Scomposizione in fratti semplici

- La determinazione dell'evoluzione libera e dell'evoluzione forzata di un sistema lineare stazionario richiede l'antitrasformazione di una funzione razionale fratta di questo tipo:

$$Y(s) = \frac{N(s)}{D(s)} := \frac{b_m\, s^m + b_{m-1}\, s^{m-1} + \ldots + b_1\, s + b_0}{s^n + a_{n-1}\, s^{n-1} + \ldots + a_1\, s + a_0}$$

- La differenza $r = n - m$ fra i gradi del denominatore e del numeratore prende il nome di **grado relativo** della funzione razionale $Y(s)$.

- La funzione $Y(s)$ può essere *scomposta in fratti semplici* solo se è strettamente propria, cioè se presenta un grado relativo $r \geq 1$. Se la funzione $Y(s)$ ha grado relativo $r = 0$ può essere scomposta nel seguente modo:

$$Y(s) = y_0 + Y_1(s)$$

dove la costante y_0 e la funzione $Y_1(s)$, con grado relativo $r \geq 1$, sono:

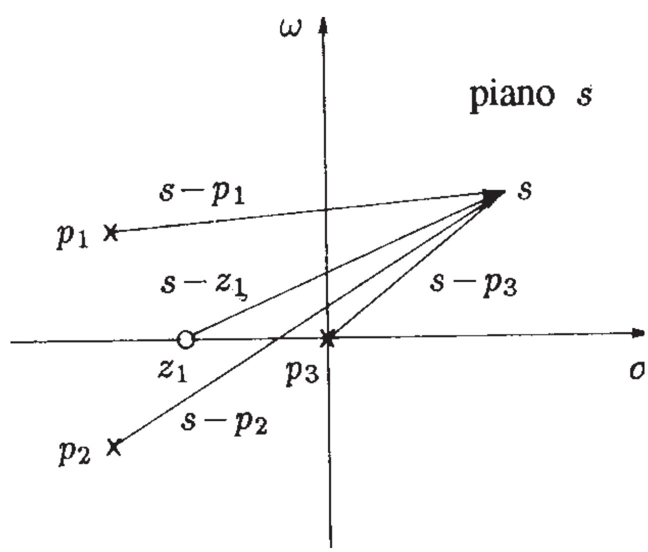
$$y_0 = \lim_{s\to\infty} Y(s), \qquad\qquad Y_1(s) = Y(s) - y_0.$$

- La funzione $Y(s)$ può sempre essere espressa anche in forma fattorizzata:

$$Y(s) = K\, \frac{(s - z_1)\,(s - z_2)\ldots(s - z_m)}{(s - p_1)\,(s - p_2)\ldots(s - p_n)}$$

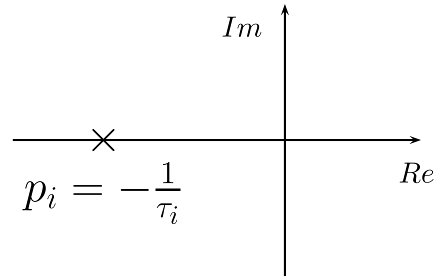
- Le costanti complesse $z_1, \ldots, z_m$ e $p_1, \ldots, p_n$ vengono dette, rispettivamente, **zeri** e **poli** della funzione $Y(s)$.

- Valutazione grafica della funzione $Y(s)$:



- Ad ogni *polo reale* p_i della funzione $Y(s)$ viene associata una **costante di tempo** τ_i così definita:

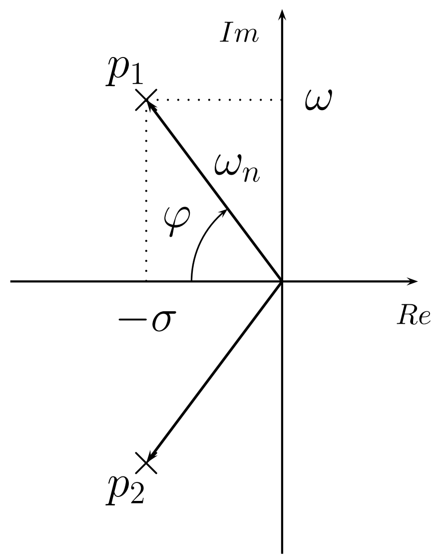
$$\boxed{\tau_i = -\frac{1}{p_i}}$$



La costante di tempo τ_i è positiva solo se il polo reale p_i è negativo. In modo analogo, per gli *zeri reali* z_j vale la relazione: $\tau_j = -1/z_j$.

- Nel caso di *poli complessi coniugati*, $p_{1,2} = -\sigma \pm j\,\omega$, ($-\sigma$ è la parte reale e ω è la parte immaginaria del polo) si utilizza anche la seguente parametrizzazione di "tipo polare":

$$\begin{aligned} p_{1,2} &= -\sigma \pm j\,\omega \\ &= -\delta\,\omega_n \pm j\,\omega_n\sqrt{1-\delta^2} \\ &= -\omega_n \cos\varphi \pm j\,\omega_n \sin\varphi \end{aligned}$$



dove ω_n è detta *pulsazione naturale*:

$$\boxed{\omega_n = |p_1| = |p_2| = \sqrt{\sigma^2 + \omega^2}}$$

e δ è detto *coefficiente di smorzamento*:

$$\boxed{\delta = \cos\varphi = \frac{\sigma}{\sqrt{\sigma^2 + \omega^2}}}$$

Valgono le relazioni seguenti:

$$\boxed{\sigma = \delta\,\omega_n, \qquad \omega = \omega_n\sqrt{1-\delta^2}}$$

- In relazione all'antitrasformazione si distinguono due casi:

  i) tutti i poli della funzione $Y(s)$ sono semplici;

  ii) la funzione $Y(s)$ ha anche poli multipli.

Antitrasformazione nel caso di *poli semplici*

- Nel caso di **poli semplici** la funzione può essere scomposta come segue:

$$Y(s) = \frac{N(s)}{(s-p_1)(s-p_2)\dots(s-p_n)} = \sum_{i=1}^{n} \frac{K_i}{s-p_i}$$

- Le costanti K_i (dette *residui*) sono reali in corrispondenza dei poli reali e complesse coniugate in corrispondenza delle coppie di poli complessi coniugati. Le costanti K_i si ricavano utilizzando la seguente formula:

$$\boxed{K_i = (s-p_i)Y(s)\Big|_{s=p_i}}$$

- Una volta che la funzione $Y(s)$ è stata scomposta in fratti semplici, è immediato antitrasformarla:

$$\boxed{y(t) = \sum_{i=1}^{n} K_i\, e^{p_i t}}$$

- Esempio. Sia

$$Y(s) := \frac{5\,s+3}{(s+1)(s+2)(s+3)} = \frac{K_1}{s+1} + \frac{K_2}{s+2} + \frac{K_3}{s+3}$$

I residui si calcolano nel modo seguente:

$$\begin{aligned} K_1 &= \frac{5\,(-1)+3}{(-1+2)(-1+3)} = -1 \\ K_2 &= \frac{5\,(-2)+3}{(-2+1)(-2+3)} = 7 \\ K_3 &= \frac{5\,(-3)+3}{(-3+1)(-3+2)} = -6 \end{aligned}$$

per cui si può scrivere

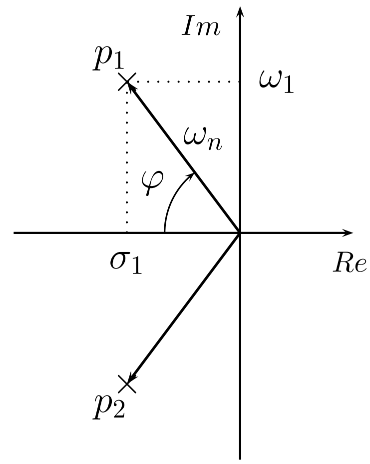
$$Y(s) = -\frac{1}{s+1} + \frac{7}{s+2} - \frac{6}{s+3}$$

e quindi

$$y(t) = -e^{-t} + 7\,e^{-2t} - 6\,e^{-3t}$$

Quando si hanno coppie di *poli complessi coniugati*

$$p_1 = \sigma_1 + j\,\omega_1, \qquad p_2 = \sigma_1 - j\,\omega_1$$



anche i residui sono complessi coniugati

$$K_1 = u_1 + j\,v_1, \qquad K_2 = u_1 - j\,v_1$$

La somma di fratti semplici ad essi relativa è

$$\frac{u_1 + j\,v_1}{s - \sigma_1 - j\,\omega_1} + \frac{u_1 - j\,v_1}{s - \sigma_1 + j\,\omega_1}$$

Posto

$$\boxed{M_1 := 2|K_1| = 2\sqrt{u_1^2 + v_1^2}, \qquad \varphi_1 := \arg K_1 = \arg\left(u_1 + j\,v_1\right)},$$

si può scrivere

$$\frac{M_1}{2}\left(\frac{e^{j\varphi_1}}{s - \sigma_1 - j\,\omega_1} + \frac{e^{-j\varphi_1}}{s - \sigma_1 + j\,\omega_1}\right),$$

da cui, antitrasformando, si ottiene

$$\frac{M_1}{2}\left(e^{\sigma_1 t + j(\omega_1 t + \varphi_1)} + e^{\sigma_1 t - j(\omega_1 t + \varphi_1)}\right),$$

funzione che può essere posta nella forma

$$\boxed{M_1\, e^{\sigma_1 t} \cos(\omega_1 t + \varphi_1)} \qquad \text{oppure} \qquad \boxed{M_1\, e^{\sigma_1 t} \operatorname{sen}(\omega_1 t + \varphi_1 + \pi/2)}$$

Esempio. Sia:

$$Y(s) := \frac{7s^2 - 8s + 5}{s^3 + 2s^2 + 5s} = \frac{K_1}{s} + \frac{K_2}{s + 1 - j2} + \frac{K_3}{s + 1 + j2}$$

I residui sono i seguenti:

$$\begin{aligned}
K_1 &= \frac{7 \cdot 0 - 8 \cdot 0 + 5}{(0 + 1 - j2)\,(0 + 1 + j2)} = 1 \\
K_2 &= \frac{7\,(-1 + j2)^2 - 8\,(-1 + j2) + 5}{(-1 + j2)\,(-1 + j2 + 1 + j2)} = 3 + j4 \\
K_3 &= \frac{7\,(-1 - j2)^2 - 8\,(-1 - j2) + 5}{(-1 - j2)\,(-1 - j2 + 1 - j2)} = 3 - j4
\end{aligned}$$

e pertanto

$$Y(s) = \frac{1}{s} + \frac{3 + j4}{s + 1 - j2} + \frac{3 - j4}{s + 1 + j2},$$

da cui, antitrasformando,

$$y(t) = 1 + 10\, e^{-t} \cos\left(2t + \varphi\right),$$

dove $10 = 2|K_2| = 2\sqrt{3^2 + 4^2}$ e $\varphi = \arctan(4/3) = 53.13°$.

Antitrasformazione nel caso di *poli multipli*

- Si suppone che la funzione razionale $Y(s)$ abbia h poli distinti p_i ($i = 1, \ldots, h$), ciascuno caratterizzato da un ordine di molteplicità $r_i \geq 1$:

$$Y(s) = \frac{N(s)}{(s-p_1)^{r_1}\,(s-p_2)^{r_2}\ldots(s-p_h)^{r_h}} = \sum_{i=1}^{h}\sum_{\ell=1}^{r_i} \frac{K_{i\ell}}{(s-p_i)^{r_i-\ell+1}}$$

- Le costanti $K_{i\ell}$ si ricavano mediante la formula

$$\boxed{K_{i\ell} = \frac{1}{(\ell-1)!}\,\frac{d^{\,\ell-1}}{ds^{\,\ell-1}}\left[(s-p_i)^{r_i}\,Y(s)\right]\Bigg|_{s=p_i}}$$

dove $(i = 1, \ldots, h; \ell = 1, \ldots, r_i)$. Antitrasformando la $Y(s)$ si ottiene:

$$\boxed{y(t) = \sum_{i=1}^{h}\sum_{\ell=1}^{r_i} \frac{K_{i\ell}}{(r_i-\ell)!}\,t^{r_i-\ell}\,e^{p_i t}}$$

- I coefficienti $K_{i\ell}$ sono complessi coniugati in corrispondenza di poli complessi coniugati. I termini complessi coniugati corrispondono a prodotti di esponenziali reali e funzioni trigonometriche, e si ottengono con un procedimento del tutto analogo a quello seguito nel caso di poli distinti.

- Esempio:

$$Y(s) = \frac{1}{(s+2)\,(s+1)^2} = \frac{K_{11}}{s+2} + \frac{K_{22}}{s+1} + \frac{K_{21}}{(s+1)^2}$$

dove

$$\begin{aligned}
K_{11} &= \left[(s+2)\,Y(s)\right]\Big|_{s=-2} = 1\\
K_{22} &= \frac{d}{ds}\left[\,(s+1)^2\,Y(s)\right]\Bigg|_{s=-1} = \frac{d}{ds}\left[\frac{1}{s+2}\right]\Bigg|_{s=-1} = -1\\
K_{21} &= \left[(s+1)^2\,Y(s)\right]\Big|_{s=-1} = 1
\end{aligned}$$

Antitrasformando si ottiene:

$$y(t) = e^{-2t} - e^{-t} + t\,e^{-t}$$

Sviluppi in somme di fratti semplici

- Si consideri il rapporto di polinomi

$$Y(s) = \frac{b_m s^m + b_{m-1}\, s^{m-1} + \ldots + b_1\, s + b_0}{a_n s^n + a_{n-1}\, s^{n-1} + \ldots + a_1\, s + a_0}$$

- Valgono le seguenti proprietà:

  i) se è $n = m+1$, la somma dei residui di $Y(s)$ è $\frac{b_m}{a_n}$;

  ii) se è $n > m+1$, la somma dei residui di $Y(s)$ è zero.

  Si ricorda che, nello sviluppo in fratti, i residui di $Y(s)$ sono i coefficienti dei termini con polinomio a denominatore di primo grado.

- Esempio 1:

$$Y(s) = \frac{s - z_1}{(s-p_1)\,(s-p_2)\,(s-p_3)} = \frac{A}{s-p_1} + \frac{B}{s-p_2} + \frac{C}{s-p_3}$$

  Calcolati A e B, il calcolo del residuo C è immediato: $C = -(A+B)$.

- Esempio 2:

$$Y(s) = \frac{1}{(s-p_1)^2\,(s-p_2)} = \frac{A}{(s-p_1)^2} + \frac{B}{s-p_1} + \frac{C}{s-p_2}$$

  Il coefficiente A e il residuo C si possono calcolare immediatamente:

$$A = \frac{1}{p_1 - p_2}\ , \quad C = \frac{1}{(p_2 - p_1)^2}$$

  Applicando la proprietà ii si deduce: $B = -C$.

- Esempio 3:

$$Y(s) = \frac{s - z_1}{(s-p_1)^3\,(s-p_2)} = \frac{A}{(s-p_1)^3} + \frac{B}{(s-p_1)^2} + \frac{C}{s-p_1} + \frac{D}{s-p_2}$$

  Il coefficiente A e il residuo D si calcolano immediatamente. Applicando la proprietà ii si deduce: $C = -D$. Moltiplicando ambo i membri dello sviluppo per $(s-p_1)$ si ottiene:

$$\begin{aligned} \frac{s - z_1}{(s-p_1)^2\,(s-p_2)} &= \frac{A}{(s-p_1)^2} + \frac{B}{s-p_1} + C + D\,\frac{s-p_1}{s-p_2} \\ &= \frac{A}{(s-p_1)^2} + \frac{B}{s-p_1} + \frac{E}{s-p_2} \end{aligned}$$

  da cui si calcola

$$E = \frac{p_2 - z_1}{(p_2 - p_1)^2}$$

  Applicando la proprietà ii al nuovo sviluppo, si ottiene $B = -E$.

Approccio diretto all'antitrasformazione: poli semplici

• Nel caso in cui la funzione $Y(s)$ sia posta nella seguente forma:

$$Y(s) = \frac{N(s)}{(s+a_1)\dots(s+a_p)[(s+\sigma_1)^2+\omega_1^2]\dots[(s+\sigma_q)^2+\omega_q^2]}$$

caratterizzata da p poli reali semplici in $p_i = -a_i$ e da q poli complessi coniugati semplici in $p_j = -\sigma_j \pm j\,\omega_j$, la funzione antitrasformata $y(t) = \mathcal{L}^{-1}[Y(s)]$ può essere calcolata anche nel seguente modo:

$$\boxed{y(t)=\sum_{i=1}^{p} K_i\, e^{-a_i t}+\sum_{j=1}^{q} \frac{|\bar{H}_j|}{\omega_j}\, e^{-\sigma_j t} \sin\big(\omega_j t + \arg \bar{H}_j\big)}$$

dove i coefficienti K_i e $\bar{H}_j$ si calcolano utilizzando le seguenti formule:

$$\boxed{\begin{array}{rcl} K_i &=& (s+a_i)\,Y(s)\Big|_{s=-a_i} \\ \bar{H}_j &=& [(s+\sigma_j)^2+\omega_j^2]\,Y(s)\Big|_{s=-\sigma_j+j\,\omega_j} \end{array}}$$

Esempio. Si calcoli la risposta al gradino unitario del seguente sistema:

$$G(s) = \frac{\omega_n^2}{s^2 + 2\delta\omega_n s + \omega_n^2}$$

Occorre antitrasformare la seguente funzione di uscita:

$$Y(s) = G(s)X(s) = \frac{\omega_n^2}{s(s^2 + 2\delta\omega_n s + \omega_n^2)}$$

La funzione $Y(s)$ ha poli semplici in 0 e in $-\delta\omega_n \pm j\omega$ dove $\omega = \omega_n\sqrt{1-\delta^2}$. I coefficienti K_1 e $\bar{H}_1$ hanno il seguente valore:

$$K_1 = s\,Y(s)\Big|_{s=0} = \frac{\omega_n^2}{(s^2 + 2\delta\omega_n s + \omega_n^2)}\Big|_{s=0} = 1$$

$$\bar{H}_1 = (s^2 + 2\delta\omega_n s + \omega_n^2)\,Y(s)\Big|_{s=-\delta\omega_n+j\omega} = \frac{\omega_n^2}{-\delta\omega_n+j\omega} = \omega_n\, e^{j(-\pi+\varphi)}$$

dove $\varphi = \arctan\frac{\sqrt{1-\delta^2}}{\delta} = \arccos\delta$. Il calcolo di $y(t)$ è ora immediato:

$$\begin{aligned} y(t) &= 1 + \frac{\omega_n}{\omega}\, e^{-\delta\omega_n t} \sin(\omega\, t - \pi + \varphi) \\ &= 1 - \frac{e^{-\delta\omega_n t}}{\sqrt{1-\delta^2}} \sin(\omega\, t + \varphi) \end{aligned}$$

Modi della risposta temporale

- L'unica difficoltà nell'antitrasformazione di funzioni razionali fratte $Y(s)$ è la fattorizzazione del polinomio a denominatore.
- Il comportamento temporale della funzione antitrasformata $y(t)$ è essenzialmente legato alla posizione dei poli p_i della funzione $Y(s)$. Ai poli semplici $s_i = -\sigma$ e ai poli complessi coniugati $s_j = -\sigma \pm j\,\omega$ sono associati termini temporali $y_i(t)$ e $y_j(t)$, detti *modi*, del seguente tipo:

$$(s+\sigma) \qquad \Rightarrow \qquad y_i(t) = K\, e^{-\sigma t}$$

$$(s+\sigma)^2+\omega^2 \qquad \Rightarrow \qquad y_j(t) = M\, e^{-\sigma t}\mathrm{sen}\,(\omega\, t+\varphi)$$

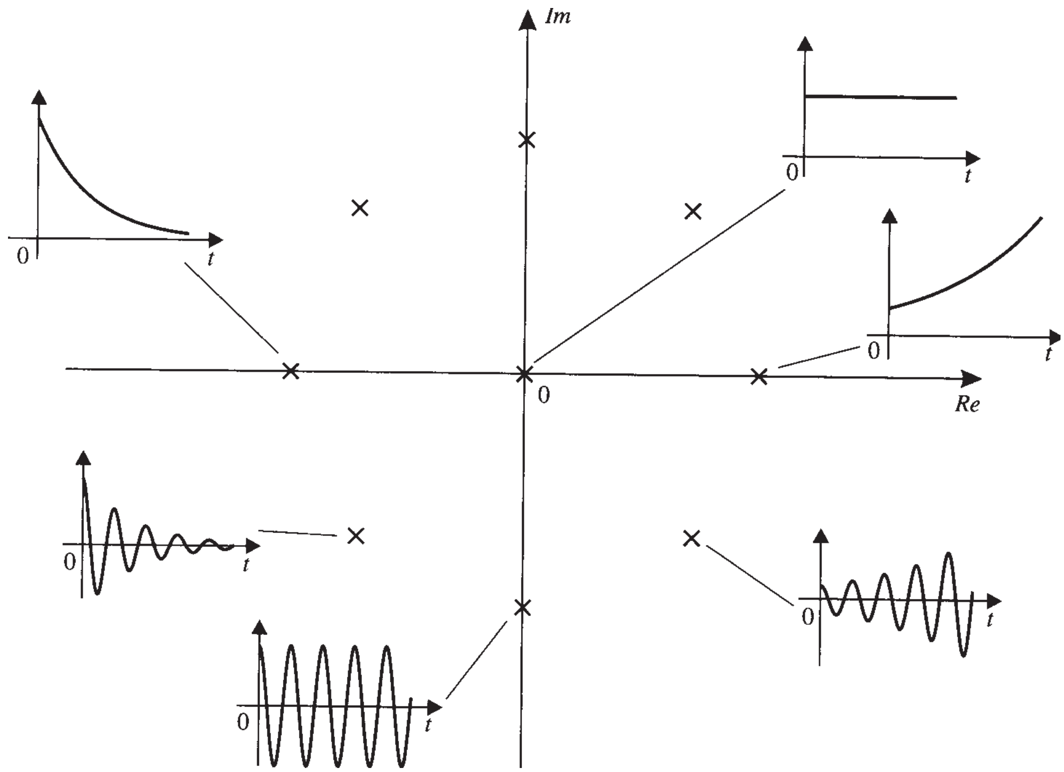
  Nel caso di poli multipli con grado molteplicità r si hanno i seguenti *modi*:

$$(s+\sigma)^r \qquad \Rightarrow \qquad y_i(t) = \sum_{n=0}^{r-1} K_n\, t^n\, e^{-\sigma t}$$

$$[(s+\sigma)^2+\omega^2]^r \qquad \Rightarrow \qquad y_j(t) = \sum_{n=0}^{r-1} M_n\, t^n\, e^{-\sigma t}\mathrm{sen}\,(\omega\, t+\varphi)$$

- Nel caso di *poli semplici*, i modi $y_i(t)$ e $y_j(t)$ tendono a zero per t tendente all'infinito se la parte reale del polo è negativa ($-\sigma < 0$), restano limitati se essa è nulla ($\sigma = 0$) e divergono se essa è positiva ($-\sigma > 0$).
- Nel caso di *poli multipli*, i modi tendono a zero se la parte reale del polo è negativa ($-\sigma < 0$) e divergono se essa è positiva o nulla ($-\sigma \geq 0$).
- L'antitrasformata $y(t)$ di una funzione razionale fratta $Y(s)$ rimane limitata se e solo se la funzione $Y(s)$ non presenta alcun polo a parte reale positiva e gli eventuali poli a parte reale nulla sono semplici. In caso contrario la funzione $y(t)$ diverge.
- I poli che caratterizzano la risposta $Y(s) = G(s)X(s)$ di un lineare sistema $G(s)$ ad un segnale in ingresso $X(s)$ (come l'impulso di Dirac, il gradino, la sinusoide) sono quelli della funzione di trasferimento $G(s)$ più quelli relativi al segnale di ingresso $X(s)$.
- Un *sistema* $G(s)$ è *asintoticamente stabile* se tutti i suoi poli sono a parte reale negativa: in questo caso tutti i modi $y_i(t)$ e $y_j(t)$ associati ai poli della funzione $G(s)$tenderanno sicuramente a zero quando t tendente all'infinito.

- Modi della risposta nel caso di poli distinti ($r = 1$):



- Modi della risposta nel caso di poli multipli ($r = 2$):