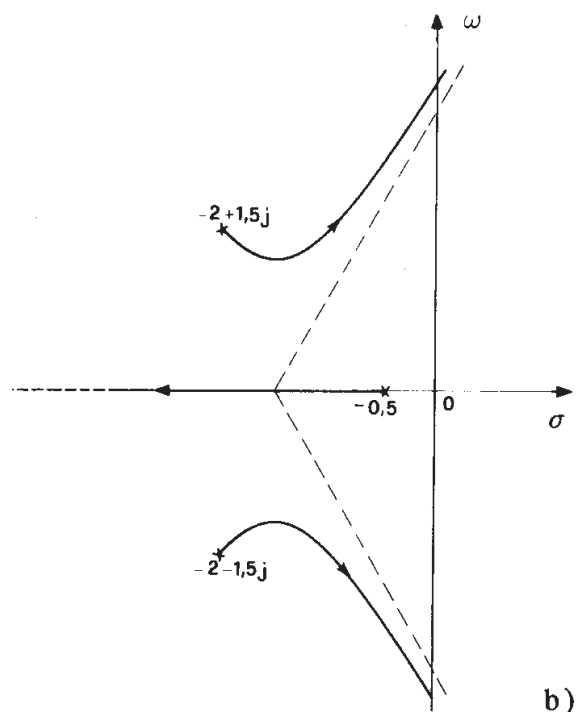
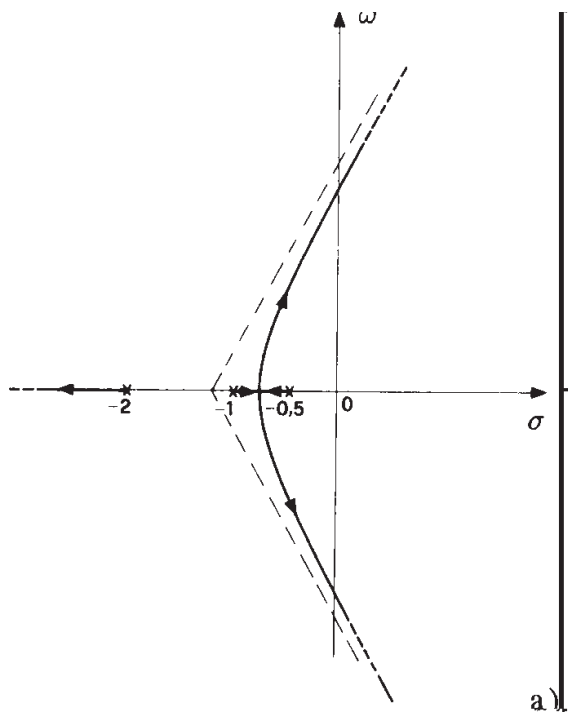
- Luogo delle radici di sistemi del secondo ordine:



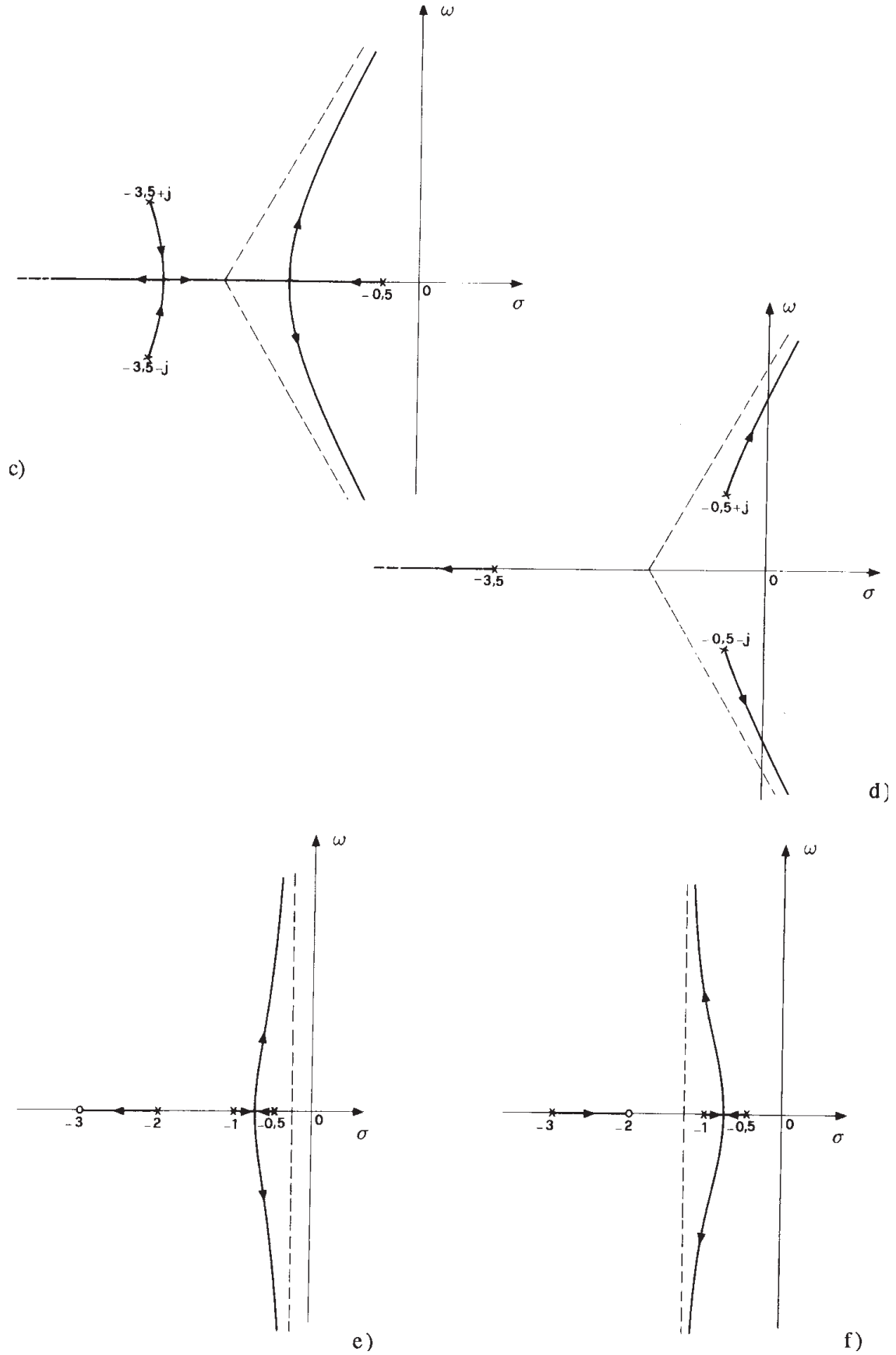
- Luogo delle radici di sistemi del secondo ordine:



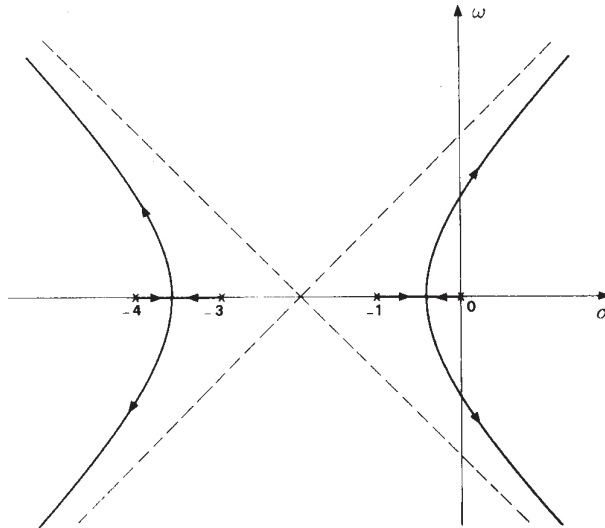
- Luogo delle radici di sistemi del terzo ordine:



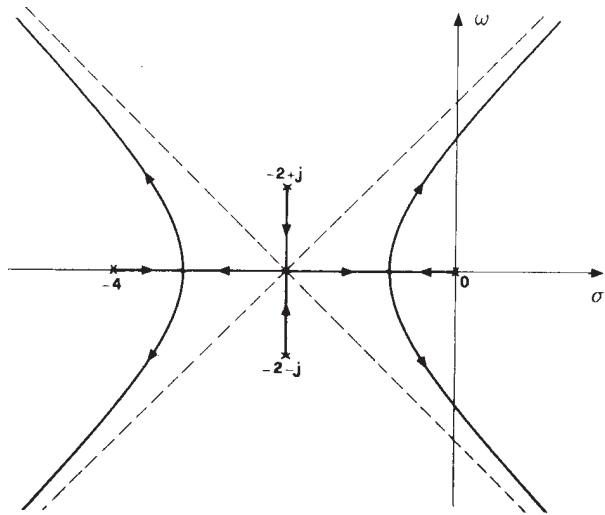
- Luogo delle radici di sistemi del terzo ordine:



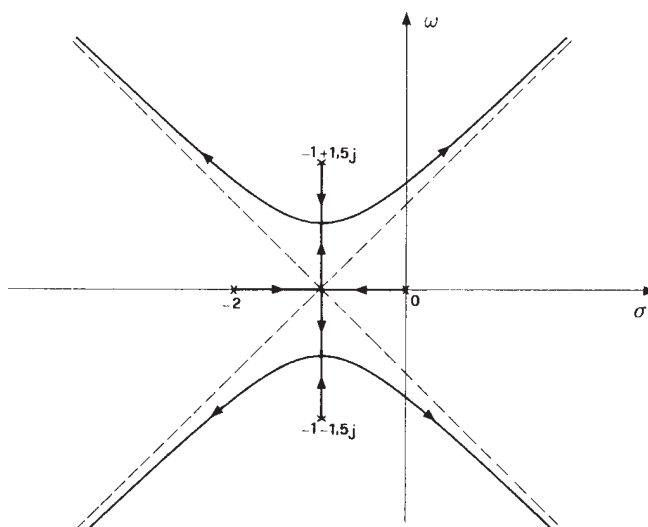
- Luogo delle radici di sistemi del quarto ordine:



a)



b)



c)