Fondamenti di Controlli Automatici - A.A. 2011/12

16 gennaio 2013 - Domande Teoriche

Nome:	
Nr. Mat.	
Firma:	

Per ciascuno dei test a soluzione multipla segnare con una crocetta tutte le affermazioni che si ritengono giuste. In ogni quiz almeno una affermazione è corretta.

1. Il sistema descritto dalla funzione di trasferimento $G(s) = \dfrac{1}{s^2(s+2)}$:

    ◯ è instabile;
    ◯ è semplicemente stabile;
    ◯ è asintoticamente stabile.

2. L'equazione differenziale $\ddot{y} + 3y^2 = 2x$, dove x è l'ingresso e y l'uscita , è:

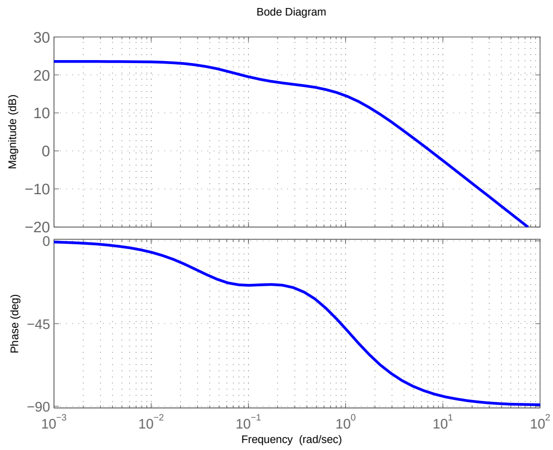
    ◯ stazionaria;
    ◯ non stazionaria;
    ◯ lineare;
    ◯ non lineare.

3. La massima sovraelongazione S (in %) in un sistema del 2^o ordine è:

    ◯ $S = 100\, e^{\frac{\pi\delta}{\sqrt{1-\delta^2}}}$;
    ◯ $S = 100\, e^{-\frac{\pi\delta}{\sqrt{1-\delta^2}}}$;
    ◯ $S = 100\, e^{\frac{\pi\sqrt{1-\delta^2}}{\delta}}$;
    ◯ $S = 100\, e^{-\frac{\pi\sqrt{1-\delta^2}}{\delta}}$.

4. La risposta del sistema di cui in figura sono riportati i diagrammi di Bode al segnale $x(t) = \sin(t)$ risulta:

    ◯ $y(t) \approx 15\sin(t - 86^o)$;
    ◯ $y(t) \approx 5\sin(t)$;
    ◯ $y(t) \approx 15\sin(t - 47^o)$;
    ◯ $y(t) \approx 5\sin(t - 47^o)$.



5. Il valore finale della funzione definita tramite la sua trasformata $G(s) = \dfrac{4s-1}{(s+1)(s-3)}$ vale:

    ◯ 0;
    ◯ 4;
    ◯ 1/3;
    ◯ non esiste.

6. Sia $G(s)$ una funzione razionale fratta in s. La scomposizione in fratti semplici della funzione $G(s)$ mediante il metodo dei residui:

- ◯ è sempre possibile;
- ◯ è possibile solo se la funzione $G(s)$ è propria;
- ◯ è possibile solo se la funzione $G(s)$ è strettamente propria.

7. La funzione di risposta armonica permette di determinare:

- ◯ la risposta libera di un sistema;
- ◯ l'uscita a regime con segnale di ingresso sinusoidale;
- ◯ l'uscita a regime con segnale di ingresso non periodico.

8. Il luogo dei punti del piano complesso determinato da poli complessi coniugati di sistemi del secondo ordine con tempo di assestamento costante è formato da:

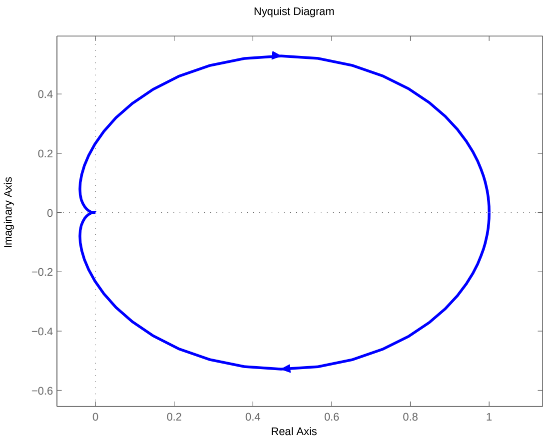
- ◯ due semirette uscenti dall'origine;
- ◯ una retta parallela all'asse immaginario;
- ◯ una semicirconferenza nel semipiano reale negativo centrata nell'origine;
- ◯ due rette parallele all'asse reale.

9. La pulsazione di oscillazione ω risposta al gradino unitario del sistema $G(s) = \dfrac{10}{s^2 + 6\,s + 10}$ è:

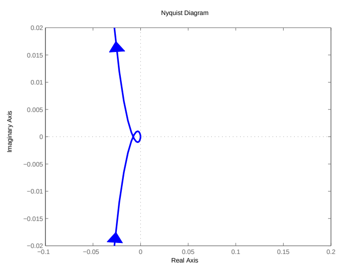
- ◯ $\omega = 10$;
- ◯ $\omega = \sqrt{10}$;
- ◯ $\omega = 3$;
- ◯ $\omega = 1$.

10. Data la funzione di anello caratterizzata da poli tutti a parte reale negativa e il cui diagramma di Nyquist completo è riportato in figura (per chiarezza si riporta anche il dettaglio del diagramma nell'intorno dell'origine), posta in retroazione con un guadagno k, determinare per quali valori di tale parametro il sistema retroazionato risulta stabile:

- ◯ $k_1 \leq k \leq k_2$ essendo $k_1 < 0$ e $k_2 > 0$ costanti opportune;
- ◯ $k \leq k_1$ oppure $k_2 \leq k$ essendo $k_1 < 0$ e $k_2 > 0$ costanti opportune;
- ◯ $\forall k > 0$;
- ◯ $\forall k < 0$.



Dettaglio del diagramma di Nyquist nell'intorno dell'origine:



Fondamenti di Controlli Automatici - A.A. 2011/12

16 gennaio 2013 - Esercizi

Nome:	
Nr. Mat.	
Firma:	

a) Determinare la trasformata di Laplace $X_i(s)$ dei seguenti segnali temporali $x_i(t)$:

$$x_1(t) = 8\,\sin(5\,t - 10), \qquad x_2(t) = 3\,t^4 e^{-3\,t},$$

b) Sfruttando la definizione di funzione di trasferimento e il calcolo dell'antitrasformata di Laplace, trovare in maniera analitica la risposta $y_i(t)$, $i = 1,\ 2$ del sistema

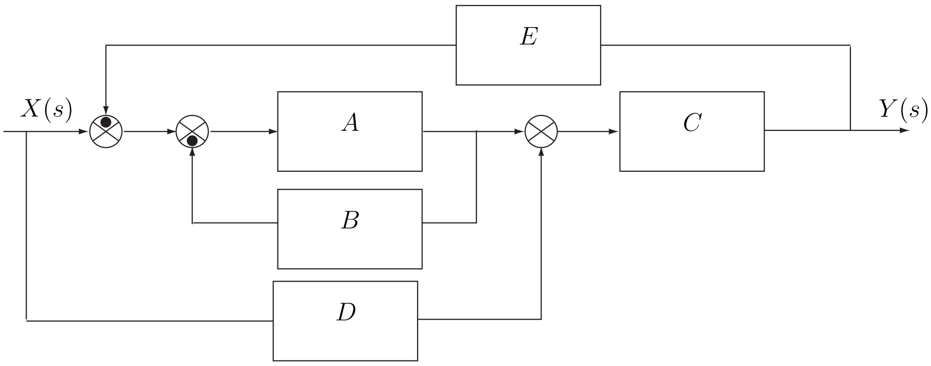
$$G(s) = \frac{-s^2 - 3s + 1}{s^2 + 7s + 12}$$

ai segnali di ingresso:

$$x_1(t) = u(t),\ \text{essendo } u(t) \text{ la funzione gradino unitario}$$

$$x_2(t) = e^{-3t}$$

c) Dato il seguente schema a blocchi:



utilizzando la formula di Mason calcolare la funzione di trasferimento $G(s)$ che lega l'ingresso $X(s)$ all'uscita $Y(s)$:

$$G(s) = \frac{Y(s)}{X(s)} =$$

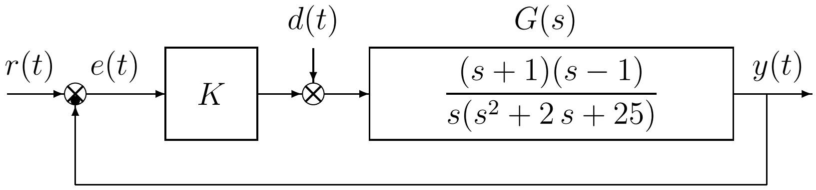
d) Data la funzione di trasferimento $G(s) = \dfrac{0.001(1 + 0.1\,s)(s^2 + 80\,s + 6400)}{(1 + 0.01\,s)(1 + 0.5s)(s^2 + 0.4\,s + 0.8)}$

d.1) Disegnare l'andamento qualitativo della risposta $y(t)$ a un gradino in ingresso di ampiezza 3, $x(t) = 3$.

d.2) Calcolare il valore a regime y_∞ dell'uscita $y(t)$ del sistema.

d.3) Stimare qualitativamente il tempo di assestamento T_a del sistema e il periodo T_ω dell'eventuale oscillazione smorzata.

e) Sia dato il seguente sistema retroazionato:



e.1) Determinare per quali valori del parametro K il sistema retroazionato è asintoticamente stabile.

e.2) Disegnare qualitativamente il diagramma di Nyquist completo della funzione $G(s)$. Calcolare esattamente la posizione di eventuali asintoti e, se esistono, le intersezioni con l'asse reale.

e.3) Posto $K = -1.5$, calcolare l'errore a regime $e(\infty)$ quando sul sistema retroazionato siano applicati contemporaneamente $r(t) = 4t$ e $d(t) = 2\sin(0.1t)$.

e.4) Considerando nuovamente $K = -1.5$, tracciare (nello schema fornito in allegato) i diagrammi di Bode asintotici delle ampiezze e della fasi del guadagno di anello $K\,G(s)$.

f) **Non è richiesto lo svolgimento di questo esercizio agli iscritti ad Ingegneria Ambientale.**

Con riferimento al sistema descritto nell'esercizio e), tracciare qualitativamente il luogo delle radici del sistema retroazionato per valori negativi del parametro K. Determinare esattamente gli asintoti, le intersezioni $\omega^\star$ con l'asse immaginario e i corrispondenti valori $K^\star$ del guadagno.

Fondamenti di Controlli Automatici - A.A. 2011/12
16 gennaio 2013 - Domande Teoriche

Nome:	
Nr. Mat.	
Firma:	

Per ciascuno dei test a soluzione multipla segnare con una crocetta tutte le affermazioni che si ritengono giuste. In ogni quiz almeno una affermazione è corretta.

1. Il sistema descritto dalla funzione di trasferimento $G(s) = \dfrac{1}{s^2(s+2)}$:

   $\otimes$ è instabile;
   $\bigcirc$ è semplicemente stabile;
   $\bigcirc$ è asintoticamente stabile.

2. L'equazione differenziale $\ddot{y} + 3y^2 = 2x$, dove x è l'ingresso e y l'uscita , è:

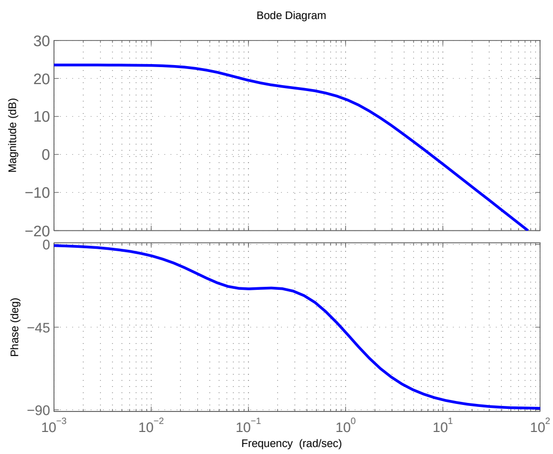
   $\otimes$ stazionaria;
   $\bigcirc$ non stazionaria;
   $\bigcirc$ lineare;
   $\otimes$ non lineare.

3. La massima sovraelongazione S (in %) in un sistema del 2^o ordine è:

   $\bigcirc$ $S = 100\, e^{\frac{\pi\delta}{\sqrt{1-\delta^2}}}$;
   $\otimes$ $S = 100\, e^{-\frac{\pi\delta}{\sqrt{1-\delta^2}}}$;
   $\bigcirc$ $S = 100\, e^{\frac{\pi\sqrt{1-\delta^2}}{\delta}}$;
   $\bigcirc$ $S = 100\, e^{-\frac{\pi\sqrt{1-\delta^2}}{\delta}}$.

4. La risposta del sistema di cui in figura sono riportati i diagrammi di Bode al segnale $x(t) = \sin(t)$ risulta:

   $\bigcirc$ $y(t) \approx 15\sin(t - 86^o)$;
   $\bigcirc$ $y(t) \approx 5\sin(t)$;
   $\bigcirc$ $y(t) \approx 15\sin(t - 47^o)$;
   $\otimes$ $y(t) \approx 5\sin(t - 47^o)$.



5. Il valore finale della funzione definita tramite la sua trasformata $G(s) = \dfrac{4s-1}{(s+1)(s-3)}$ vale:

   $\bigcirc$ 0;
   $\bigcirc$ 4;
   $\bigcirc$ 1/3;
   $\otimes$ non esiste.

6. Sia $G(s)$ una funzione razionale fratta in s. La scomposizione in fratti semplici della funzione $G(s)$ mediante il metodo dei residui:

   - ◯ è sempre possibile;
   - ◯ è possibile solo se la funzione $G(s)$ è propria;
   - ⊗ è possibile solo se la funzione $G(s)$ è strettamente propria.

7. La funzione di risposta armonica permette di determinare:

   - ◯ la risposta libera di un sistema;
   - ⊗ l'uscita a regime con segnale di ingresso sinusoidale;
   - ⊗ l'uscita a regime con segnale di ingresso non periodico.

8. Il luogo dei punti del piano complesso determinato da poli complessi coniugati di sistemi del secondo ordine con tempo di assestamento costante è formato da:

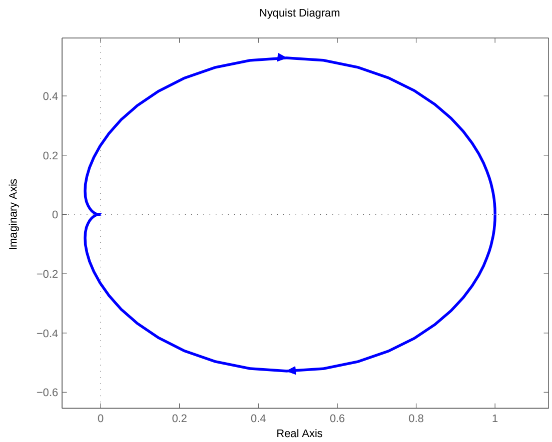
   - ◯ due semirette uscenti dall'origine;
   - ⊗ una retta parallela all'asse immaginario;
   - ◯ una semicirconferenza nel semipiano reale negativo centrata nell'origine;
   - ◯ due rette parallele all'asse reale.

9. La pulsazione di oscillazione ω risposta al gradino unitario del sistema $G(s) = \dfrac{10}{s^2 + 6\,s + 10}$ è:

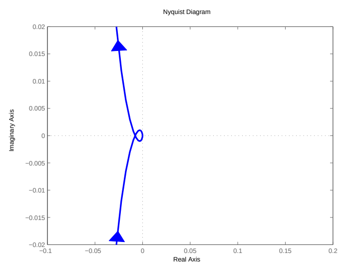
   - ◯ $\omega = 10$;
   - ◯ $\omega = \sqrt{10}$;
   - ◯ $\omega = 3$;
   - ⊗ $\omega = 1$.

10. Data la funzione di anello caratterizzata da poli tutti a parte reale negativa e il cui diagramma di Nyquist completo è riportato in figura (per chiarezza si riporta anche il dettaglio del diagramma nell'intorno dell'origine), posta in retroazione con un guadagno k, determinare per quali valori di tale parametro il sistema retroazionato risulta stabile:

    - ⊗ $k_1 \leq k \leq k_2$ essendo $k_1 < 0$ e $k_2 > 0$ costanti opportune;
    - ◯ $k \leq k_1$ oppure $k_2 \leq k$ essendo $k_1 < 0$ e $k_2 > 0$ costanti opportune;
    - ◯ $\forall k > 0$;
    - ◯ $\forall k < 0$.



Dettaglio del diagramma di Nyquist nell'intorno dell'origine:



Fondamenti di Controlli Automatici - A.A. 2011/12

16 gennaio 2013 - Esercizi

Nome:	
Nr. Mat.	
Firma:	

a) Determinare la trasformata di Laplace $X_i(s)$ dei seguenti segnali temporali $x_i(t)$:

$$x_1(t) = 8\,\sin(5\,t - 10), \qquad x_2(t) = 3\,t^4 e^{-3\,t},$$

Soluzione:

$$x_1(t) = 8\,\sin\big(5(t-2)\big) \qquad \text{da cui} \qquad X_1(s) = \frac{40}{s^2+25}e^{-2s}$$

$$X_2(s) = \frac{72}{(s+3)^5}$$

b) Sfruttando la definizione di funzione di trasferimento e il calcolo dell'antitrasformata di Laplace, trovare in maniera analitica la risposta $y_i(t)$, $i = 1,\ 2$ del sistema

$$G(s) = \frac{-s^2 - 3s + 1}{s^2 + 7s + 12}$$

ai segnali di ingresso:

$$x_1(t) = u(t),\ \text{essendo } u(t) \text{ la funzione gradino unitario}$$

$$x_2(t) = e^{-3t}$$

Soluzione:

La funzione $G(s)$ può essere scritta come

$$G(s) = \frac{-s^2 - 3s + 1}{(s+4)(s+3)}$$

Di conseguenza la trasformata dell'uscita risulta

$$Y_1(s) = G(s)\,X_1(s) = \frac{-s^2 - 3s + 1}{s(s+4)(s+3)}$$

che può essere scomposta in fratti semplici come

$$Y_1(s) = \frac{\frac{1}{12}}{s} - \frac{\frac{3}{4}}{s+4} - \frac{\frac{1}{3}}{s+3}$$

da cui antitrasformando si ottiene

$$y_1(t) = \frac{1}{12} - \frac{3}{4}\,e^{-4\,t} - \frac{1}{3}\,e^{-3\,t}.$$

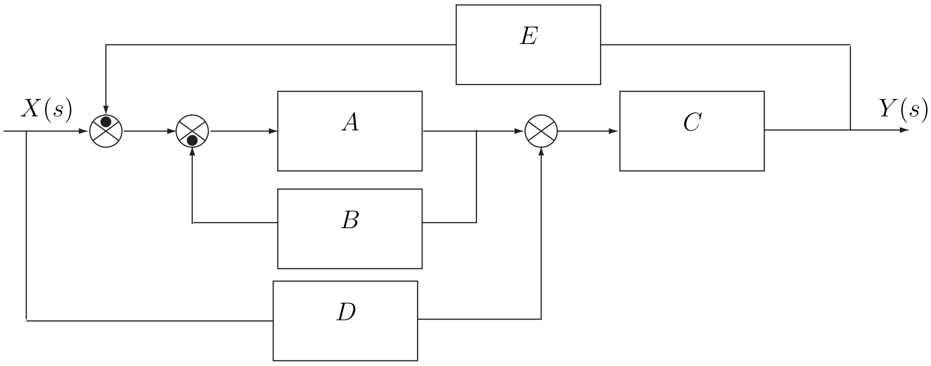
La trasformata della risposta $Y_2(s)$ risulta

$$Y_2(s) = \frac{-s^2 - 3s + 1}{(s+4)(s+3)^2} = \frac{2}{(s+3)} + \frac{1}{(s+3)^2} - \frac{3}{s+4}$$

di conseguenza l'espressione analitica risulta

$$y_2(t) = 2\,e^{-3t} + t\,e^{-3t} - 3\,e^{-4t}$$

c) Dato il seguente schema a blocchi:

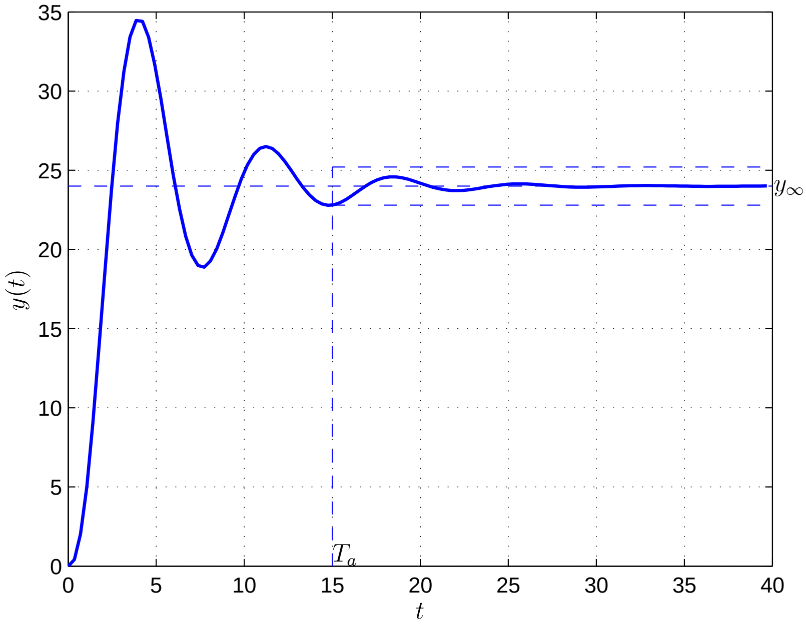


utilizzando la formula di Mason calcolare la funzione di trasferimento $G(s)$ che lega l'ingresso $X(s)$ all'uscita $Y(s)$:

$$G(s) = \frac{Y(s)}{X(s)} = \frac{AC + CD(1 + AB)}{1 + AB + ACE}$$

d) Data la funzione di trasferimento $G(s) = \dfrac{0.001(1 + 0.1\,s)(s^2 + 80\,s + 6400)}{(1 + 0.01\,s)(1 + 0.5s)(s^2 + 0.4\,s + 0.8)}$

d.1) Disegnare l'andamento qualitativo della risposta $y(t)$ a un gradino in ingresso di ampiezza 3, $x(t) = 3$.
Soluzione: In figura è riportata la risposta del sistema.



d.2) Calcolare il valore a regime y_∞ dell'uscita $y(t)$ del sistema.
Soluzione: La risposta a regime al gradino di ampiezza $A = 3$ risulta

$$y_\infty = A\,G(0) = 24.$$

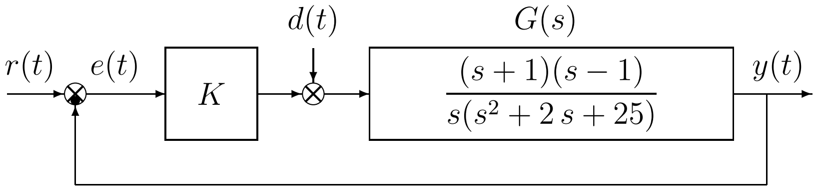
d.3) Stimare qualitativamente il tempo di assestamento T_a del sistema e il periodo T_ω dell'eventuale oscillazione smorzata.
Soluzione: Il sistema ha una coppia di poli dominanti complessi coniugati $p_d = \sigma \pm j\,\omega = -0.2000 \pm j\,0.8718$ per cui la risposta sarà periodica smorzata con un tempo di assestamento

$$T_a = \frac{3}{0.2} = 15 \text{ s.}$$

e un periodo dell'oscillazione

$$T_\omega = \frac{2\pi}{\omega} = 7.2071 \text{ s.}$$

e) Sia dato il seguente sistema retroazionato:



e.1) Determinare per quali valori del parametro K il sistema retroazionato è asintoticamente stabile.
<u>Soluzione:</u> l'equazione caratteristica del sistema retroazionato è

$$1 + \frac{K(s+1)(s-1)}{s\,(s^2+2\,s+25)} = 0 \qquad \rightarrow \qquad s^3 + (2+K)s^2 + 25\,s - K = 0$$

La corrispondente tabella di Routh è la seguente

$$\begin{array}{c|cc l}
3 & 1 & 25 & \\
2 & 2+K & -K & \rightarrow\ K > -2 \\
1 & 50+26\,K & & \rightarrow\ K > -\frac{50}{26} \\
0 & -K & & \rightarrow\ K < 0
\end{array}$$

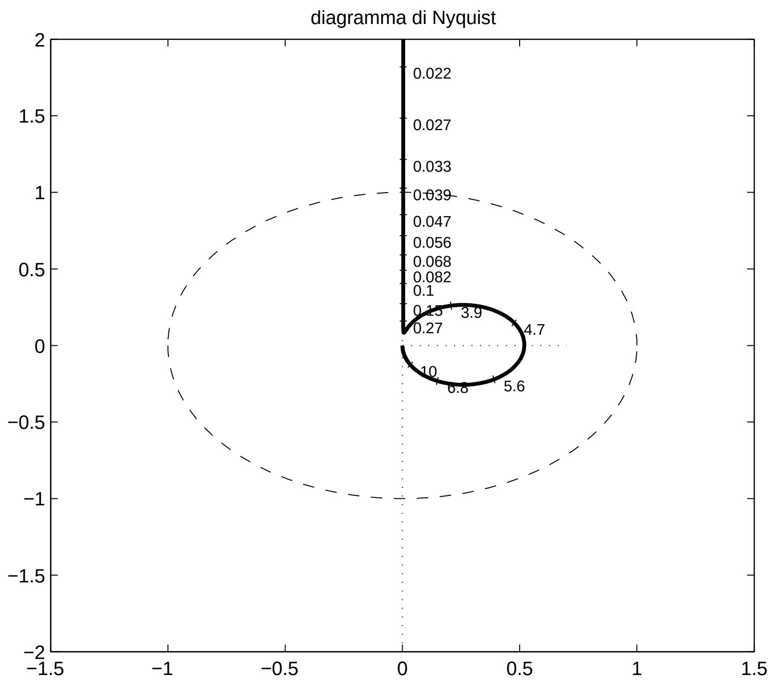
Il sistema retroazionato è asintoticamente stabile per:

$$K^\star = -\frac{50}{26} < K < 0$$

La pulsazione ω^* corrispondente al valore limite $K^\star$ è:

$$\omega^* = \sqrt{25} = 5$$

e.2) Disegnare qualitativamente il diagramma di Nyquist completo della funzione $G(s)$. Calcolare esattamente la posizione di eventuali asintoti e, se esistono, le intersezioni con l'asse reale.
<u>Soluzione</u>: Il diagramma di Nyquist della funzione $G(s)$ è riportato in figura.



La funzione approssimante per $\omega \to 0$ è $G_0(s) = -\dfrac{1}{25s}$ pertanto il diagramma parte all'infinito con fase iniziale $\varphi_0 = -\frac{3}{2}\pi$. La funzione approssimante per $\omega \to \infty$ è $G_\infty(s) = \dfrac{1}{s}$

e quindi il diagramma giunge nell'origine con fase finale $\varphi_\infty = -\frac{\pi}{2}$. Il parametro Δ_τ vale $\Delta_\tau = 1 - 1 - \frac{2}{25} = -\frac{2}{25} < 0$ pertanto il diagramma parte in ritardo rispetto alla fase iniziale φ_0. Essendo un sistema di tipo 1 sarà caratterizzato da un asintoto verticale in corrispondenza di

$$\sigma_a = -\frac{1}{25}\Delta_\tau = \frac{2}{25^2} = 0.0032.$$

Il parametro Δ_p vale $\Delta_p = 1 - 1 - (-2) = 2 > 0$ pertanto il diagramma arriverà in anticipo rispetto alla fase finale φ_∞. Lo sfasamento complessivo è $\Delta\varphi = -\pi$. Dal diagramma risulta inoltre esistere un'unica intersezione con l'asse reale (positivo), che in virtù dell'analisi svolta con Routh al primo punto risulta pari a

$$\sigma^\star = -1/K^\star = \frac{26}{50} = 0.52.$$

La corrispondente pulsazione è $\omega^\star = 5$.

e.3) Posto $K = -1.5$, calcolare l'errore a regime $e(\infty)$ quando sul sistema retroazionato siano applicati contemporaneamente $r(t) = 4t$ e $d(t) = 2\sin(0.1t)$. Dato che il sistema è lineare e soggetto quindi alla sovrapposizione degli effetti, l'errore $E(s)$, espresso mediante la trasformata di Laplace, risulterà:

$$E(s) = E_r(s) + E_d(s)$$

dove $E_r(s)$ è l'errore dovuto al riferimento mentre $E_d(s)$ è l'errore dovuto al disturbo. A regime l'errore di velocità $e_r(\infty)$ sarà costante (essendo il sistema di tipo 1) e varrà

$$e_r(\infty) = \frac{4}{\lim_{s\to 0} s\,K\,G(s)} = \frac{4}{0.06} = 66.6667$$

L'errore a regime dovuto al segnale $d(t)$ vale invece

$$E_d(s) = F_d(s)D(s)$$

dove $D(s)$ è la trasformata di laplace di $d(t)$ e $F_d(s)$ è la funzione di trasferimento tra $D(s)$ e $E(s)$ che vale

$$F_d(s) = -\frac{G(s)}{1 + KG(s)} = -\frac{s^2 + 1}{s^3 + 0.5\,s^2 + 25\,s + 1.5}.$$

Essendo $d(t)$ un segnale sinusoidale, per trovarne la risposta a regime si sfrutta il concetto di risposta armonica, per cui

$$e_d(t) = 2|F_d(j0.1)|\sin(0.1\,t + \arg\{F_d(j0.1)\})$$

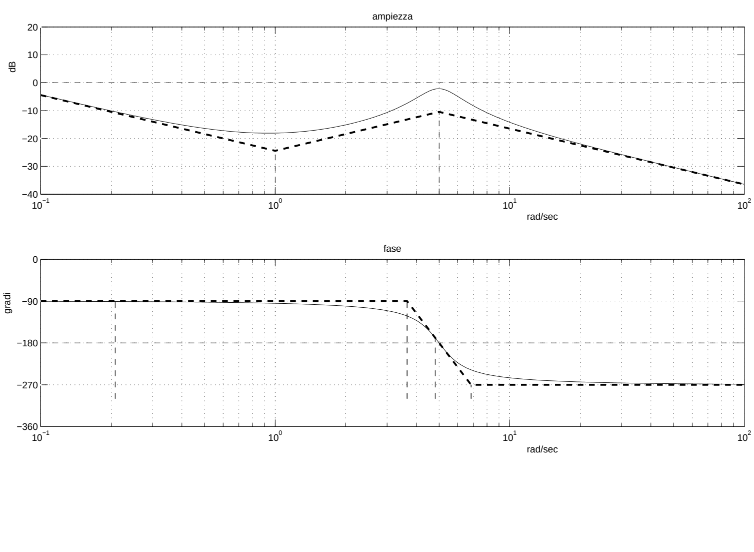
con $|F_d(j0.1)| = 0.3468$ e $\arg\{F_d(j0.1)\} = 300.8895^o$. In conclusione

$$e(\infty) = e_r(\infty) + e_d(\infty) = 66.6667 + 0.6937\sin(0.1\,t + 300.8895^o)$$

e.4) Considerando nuovamente $K = -1.5$, tracciare (nello schema fornito in allegato) i diagrammi di Bode asintotici delle ampiezze e della fasi del guadagno di anello $K\,G(s)$.

<u>Soluzione</u>:

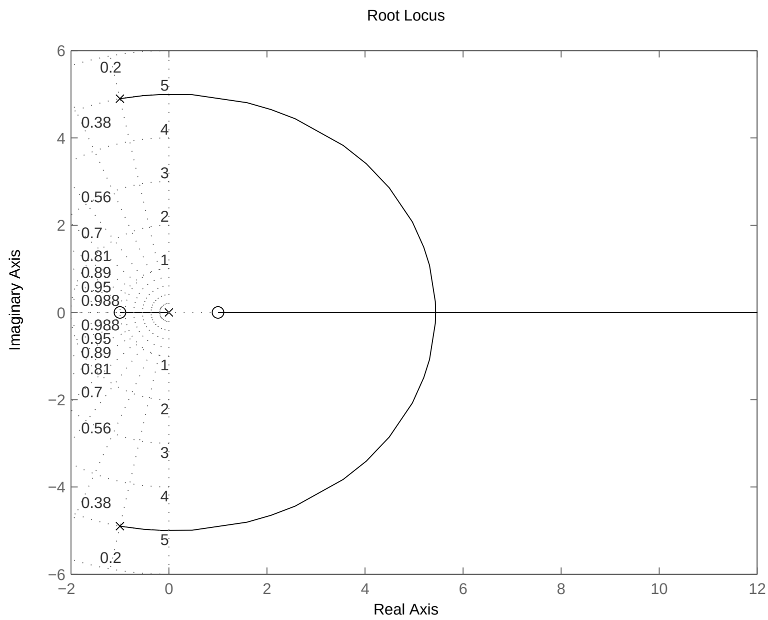
In figura sono riportati i diagrammi di Bode del sistema.



f) **Non è richiesto lo svolgimento di questo esercizio agli iscritti ad Ingegneria Ambientale.**

Con riferimento al sistema descritto nell'esercizio e), tracciare qualitativamente il luogo delle radici del sistema retroazionato per valori negativi del parametro K. Determinare esattamente gli asintoti, le intersezioni $\omega^\star$ con l'asse immaginario e i corrispondenti valori $K^\star$ del guadagno.

Soluzione: C'è un unico asintoto, essendo 1 il grado relativo, che corrisponderà con l'asse reale. Il luogo delle radici finale per valori negativi di K è riportato nella seguente figura.



Dall'analisi svolta mediante il criterio di Routh, risulta che il luogo delle radici attraversa l'asse immaginario, passando dal semipiano sinistro a quello destro, in corrispondenza di $s^\star = j\omega^\star = j5$, per $K = K^\star = -\frac{50}{26}$.

Fondamenti di Controlli Automatici - A.A. 2011/12

16 gennaio 2013 - Diagrammi di Bode

Nome:	
Nr. Mat.	
Firma: