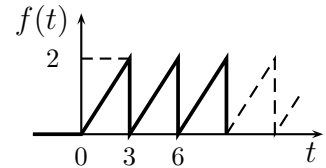


Nome:	
Nr. Mat.	
Firma:	

a) Determinare la trasformata di Laplace $X_i(s)$ dei seguenti segnali temporali $x_i(t)$:

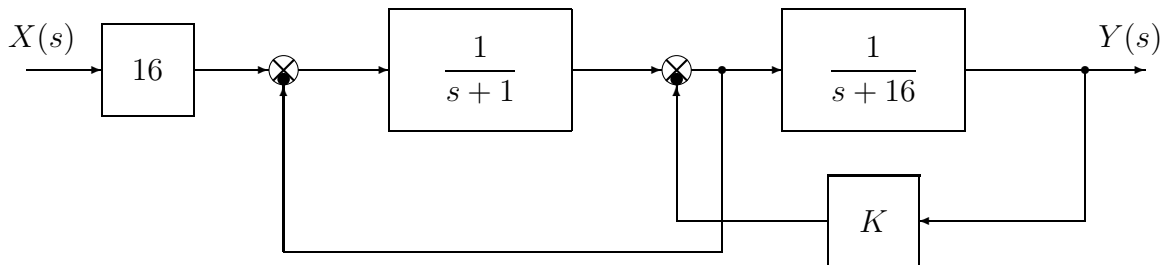
$$x_1(t) = 6 \sin(4t - 12), \quad x_2(t) = \frac{1}{3} t^4 e^{-4t} + 5 \cos(7\pi t),$$



b) Calcolare la risposta impulsiva $g_i(t)$ delle seguenti funzioni di trasferimento $G_i(s)$:

$$G_1(s) = -\frac{3}{(s+5)^3}, \quad G_2(s) = \frac{s+3}{(s-5)(s-2)(s+1)}, \quad G_3(s) = \frac{1}{(s-2)(s+3)^2}$$

c) Si consideri il seguente schema a blocchi:



c.1) Posto $K = -16$, utilizzando la formula di Mason calcolare la funzione di trasferimento $G(s)$ che lega l'ingresso $X(s)$ all'uscita $Y(s)$:

$$G(s) = \frac{Y(s)}{X(s)} =$$

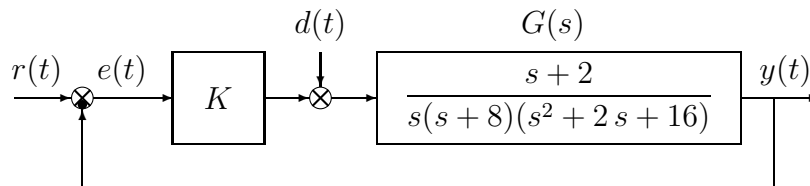
c.2) Relativamente alla funzione di trasferimento $G(s)$ calcolare:

1. la parte reale σ dei poli dominanti del sistema;
2. la parte immaginaria ω dei poli dominanti del sistema;
3. la pulsazione naturale ω_n dei poli dominanti del sistema;
4. il coefficiente di smorzamento δ dei poli dominanti del sistema;
5. il guadagno statico K_0 ;
6. il tempo di assestamento T_a del sistema $G(s)$ alla risposta al gradino;
7. l'istante di massima sovraelongazione;
8. la massima sovraelongazione percentuale;
9. il periodo delle oscillazioni.

c.3) Disegnare l'andamento qualitativo della risposta $y(t)$ della funzione di trasferimento $G(s)$ al gradino in ingresso $x(t) = 4$.

Per quanto è possibile, disegnare l'andamento temporale in modo congruente con il valore dei parametri numerici determinati al punto precedente.

d) Sia dato il seguente sistema retroazionato:



d.1) Determinare per quali valori del parametro K il sistema retroazionato è asintoticamente stabile.

d.2) Posto $r(t) = 0$, si determini il valore del parametro K tale da garantire che in presenza del disturbo costante $d(t) = d_0$, il valore a regime dell'uscita $y(t)$ sia $y_\infty = 0.2 d_0$.

d.3) Posto $d(t) = 0$, calcolare, in funzione del parametro K , l'errore a regime $e_\infty(t)$ corrispondente all'applicazione del segnale di ingresso a rampa $r(t) = 3t$.

d.4) Posto $K = 20$, disegnare qualitativamente il diagramma di Nyquist "completo" del guadagno d'anello $K G(s)$. Calcolare esattamente la posizione σ_a dell'asintoto verticale, le eventuali intersezioni σ_i^* con l'asse reale e i corrispondenti valori delle pulsazioni ω_i^* . Determinare inoltre il margine di ampiezza M_α e indicare sul diagramma il margine di fase di $K G(s)$.

e) Si faccia riferimento al sistema retroazionato dell'esercizio precedente e si ponga $K = 20$:

e.1) Tracciare i diagrammi di Bode asintotici delle ampiezze e della fasi del guadagno di anello $K G(s)$;

e.2) Fornire una stima della larghezza di banda del sistema retroazionato;

e.3) Fornire una stima della risposta "a regime" $y_\infty(t)$ del sistema in catena aperta quando in ingresso è presente il segnale $r(t) = 5 + 2 \cos(0.4t + \pi/4)$.

f) **Non è richiesto lo svolgimento di questo esercizio agli iscritti ad Ingegneria Ambientale.**

Con riferimento al sistema descritto nell'esercizio d), tracciare qualitativamente il luogo delle radici del sistema retroazionato per valori positivi del parametro K . Determinare:

1. l'angolo con cui rami entrano o escono dalle radici;
2. la posizione qualitativa dei punti di diramazione;
3. il centro degli asintoti;
4. gli angoli che gli asintoti formano rispetto all'asse reale positivo
5. le intersezioni del luogo delle radici con l'asse immaginario e i corrispondenti valori del parametro K .

**Fondamenti di Controlli Automatici -
A.A. 2011/12
10 Gennaio 2012 - Domande Teoriche**

Nome:	
Nr. Mat.	
Firma:	

Per ciascuno dei test a soluzione multipla segnare con una crocetta tutte le affermazioni che si ritengono giuste.

- Un sistema di “tipo 3” è caratterizzato da:
 - grado relativo $n - m = 3$;
 - 3 poli complessi coniugati;
 - 3 poli nulli.
- Per $\omega \in [-\infty, \infty]$, il diagramma di Nyquist “completo” di un sistema $G(s)$ di tipo 0:
 - deve essere chiuso all’infinito con una semicirconferenza percorsa in senso orario;
 - deve essere chiuso all’infinito con una semicirconferenza percorsa in senso antiorario;
 - non necessita di essere chiuso all’infinito.
- Un sistema lineare $G(s)$ avente poli multipli posizionati sull’asse immaginario può essere:
 - instabile;
 - stabile ingresso limitato - uscita limitata;
 - semplicemente stabile.
- Se gli elementi della prima colonna della tabella di Routh di una equazione caratteristica di 4 grado ha tutti gli elementi positivi tranne uno che è negativo, ne segue che l’equazione caratteristica:
 - ha solo una radice a parte reale positiva
 - ha almeno una radice a parte reale positiva
 - ha almeno una radice a parte reale negativa
 - può avere una coppia di radici complesse coniugate a parte reale positiva
- Scrivere la funzione di trasferimento $G(s)$ corrispondente alla seguente equazione differenziale:
$$2\ddot{x}(t) + 8\dot{x}(t) + 4x(t) = 3\dot{u}(t) + 6u(t) + 9u(t) \quad \rightarrow \quad G(s) = \frac{X(s)}{U(s)} =$$
- Il luogo dei punti del piano complesso determinato da poli complessi coniugati di sistemi del secondo ordine con coefficiente di smorzamento costante è formato da:
 - una retta parallela all’asse immaginario;
 - due rette parallele all’asse reale;
 - una semicirconferenza nel semipiano reale negativo centrata nell’origine;
 - due semirette uscenti dall’origine.
- La funzione complessa $X(s) = \frac{s}{(s+4)^2}$ è la trasformata di Laplace:
 - di un segnale $x(t)$ che tende a zero per $t \rightarrow \infty$;
 - di un segnale $x(t)$ che tende a 1 per $t \rightarrow 0$;
 - del segnale $x(t) = t^2 e^{-(t-4)}$;
 - del segnale $x(t) = t e^{-4t}$.

8. Un sistema dinamico lineare è stabile se la sua funzione di trasferimento ha tutti i poli:
- a parte reale positiva ed eventuali poli a parte reale nulla hanno molteplicità unitaria;
 - a parte reale strettamente positiva.
 - a parte reale negativa ed eventuali poli a parte reale nulla hanno molteplicità unitaria;
 - a parte reale strettamente negativa.
9. Sia $\mathcal{L}[f(t)] = F(s)$ la trasformata di Laplace della funzione $f(t)$. Vale la relazione:
- $\mathcal{L}\left[\frac{df}{dt}\right] = \frac{1}{s}F(s) - f(0-)$;
 - $\mathcal{L}\left[\frac{df}{dt}\right] = \frac{1}{s}F(s)$;
 - $\mathcal{L}\left[\frac{df}{dt}\right] = sF(s) - f(0-)$;
 - $\mathcal{L}\left[\frac{df}{dt}\right] = sF(s)$.
10. Il diagramma di Nyquist della funzione $G(s) = \frac{s+1}{s(s^2+4s+16)}$ per $\omega \in [0, \infty]$:
- ha guadagno statico unitario;
 - si evolve tutta nel semipiano positivo;
 - presenta un asintoto verticale;
 - è chiuso all'infinito da una semicirconferenza percorsa in senso orario.
11. Un sistema $G(s)$ a fase minima di tipo 2 e con grado relativo 3 presenta nel diagramma asintotico di Bode delle fasi:
- una fase di $-\frac{\pi}{2}$ per $\omega \rightarrow 0$;
 - una fase di $-\pi$ per $\omega \rightarrow 0$;
 - una fase di $-\frac{3\pi}{2}$ per $\omega \rightarrow \infty$;
 - una fase di $-\pi$ per $\omega \rightarrow \infty$.
12. L'errore a regime di un sistema $G(s)$ con ingresso del tipo $u(t) = R_0 t$ si può determinare come $e = \frac{R_0}{K_e}$, dove K_e vale:
- $K_e = \lim_{s \rightarrow 0} s^2 G(s)$;
 - $K_e = \lim_{s \rightarrow 0} s G(s)$;
 - $K_e = \lim_{s \rightarrow 0} G(s)$.

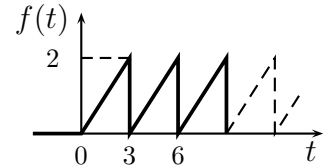
Non è richiesto lo svolgimento delle seguenti domande agli iscritti ad Ingegneria Ambientale.

13. Il luogo delle radici del sistema $\frac{1}{(s+1)(s+2)}$ per valori positivi del guadagno di retroazione:
- ha due asintoti verticali;
 - ha un asintoto orizzontale corrispondente all'intervallo $(-\infty, -2]$;
 - presenta una diramazione nel punto $-1.5 + j0$.
14. Un problema di contorno delle radici:
- si ha quando a variare non è il guadagno di retroazione K ma un qualunque altro parametro del sistema;
 - può sempre essere ricondotto ad un problema di luogo delle radici;
 - può essere ricondotto ad un problema di luogo delle radici tutte le volte che il parametro che varia entra linearmente nell'equazione caratteristica del sistema retroazionato.

Nome:	
Nr. Mat.	
Firma:	

a) Determinare la trasformata di Laplace $X_i(s)$ dei seguenti segnali temporali $x_i(t)$:

$$x_1(t) = 6 \sin(4t - 12), \quad x_2(t) = \frac{1}{3} t^4 e^{-4t} + 5 \cos(7\pi t),$$



Soluzione:

$$X_1(s) = \frac{24s e^{-3s}}{s^2 + 16}, \quad X_2(s) = \frac{8}{(s+4)^5} + \frac{5s}{s^2 + 49\pi^2}, \quad X_3(s) = \frac{2}{3s(1 - e^{-3s})} \left[-3e^{-3s} + \frac{1 - e^{-3s}}{s} \right]$$

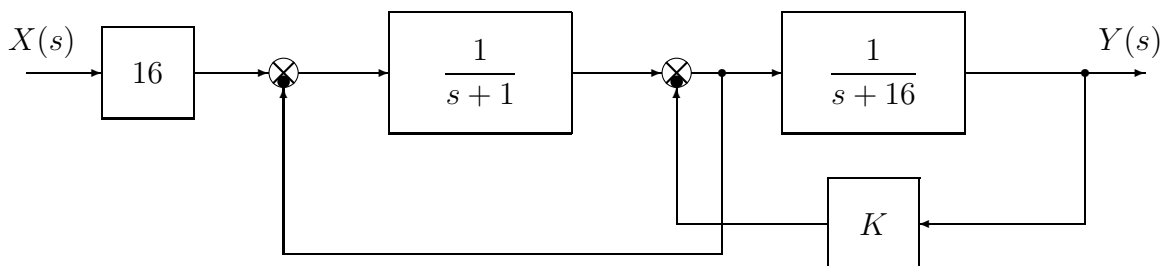
b) Calcolare la risposta impulsiva $g_i(t)$ delle seguenti funzioni di trasferimento $G_i(s)$:

$$G_1(s) = -\frac{3}{(s+5)^3}, \quad G_2(s) = \frac{s+3}{(s-5)(s-2)(s+1)}, \quad G_3(s) = \frac{1}{(s-2)(s+3)^2}$$

Soluzione:

$$g_1(t) = -\frac{3}{2} t^2 e^{-5t}, \quad g_2(t) = \frac{4}{9} e^{5t} - \frac{5}{9} e^{2t} + \frac{1}{9} e^{-t}, \quad g_3(t) = \frac{1}{25} e^{2t} - \frac{1}{25} e^{-3t} - \frac{1}{5} t e^{-3t}$$

c) Si consideri il seguente schema a blocchi:

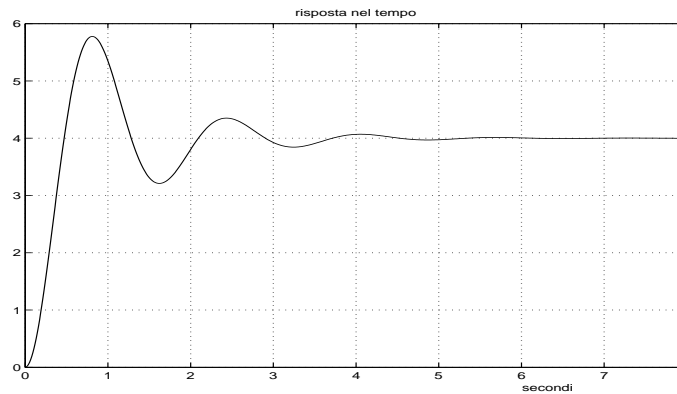


c.1) Posto $K = -16$, utilizzando la formula di Mason calcolare la funzione di trasferimento $G(s)$ che lega l'ingresso $X(s)$ all'uscita $Y(s)$:

$$G(s) = \frac{Y(s)}{X(s)} = \frac{16}{s^2 + 2s + 16}$$

c.2) Relativamente alla funzione di trasferimento $G(s)$ calcolare:

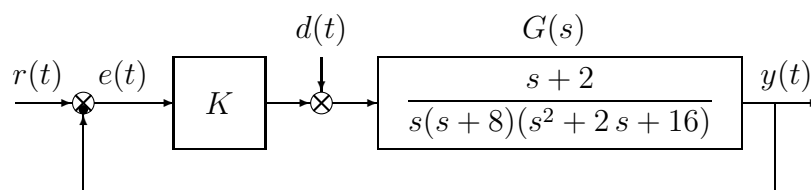
- la parte reale σ dei poli dominanti del sistema; $\sigma = 1$
- la parte immaginaria ω dei poli dominanti del sistema; $\omega = 3.873$
- la pulsazione naturale ω_n dei poli dominanti del sistema; $\omega_n = 4$
- il coefficiente di smorzamento δ dei poli dominanti del sistema; $\delta = 0.25$
- il guadagno statico K_0 ; $K_0 = 1$
- il tempo di assestamento T_a del sistema $G(s)$ alla risposta al gradino; $T_a = 3$
- l'istante di massima sovraelongazione; $T_M = 0.81$
- la massima sovraelongazione percentuale; $S = 44.4\%$
- il periodo delle oscillazioni. $T = 1.62$



c.3) Disegnare l'andamento qualitativo della risposta $y(t)$ della funzione di trasferimento $G(s)$ al gradino in ingresso $x(t) = 4$.

Per quanto è possibile, disegnare l'andamento temporale in modo congruente con il valore dei parametri numerici determinati al punto precedente.

d) Sia dato il seguente sistema retroazionato:



d.1) Determinare per quali valori del parametro K il sistema retroazionato è asintoticamente stabile.

Soluzione: l'equazione caratteristica del sistema retroazionato è

$$1 + \frac{K(s+2)}{s(s+8)(s^2+2s+16)} = 0 \quad \rightarrow \quad s^4 + 10s^3 + 32s^2 + (128+K)s + 2K = 0$$

La corrispondente tabella di Routh è la seguente

4	1	32	$2K$
3	10	$128+K$	
2	$192-K$	$20K$	
1	$-K^2 - 136K + 24576$		
0	$20K$		

Dalla riga 1 e dalla riga 0 si ricavano i seguenti vincoli:

$$K > 0, \quad K < 102.88$$

La pulsazione ω^* corrispondente al valore limite K^* è:

$$\omega^* = \sqrt{\frac{128 + K^*}{10}} = 4.8$$

d.2) Posto $r(t) = 0$, si determini il valore del parametro K tale da garantire che in presenza del disturbo costante $d(t) = d_0$, il valore a regime dell'uscita $y(t)$ sia $y_\infty = 0.2 d_0$.

Soluzione: Il valore a regime dell'uscita corrispondente all'applicazione del disturbo costante $d(t) = d_0$ è

$$y_\infty = \frac{G(0) d_0}{1 + K G(0)} = \frac{d_0}{K} = 0.2 d_0$$

Il sistema $G(s)$ è di tipo 1 e quindi il suo guadagno statico infinito $G(0) = \infty$. Il valore di uscita richiesto si ha per $K = 5$.

d.3) Posto $d(t) = 0$, calcolare, in funzione del parametro K , l'errore a regime $e_\infty(t)$ corrispondente all'applicazione del segnale di ingresso a rampa $r(t) = 3t$.

Soluzione: L'errore a regime $e_\infty = \frac{3}{K_v}$ con $K_v = \frac{K}{64}$. Si ottiene quindi che:

$$e_\infty = \frac{192}{K}.$$

d.4) Posto $K = 20$, disegnare qualitativamente il diagramma di Nyquist "completo" del guadagno d'anello $K G(s)$. Calcolare esattamente la posizione σ_a dell'asintoto verticale, le eventuali intersezioni σ_i^* con l'asse reale e i corrispondenti valori delle pulsazioni ω_i^* . Determinare inoltre il margine di ampiezza M_α e indicare sul diagramma il margine di fase di $K G(s)$.

Soluzione: Il diagramma di Nyquist della funzione $G(s)$ per $\omega \in [0, \infty]$ è mostrato in Fig. 3.

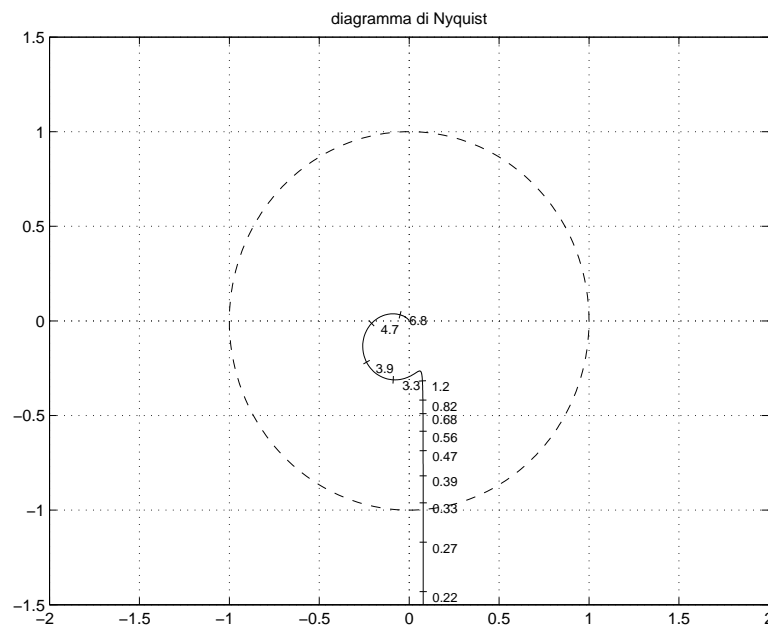


Figura 1: Diagramma di Nyquist della funzione $G(s)$ per $\omega \in [0, \infty]$.

Il sistema é di tipo 1 per cui esiste un asintoto verticale in $K_\tau \Delta_a = 0.078$.

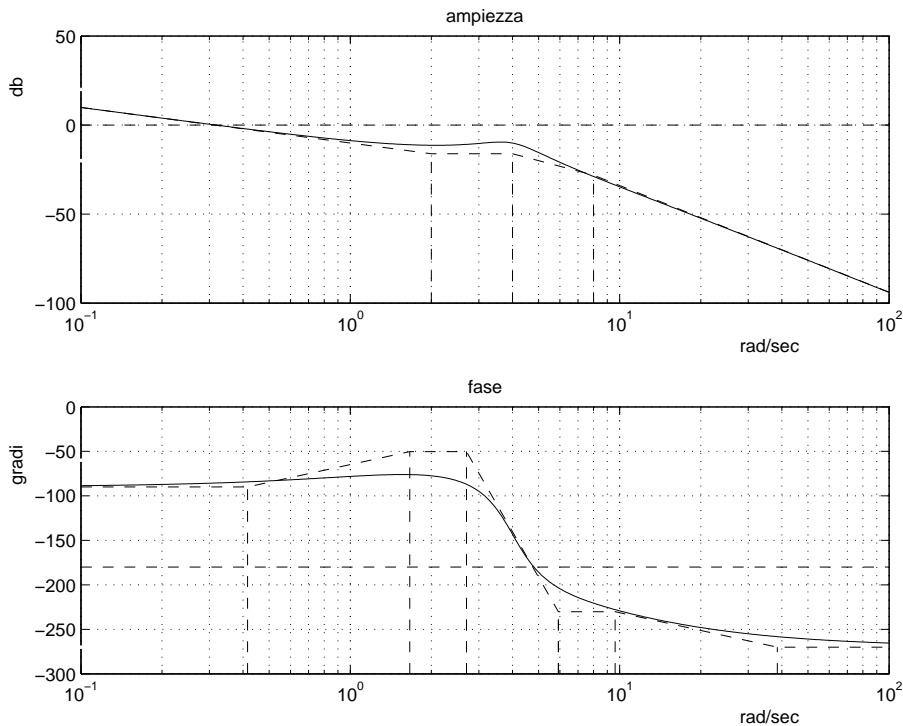
Esiste una intersezione σ^* con l'asse reale. Tale intersezione si determina facilmente dall'analisi di Routh svolta al punto d.1:

$$\sigma^* = -\frac{20}{K^*} = -0.19$$

Il corrispondente valore della pulsazione è $\omega^* = 4.8$

e) Si faccia riferimento al sistema retroazionato dell'esercizio precedente e si ponga $K = 20$:

e.1) Tracciare i diagrammi di Bode asintotici delle ampiezze e della fasi del guadagno di anello



$KG(s)$;

e.2) Fornire una stima della larghezza di banda del sistema retroazionato;

Soluzione: La banda passante del sistema può essere determinata dal punto di incrocio del diagramma di Bode delle ampiezze con l'asse 0 db. Una stima della banda passante del sistema è quindi $\omega_T = 0.3 \text{ rad/s}$.

e.3) Fornire una stima della risposta "a regime" $y_\infty(t)$ del sistema in catena aperta quando in ingresso è presente il segnale $r(t) = 5 + 2 \cos(0.4t + \pi/4)$.

Soluzione: La risposta in catena aperta del sistema si pu facilmente determinare a partire dalla trasformata di Laplace dell'ingresso: $R(s) = \frac{5}{s} + 2 \left(\frac{\cos(\pi/4)s - 0.4 \sin(\pi/4)}{s^2 + 0.4^2} \right)$.

L'uscita del sistema quindi data da $Y(s) = KR(s)G(s)$.

f) **Non è richiesto lo svolgimento di questo esercizio agli iscritti ad Ingegneria Ambientale.**

Con riferimento al sistema descritto nell'esercizio d), tracciare qualitativamente il luogo delle radici del sistema retroazionato per valori positivi del parametro K . Determinare:

1. l'angolo con cui rami entrano o escono dalle radici;
2. la posizione qualitativa dei punti di diramazione;
3. il centro degli asintoti;
4. gli angoli che gli asintoti formano rispetto all'asse reale positivo
5. le intersezioni del luogo delle radici con l'asse immaginario e i corrispondenti valori del parametro K .

Soluzione: vedi figura 4. Soluzione:

$$\begin{aligned} \sigma &= -2.66 \\ \phi &= 60, 180, 300 \\ s^* &= 4.8i \\ K^* &= 102.88 \end{aligned}$$

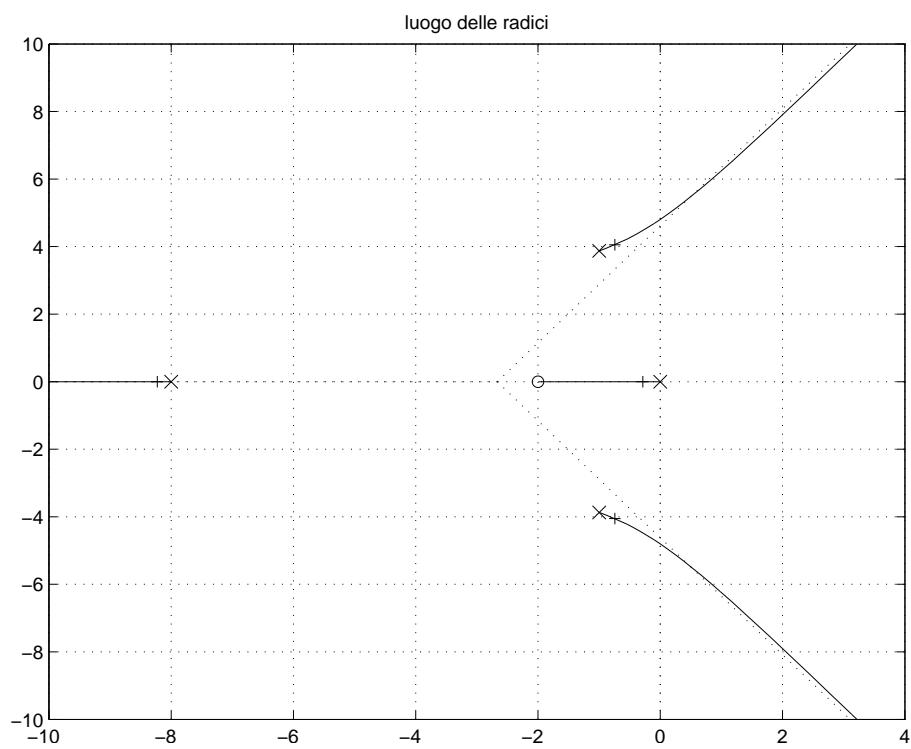


Figura 2: Luogo della radici di $G(s)$.

**Fondamenti di Controlli Automatici -
A.A. 2011/12
10 Gennaio 2012 - Domande Teoriche**

Nome:	
Nr. Mat.	
Firma:	

Per ciascuno dei test a soluzione multipla segnare con una crocetta tutte le affermazioni che si ritengono giuste.

- Un sistema di “tipo 3” è caratterizzato da:
 - grado relativo $n - m = 3$;
 - 3 poli complessi coniugati;
 - 3 poli nulli.
- Per $\omega \in [-\infty, \infty]$, il diagramma di Nyquist “completo” di un sistema $G(s)$ di tipo 0:
 - deve essere chiuso all’infinito con una semicirconferenza percorsa in senso orario;
 - deve essere chiuso all’infinito con una semicirconferenza percorsa in senso antiorario;
 - non necessita di essere chiuso all’infinito.
- Un sistema lineare $G(s)$ avente poli multipli posizionati sull’asse immaginario può essere:
 - instabile;
 - stabile ingresso limitato - uscita limitata;
 - semplicemente stabile.
- Se gli elementi della prima colonna della tabella di Routh di una equazione caratteristica di 4 grado ha tutti gli elementi positivi tranne uno che è negativo, ne segue che l’equazione caratteristica:
 - ha solo una radice a parte reale positiva
 - ha almeno una radice a parte reale positiva
 - ha almeno una radice a parte reale negativa
 - può avere una coppia di radici complesse coniugate a parte reale positiva
- Scrivere la funzione di trasferimento $G(s)$ corrispondente alla seguente equazione differenziale:
$$2\ddot{x}(t) + 8\dot{x}(t) + 4x(t) = 3\dot{u}(t) + 6\dot{u}(t) + 9u(t) \quad \rightarrow \quad G(s) = \frac{X(s)}{U(s)} = \frac{9s + 9}{2s^2 + 8s + 4}$$
- Il luogo dei punti del piano complesso determinato da poli complessi coniugati di sistemi del secondo ordine con coefficiente di smorzamento costante è formato da:
 - una retta parallela all’asse immaginario;
 - due rette parallele all’asse reale;
 - una semicirconferenza nel semipiano reale negativo centrata nell’origine;
 - due semirette uscenti dall’origine.
- La funzione complessa $X(s) = \frac{s}{(s+4)^2}$ è la trasformata di Laplace:
 - di un segnale $x(t)$ che tende a zero per $t \rightarrow \infty$;
 - di un segnale $x(t)$ che tende a 1 per $t \rightarrow 0$;
 - del segnale $x(t) = t^2 e^{-(t-4)}$;
 - del segnale $x(t) = t e^{-4t}$.

8. Un sistema dinamico lineare è stabile se la sua funzione di trasferimento ha tutti i poli:

- a parte reale positiva ed eventuali poli a parte reale nulla hanno molteplicità unitaria;
- a parte reale strettamente positiva.
- a parte reale negativa ed eventuali poli a parte reale nulla hanno molteplicità unitaria;
- a parte reale strettamente negativa.

9. Sia $\mathcal{L}[f(t)] = F(s)$ la trasformata di Laplace della funzione $f(t)$. Vale la relazione:

- $\mathcal{L}\left[\frac{df}{dt}\right] = \frac{1}{s}F(s) - f(0-)$;
- $\mathcal{L}\left[\frac{df}{dt}\right] = \frac{1}{s}F(s)$;
- $\mathcal{L}\left[\frac{df}{dt}\right] = sF(s) - f(0-)$;
- $\mathcal{L}\left[\frac{df}{dt}\right] = sF(s)$.

10. Il diagramma di Nyquist della funzione $G(s) = \frac{s+1}{s(s^2+4s+16)}$ per $\omega \in [0, \infty]$:

- ha guadagno statico unitario;
- si evolve tutta nel semipiano positivo;
- presenta un asintoto verticale;
- è chiuso all'infinito da una semicirconferenza percorsa in senso orario.

11. Un sistema $G(s)$ a fase minima di tipo 2 e con grado relativo 3 presenta nel diagramma asintotico di Bode delle fasi:

- una fase di $-\frac{\pi}{2}$ per $\omega \rightarrow 0$;
- una fase di $-\pi$ per $\omega \rightarrow 0$;
- una fase di $-\frac{3\pi}{2}$ per $\omega \rightarrow \infty$;
- una fase di $-\pi$ per $\omega \rightarrow \infty$.

12. L'errore a regime di un sistema $G(s)$ con ingresso del tipo $u(t) = R_0 t$ si può determinare come $e = \frac{R_0}{K_e}$, dove K_e vale:

- $K_e = \lim_{s \rightarrow 0} s^2 G(s)$;
- $K_e = \lim_{s \rightarrow 0} s G(s)$;
- $K_e = \lim_{s \rightarrow 0} G(s)$.

Non è richiesto lo svolgimento delle seguenti domande agli iscritti ad Ingegneria Ambientale.

13. Il luogo delle radici del sistema $\frac{1}{(s+1)(s+2)}$ per valori positivi del guadagno di retroazione:

- ha due asintoti verticali;
- ha un asintoto orizzontale corrispondente all'intervallo $(-\infty, -2]$;
- presenta una diramazione nel punto $-1.5 + j0$.

14. Un problema di contorno delle radici:

- si ha quando a variare non è il guadagno di retroazione K ma un qualunque altro parametro del sistema;
- può sempre essere ricondotto ad un problema di luogo delle radici;
- può essere ricondotto ad un problema di luogo delle radici tutte le volte che il parametro che varia entra linearmente nell'equazione caratteristica del sistema retroazionato.