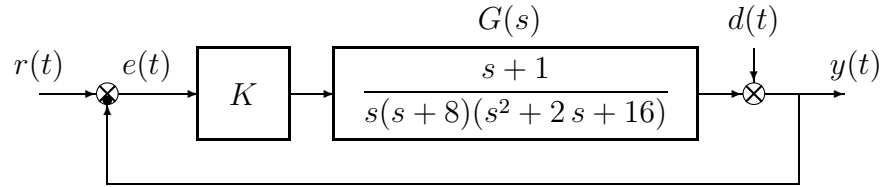


Nome:	
Nr. Mat.	
Firma:	

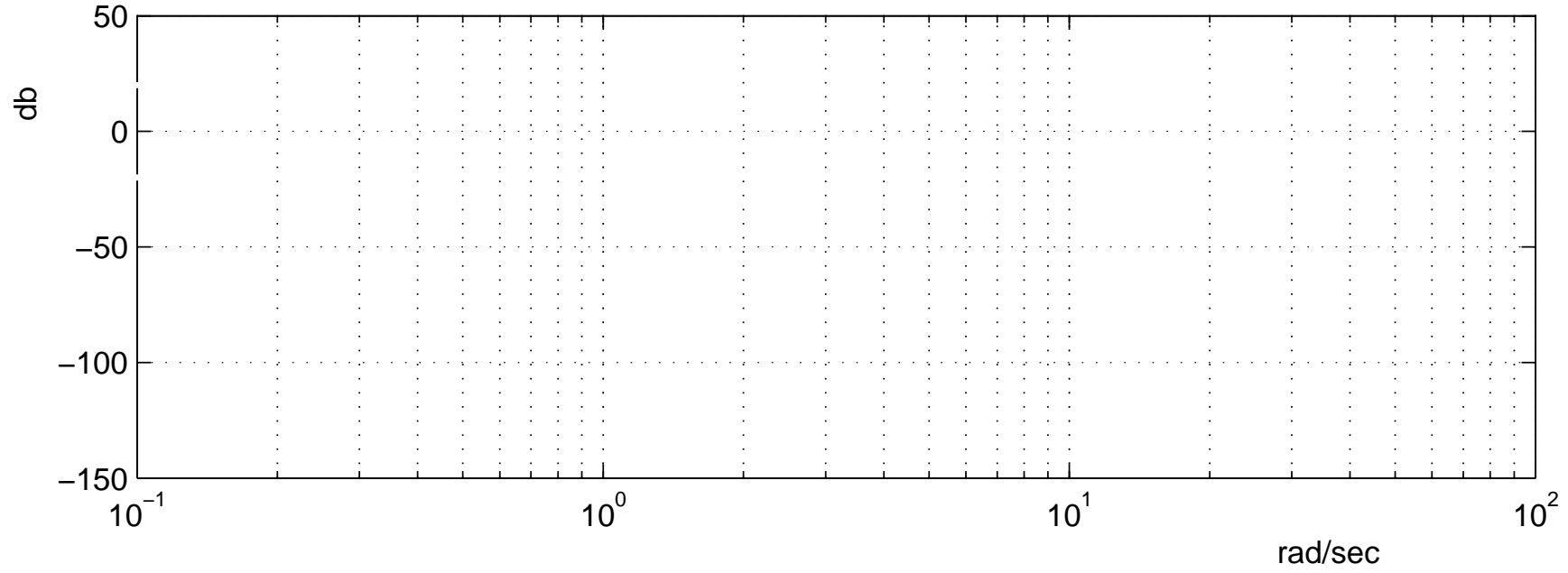
a) Sia dato il seguente sistema retroazionato:



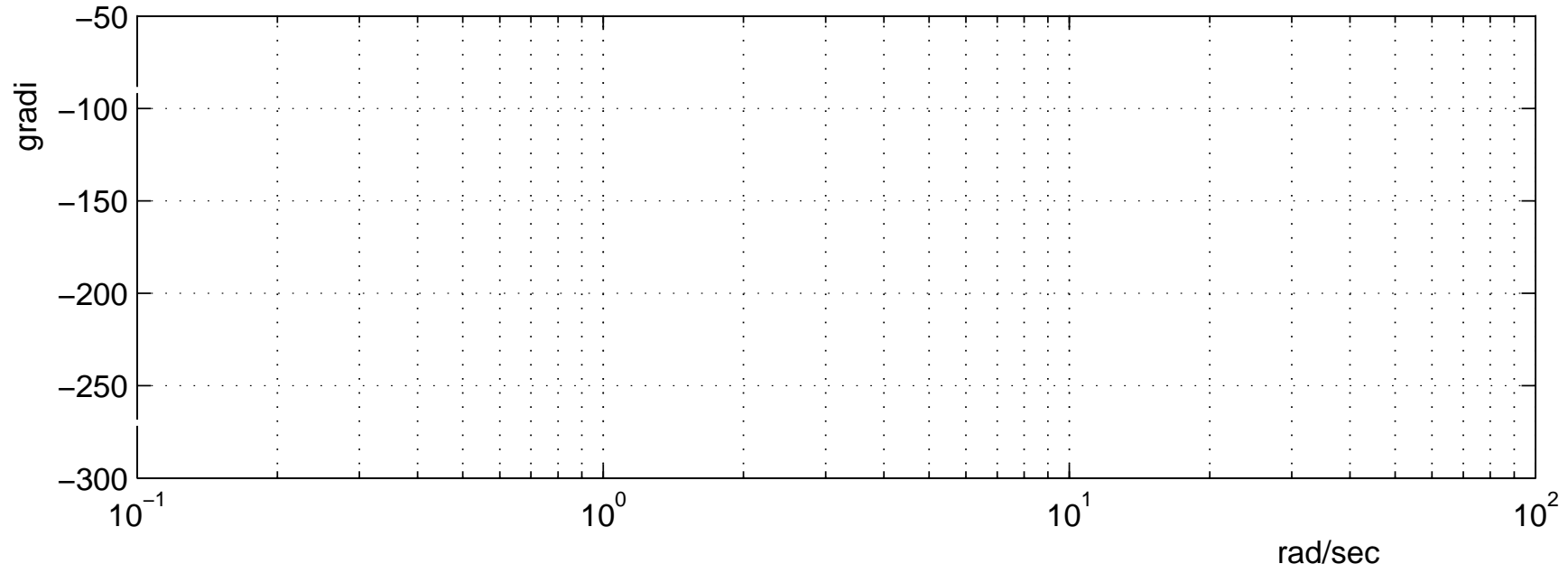
- a.1) Determinare per quali valori del parametro K il sistema retroazionato è asintoticamente stabile.
- a.2) Posto $K = 50$, disegnare qualitativamente il diagramma di Nyquist “completo” del guadagno d’anello $K G(s)$. Calcolare esattamente la posizione σ_a dell’asintoto verticale, le eventuali intersezioni σ_i^* con l’asse reale e i corrispondenti valori delle pulsazioni ω_i^* . Determinare inoltre il margine di ampiezza M_α e indicare sul diagramma il margine di fase di $K G(s)$.
- b) Si faccia riferimento al sistema retroazionato dell’esercizio precedente e si ponga $K = 50$:
- b.1) Tracciare i diagrammi di Bode asintotici delle ampiezze e della fasi del guadagno di anello $K G(s)$;
- b.2) Fornire una stima della larghezza di banda del sistema retroazionato;
- b.3) Fornire una stima della risposta “a regime” $y_\infty(t)$ del sistema in catena aperta quando il disturbo $d(t) = 2$ e in ingresso è presente il segnale $r(t) = 3 + 4 \cos(5t + \pi/6)$.
- c) **Non è richiesto lo svolgimento di questo esercizio agli iscritti ad Ingegneria Ambientale.**
- Si faccia riferimento al sistema descritto nell’esercizio a):
- c.1) Tracciare qualitativamente il luogo delle radici del sistema retroazionato per valori positivi del parametro K . Determinare l’angolo con cui rami entrano o escono dalle radici e la posizione qualitativa dei punti di diramazione.
- c.2) Determinare il centro degli asintoti, gli angoli che gli asintoti formano rispetto all’asse reale positivo, le intersezioni del luogo delle radici con l’asse immaginario e i corrispondenti valori del parametro K .

1. Il sistema con equazione caratteristica $a_n s^n - a_{n-1} s^{n-1} + \dots - a_1 s + a_0 = 0$ con $a_n > 0, \dots, a_0 > 0$:
 - è stabile;
 - è asintoticamente stabile;
 - è instabile.
 2. Se gli elementi della prima colonna della tabella di Routh di una equazione caratteristica di 4° grado ha un elemento negativo e i rimanenti positivi, ne segue che l'equazione caratteristica:
 - può avere tutte le radici a parte reale positiva;
 - ha solo una radice a parte reale positiva;
 - ha almeno una radice a parte reale positiva.
 3. Un sistema $G(s)$ con grado relativo 3 presenta nel diagramma asintotico di Bode delle ampiezze:
 - una pendenza di -20 db/decade per $\omega \rightarrow \infty$;
 - una pendenza di -40 db/decade per $\omega \rightarrow \infty$;
 - una pendenza di -60 db/decade per $\omega \rightarrow \infty$.
 4. Il diagramma di Nyquist della funzione $G(s) = \frac{s-2}{s}$ per $\omega \in [0, \infty]$:
 - termina nell'origine;
 - presenta un asintoto verticale;
 - si evolve tutto nel quarto quadrante.
 5. Il sistema $G(s) = \frac{s+z_1}{s(s+p_1)(s+p_2)}$ con $0 < p_1 < p_2 < p_1 + p_2 < z_1$ presenta:
 - margine di fase minore di $\pi/2$;
 - margine di ampiezza infinito;
 - guadagno statico unitario.
 6. Si consideri un'equazione caratteristica nella quale compaiono solamente le potenze dispari di s . Utilizzando la tabella di Routh è possibile affermare che l'equazione caratteristica:
 - ha un polo nell'origine;
 - ha almeno una radice a parte reale positiva;
 - ha soluzioni simmetriche rispetto all'origine.
 7. La banda passante di sistema retroazionato con guadagno d'anello $G_a(s)$ è determinata da l'intervallo di frequenze per cui:
 - $|G_a(j\omega)| \ll 1$;
 - $|G_a(j\omega)| \gg 1$;
 - $|G_a(j\omega)| \geq 1$.
 8. Il diagramma di Nyquist di un sistema di tipo 2:
 - è chiuso all'infinito da una semicirconferenza percorsa un senso orario;
 - è chiuso all'infinito da una circonferenza percorsa un senso orario;
 - è chiuso all'infinito da una circonferenza percorsa un senso antiorario.
- Gli studenti di Ingegneria Ambientale non rispondano alle seguenti domande**
9. Il *teorema del baricentro* si applica:
 - solo a funzioni $G(s)$ razionali fratte e stabili;
 - solo a funzioni $G(s)$ con grado relativo $r > 2$;
 - solo a funzioni $G(s)$ con grado relativo $r \geq 2$.
 10. Il luogo delle radici presenta asintoti verticali se:
 - $K > 0$ e il grado relativo è 2;
 - $K > 0$ e il grado relativo è pari;
 - $K > 0$ e il grado relativo è dispari.

ampiezza

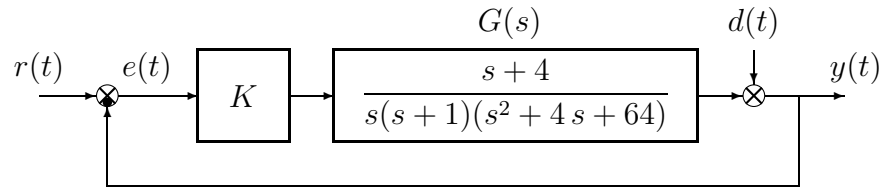


fase



Nome:	
Nr. Mat.	
Firma:	

a) Sia dato il seguente sistema retroazionato:



a.1) Determinare per quali valori del parametro K il sistema retroazionato è asintoticamente stabile.

a.2) Posto $K = 20$, disegnare qualitativamente il diagramma di Nyquist “completo” del guadagno d’anello $K G(s)$. Calcolare esattamente la posizione σ_a dell’asintoto verticale, le eventuali intersezioni σ_i^* con l’asse reale e i corrispondenti valori delle pulsazioni ω_i^* . Determinare inoltre il margine di ampiezza M_α e indicare sul diagramma il margine di fase di $K G(s)$.

b) Si faccia riferimento al sistema retroazionato dell’esercizio precedente e si ponga $K = 20$:

b.1) Tracciare i diagrammi di Bode asintotici delle ampiezze e della fasi del guadagno di anello $K G(s)$;

b.2) Fornire una stima della larghezza di banda del sistema retroazionato;

b.3) Fornire una stima della risposta “a regime” $y_\infty(t)$ del sistema in catena aperta quando il disturbo $d(t) = 3$ e in ingresso è presente il segnale $r(t) = 2 + 5 \cos(4t + \pi/3)$.

c) **Non è richiesto lo svolgimento di questo esercizio agli iscritti ad Ingegneria Ambientale.**

Si faccia riferimento al sistema descritto nell’esercizio a):

c.1) Tracciare qualitativamente il luogo delle radici del sistema retroazionato per valori positivi del parametro K . Determinare l’angolo con cui rami entrano o escono dalle radici e la posizione qualitativa dei punti di diramazione.

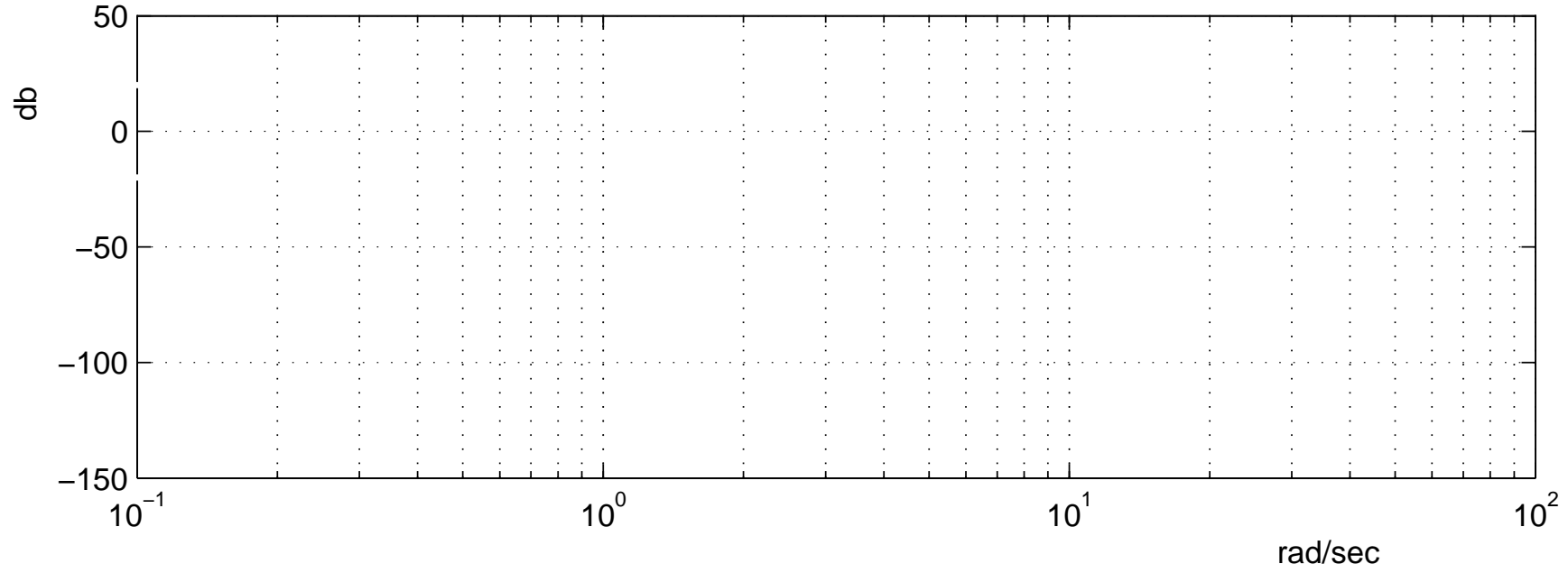
c.2) Determinare il centro degli asintoti, gli angoli che gli asintoti formano rispetto all’asse reale positivo, le intersezioni del luogo delle radici con l’asse immaginario e i corrispondenti valori del parametro K .

1. Il sistema con equazione caratteristica $a_n s^n - a_{n-1} s^{n-1} + \dots - a_1 s + a_0 = 0$ con $a_n > 0, \dots, a_0 > 0$:
 - è instabile;
 - è asintoticamente stabile;
 - è stabile.
2. Se gli elementi della prima colonna della tabella di Routh di una equazione caratteristica di 4° grado ha un elemento negativo e i rimanenti positivi, ne segue che l'equazione caratteristica:
 - ha solo una radice a parte reale positiva;
 - ha almeno una radice a parte reale positiva;
 - può avere tutte le radici a parte reale positiva.
3. Un sistema $G(s)$ con grado relativo 3 presenta nel diagramma asintotico di Bode delle ampiezze:
 - una pendenza di -60 db/decade per $\omega \rightarrow \infty$;
 - una pendenza di -40 db/decade per $\omega \rightarrow \infty$;
 - una pendenza di -20 db/decade per $\omega \rightarrow \infty$.
4. Il diagramma di Nyquist della funzione $G(s) = \frac{s-2}{s}$ per $\omega \in [0, \infty]$:
 - si evolve tutto nel quarto quadrante;
 - presenta un asintoto verticale;
 - termina nell'origine.
5. Il sistema $G(s) = \frac{s+z_1}{s(s+p_1)(s+p_2)}$ con $0 < p_1 < p_2 < p_1 + p_2 < z_1$ presenta:
 - margine di ampiezza infinito;
 - margine di fase minore di $\pi/2$;
 - guadagno statico unitario.
6. Si consideri un'equazione caratteristica nella quale compaiono solamente le potenze dispari di s . Utilizzando la tabella di Routh è possibile affermare che l'equazione caratteristica:
 - ha soluzioni simmetriche rispetto all'origine;
 - ha almeno una radice a parte reale positiva;
 - ha un polo nell'origine.
7. La banda passante di sistema retroazionato con guadagno d'anello $G_a(s)$ è determinata da l'intervallo di frequenze per cui:
 - $|G_a(j\omega)| \geq 1$;
 - $|G_a(j\omega)| \gg 1$;
 - $|G_a(j\omega)| \ll 1$.
8. Il diagramma di Nyquist di un sistema di tipo 2:
 - è chiuso all'infinito da una circonferenza percorsa un senso orario;
 - è chiuso all'infinito da una circonferenza percorsa un senso antiorario;
 - è chiuso all'infinito da una semicirconferenza percorsa un senso orario.

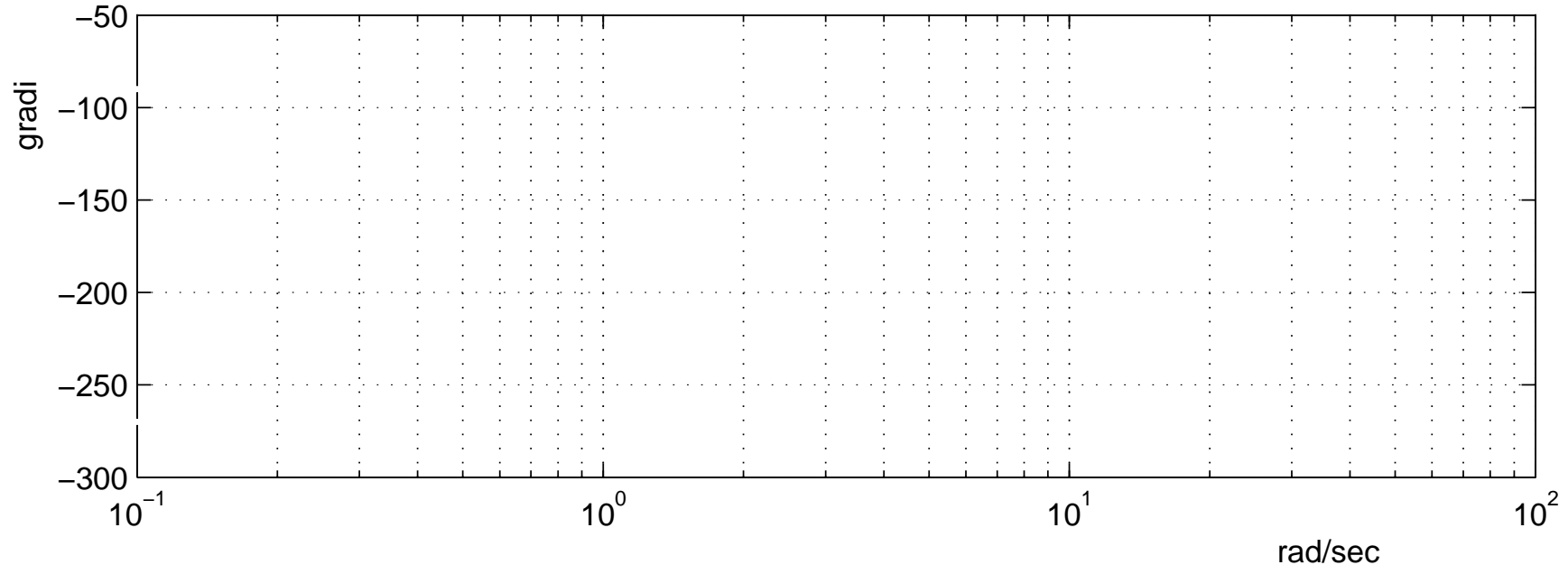
Gli studenti di Ingegneria Ambientale non rispondano alle seguenti domande

9. Il *teorema del baricentro* si applica:
 - solo a funzioni $G(s)$ razionali fratte e stabili;
 - solo a funzioni $G(s)$ con grado relativo $r \geq 2$.
 - solo a funzioni $G(s)$ con grado relativo $r > 2$.
10. Il luogo delle radici presenta asintoti verticali se:
 - $K > 0$ e il grado relativo è dispari;
 - $K > 0$ e il grado relativo è pari;
 - $K > 0$ e il grado relativo è 2.

ampiezza

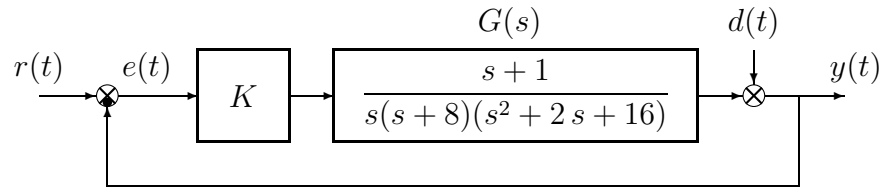


fase



Nome:	
Nr. Mat.	
Firma:	

a) Sia dato il seguente sistema retroazionato:



a.1) Determinare per quali valori del parametro K il sistema retroazionato è asintoticamente stabile.

Soluzione: l'equazione caratteristica del sistema retroazionato è

$$1 + \frac{K(s+1)}{s(s+8)(s^2+2s+16)} = 0 \quad \rightarrow \quad s^4 + 10s^3 + 32s^2 + (128+K)s + K = 0$$

La corrispondente tabella di Routh è la seguente

$$\begin{array}{c|ccc} 4 & 1 & 32 & K \\ 3 & 10 & 128+K & \\ 2 & 192-K & 10K & \\ 1 & -K^2-36K+24576 & & \\ 0 & 10K & & \end{array}$$

Dalla riga 1 e dalla riga 0 si ricavano i seguenti vincoli:

$$K > 0, \quad K < 139.8$$

La pulsazione ω^* corrispondente al valore limite $K^* = 139.8$ è:

$$\omega^* = \sqrt{\frac{128+K^*}{10}} = 5.17$$

a.2) Posto $K = 50$, disegnare qualitativamente il diagramma di Nyquist "completo" del guadagno d'anello $K G(s)$. Calcolare esattamente la posizione σ_a dell'asintoto verticale, le eventuali intersezioni σ_i^* con l'asse reale e i corrispondenti valori delle pulsazioni ω_i^* . Determinare inoltre il margine di ampiezza M_a e indicare sul diagramma il margine di fase di $K G(s)$.

Soluzione: Il diagramma di Nyquist della funzione $G(s)$ per $\omega \in [0, \infty]$ è mostrato in Fig. 1.

Il sistema è di tipo 1 per cui esiste un asintoto verticale in $K_r \Delta_a = 0.293$.

Esiste un'unica intersezione σ^* con l'asse reale. Tale intersezione si determina facilmente dall'analisi di Routh svolta al punto d.1:

$$\sigma^* = -\frac{K}{K^*} = -0.36$$

Il corrispondente valore di ω^* è 6.771 mentre il margine di ampiezza è $M_a = \frac{1}{|\sigma^*|} = 2.8$.

b) Si faccia riferimento al sistema retroazionato dell'esercizio precedente e si ponga $K = 50$:

b.1) Tracciare i diagrammi di Bode asintotici delle ampiezze e della fasi del guadagno di anello $K G(s)$;

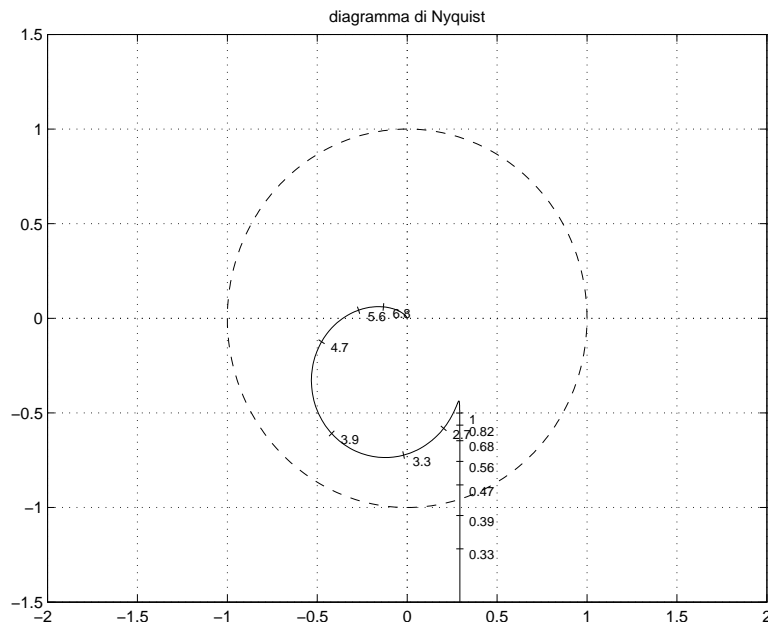


Figura 1: Diagramma di Nyquist della funzione $G(s)$ per $\omega \in [0, \infty]$.

b.2) Fornire una stima della larghezza di banda del sistema retroazionato;

Soluzione: La banda passante del sistema può essere determinata dal punto di incrocio del diagramma di Bode delle ampiezze con l'asse 0 db. Una stima della banda passante del sistema è quindi $\omega_T = 0.5 \text{ rad/s}$.

b.3) Fornire una stima della risposta "a regime" $y_\infty(t)$ del sistema in catena aperta quando il disturbo $d(t) = 2$ e in ingresso è presente il segnale $r(t) = 3 + 4 \cos(5t + \pi/6)$.

Soluzione: Il sistema è di tipo 1, quindi un disturbo costante in uscita viene completamente annullato. Essendo la pulsazione del segnale di ingresso $\omega_r = \omega_T$, l'ampiezza della componente sinusoidale dell'uscita risulta uguale alla metà di quella del segnale d'ingresso con uno sfasamento di circa $-\pi/4$, mentre la componente continua risulta inalterata, perciò $y(t) = 3 + 2 \cos(0.53t - \pi/20)$.

c) **Non è richiesto lo svolgimento di questo esercizio agli iscritti ad Ingegneria Ambientale.**

Si faccia riferimento al sistema descritto nell'esercizio a):

c.1) Tracciare qualitativamente il luogo delle radici del sistema retroazionato per valori positivi del parametro K . Determinare l'angolo con cui rami entrano o escono dalle radici e la posizione qualitativa dei punti di diramazione. Soluzione: vedi figura 4.

c.2) Determinare il centro degli asintoti, gli angoli che gli asintoti formano rispetto all'asse reale positivo, le intersezioni del luogo delle radici con l'asse immaginario e i corrispondenti valori del parametro K .

Soluzione:

$$\begin{aligned} \sigma &= -3 \\ \phi &= 60, 180, 300 \\ s^* &= 5.17i \\ K^* &= 139.8 \end{aligned}$$

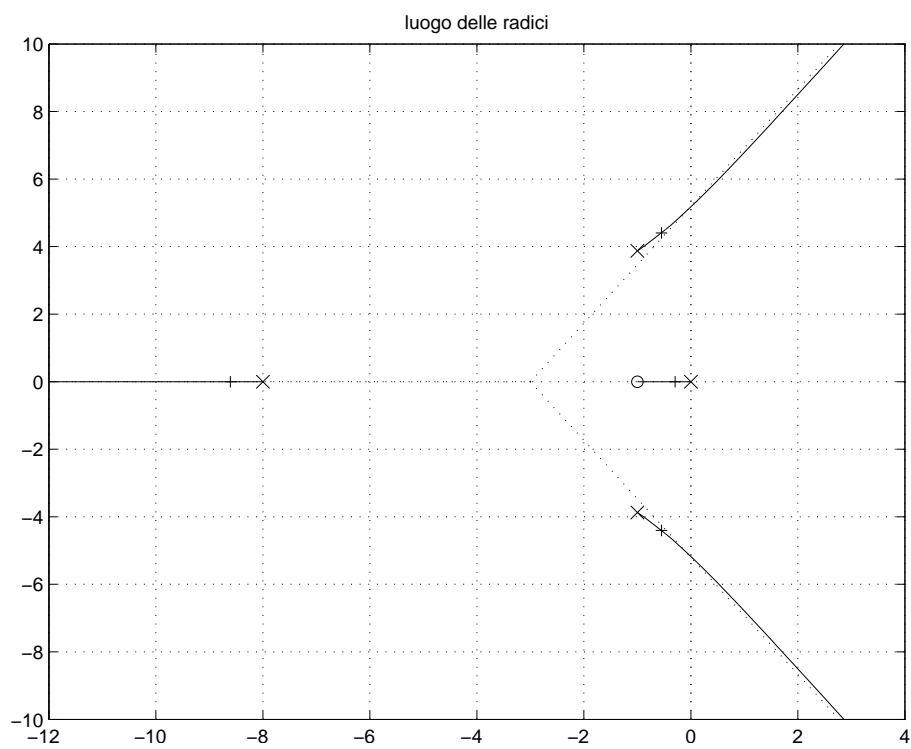
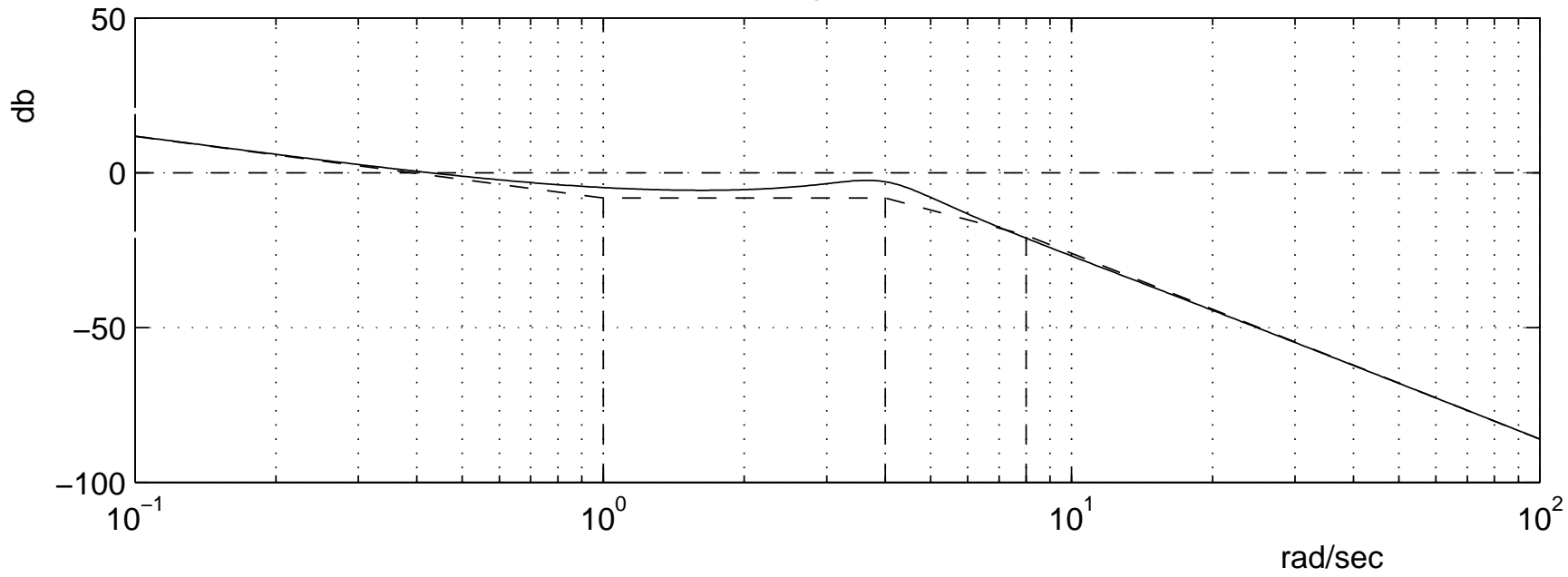


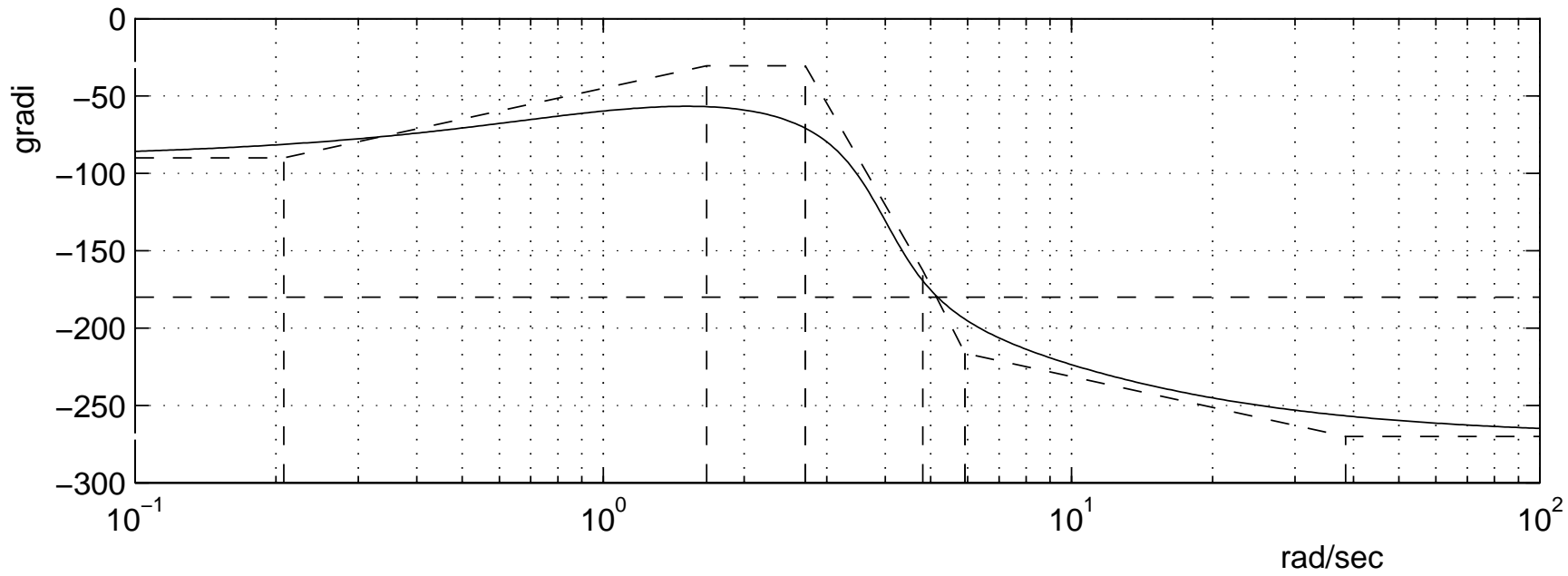
Figura 2: Luogo delle radici di $G(s)$.

1. Il sistema con equazione caratteristica $a_n s^n - a_{n-1} s^{n-1} + \dots - a_1 s + a_0 = 0$ con $a_n > 0, \dots, a_0 > 0$:
 - è stabile;
 - è asintoticamente stabile;
 - è instabile.
 2. Se gli elementi della prima colonna della tabella di Routh di una equazione caratteristica di 4° grado ha un elemento negativo e i rimanenti positivi, ne segue che l'equazione caratteristica:
 - può avere tutte le radici a parte reale positiva;
 - ha solo una radice a parte reale positiva;
 - ha almeno una radice a parte reale positiva.
 3. Un sistema $G(s)$ con grado relativo 3 presenta nel diagramma asintotico di Bode delle ampiezze:
 - una pendenza di -20 db/decade per $\omega \rightarrow \infty$;
 - una pendenza di -40 db/decade per $\omega \rightarrow \infty$;
 - una pendenza di -60 db/decade per $\omega \rightarrow \infty$.
 4. Il diagramma di Nyquist della funzione $G(s) = \frac{s-2}{s}$ per $\omega \in [0, \infty]$:
 - termina nell'origine;
 - presenta un asintoto verticale;
 - si evolve tutto nel quarto quadrante.
 5. Il sistema $G(s) = \frac{s+z_1}{s(s+p_1)(s+p_2)}$ con $0 < p_1 < p_2 < p_1 + p_2 < z_1$ presenta:
 - margine di fase minore di $\pi/2$;
 - margine di ampiezza infinito;
 - guadagno statico unitario.
 6. Si consideri un'equazione caratteristica nella quale compaiono solamente le potenze dispari di s . Utilizzando la tabella di Routh è possibile affermare che l'equazione caratteristica:
 - ha un polo nell'origine;
 - ha almeno una radice a parte reale positiva;
 - ha soluzioni simmetriche rispetto all'origine.
 7. La banda passante di sistema retroazionato con guadagno d'anello $G_a(s)$ è determinata da l'intervallo di frequenze per cui:
 - $|G_a(j\omega)| \ll 1$;
 - $|G_a(j\omega)| \gg 1$;
 - $|G_a(j\omega)| \geq 1$.
 8. Il diagramma di Nyquist di un sistema di tipo 2:
 - è chiuso all'infinito da una semicirconferenza percorsa un senso orario;
 - è chiuso all'infinito da una circonferenza percorsa un senso orario;
 - è chiuso all'infinito da una circonferenza percorsa un senso antiorario.
- Gli studenti di Ingegneria Ambientale non rispondano alle seguenti domande**
9. Il *teorema del baricentro* si applica:
 - solo a funzioni $G(s)$ razionali fratte e stabili;
 - solo a funzioni $G(s)$ con grado relativo $r > 2$;
 - solo a funzioni $G(s)$ con grado relativo $r \geq 2$.
 10. Il luogo delle radici presenta asintoti verticali se:
 - $K > 0$ e il grado relativo è 2;
 - $K > 0$ e il grado relativo è pari;
 - $K > 0$ e il grado relativo è dispari.

ampiezza

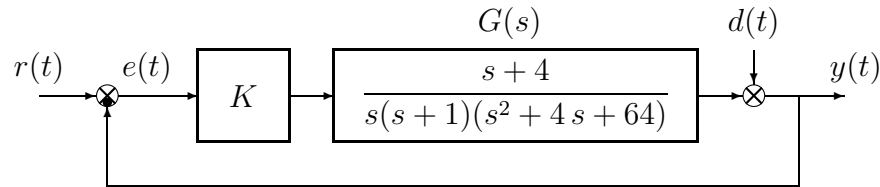


fase



Nome:	
Nr. Mat.	
Firma:	

a) Sia dato il seguente sistema retroazionato:



a.1) Determinare per quali valori del parametro K il sistema retroazionato è asintoticamente stabile.

Soluzione: l'equazione caratteristica del sistema retroazionato è

$$1 + \frac{K(s+4)}{s(s+1)(s^2+4s+64)} = 0 \quad \rightarrow \quad s^4 + 5s^3 + 68s^2 + (64+K)s + 4K = 0$$

La corrispondente tabella di Routh è la seguente

$$\begin{array}{c|ccc} 4 & 1 & 68 & 4K \\ 3 & 5 & 64+K & \\ 2 & 276-K & 20K & \\ 1 & -K^2+112K+17664 & & \\ 0 & 20K & & \end{array}$$

Dalla riga 1 e dalla riga 0 si ricavano i seguenti vincoli:

$$K > 0, \quad K < 200.2$$

La pulsazione ω^* corrispondente al valore limite $K^* = 200.2$ è:

$$\omega^* = \sqrt{\frac{64+K^*}{5}} = 7.27$$

a.2) Posto $K = 20$, disegnare qualitativamente il diagramma di Nyquist "completo" del guadagno d'anello $K G(s)$. Calcolare esattamente la posizione σ_a dell'asintoto verticale, le eventuali intersezioni σ_i^* con l'asse reale e i corrispondenti valori delle pulsazioni ω_i^* . Determinare inoltre il margine di ampiezza M_a e indicare sul diagramma il margine di fase di $K G(s)$.

Soluzione: Il diagramma di Nyquist della funzione $G(s)$ per $\omega \in [0, \infty]$ è mostrato in Fig. 3.

Il sistema è di tipo 1 per cui esiste un asintoto verticale in $K_r \Delta_a = -1.016$.

Esiste un'unica intersezione σ^* con l'asse reale. Tale intersezione si determina facilmente dall'analisi di Routh svolta al punto d.1:

$$\sigma^* = -\frac{K}{K^*} = -0.1$$

Il corrispondente valore di ω^* è 7.27 mentre il margine di ampiezza è $M_a = \frac{1}{|\sigma^*|} = 10$.

b) Si faccia riferimento al sistema retroazionato dell'esercizio precedente e si ponga $K = 20$:

b.1) Tracciare i diagrammi di Bode asintotici delle ampiezze e della fasi del guadagno di anello $K G(s)$;

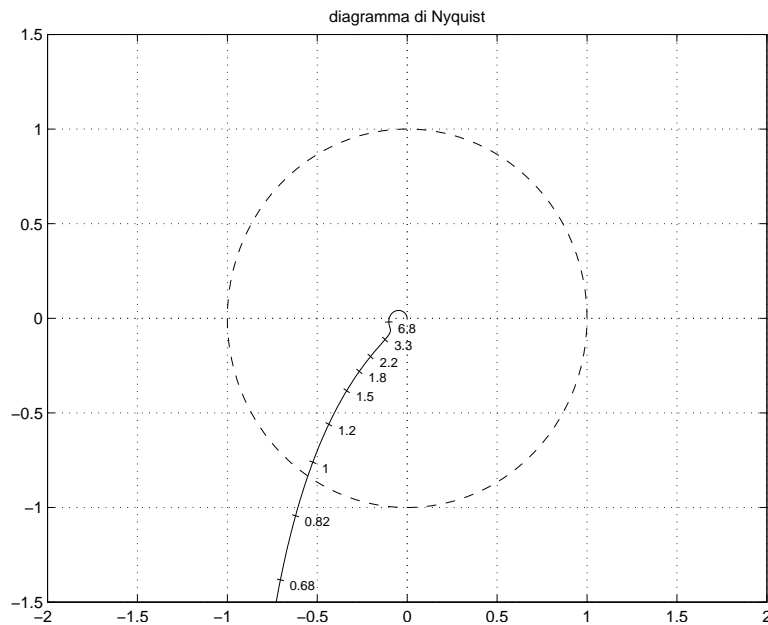


Figura 3: Diagramma di Nyquist della funzione $G(s)$ per $\omega \in [0, \infty]$.

b.2) Fornire una stima della larghezza di banda del sistema retroazionato;

Soluzione: La banda passante del sistema può essere determinata dal punto di incrocio del diagramma di Bode delle ampiezze con l'asse 0 db. Una stima della banda passante del sistema è quindi $\omega_T = 0.8 \text{ rad/s}$.

b.3) Fornire una stima della risposta "a regime" $y_\infty(t)$ del sistema in catena aperta quando il disturbo $d(t) = 3$ e in ingresso è presente il segnale $r(t) = 2 + 5 \cos(4t + \pi/3)$.

Soluzione: Il sistema è di tipo 1, quindi un disturbo costante in uscita viene completamente annullato. Essendo il sistema retroazionato di tipo passa-basso ed essendo la pulsazione del segnale di ingresso $\omega_r \ll \omega_T$, con buona approssimazione l'uscita risulta uguale al segnale d'ingresso, perciò $y(t) = 2 + 5 \cos(0.043t + \pi/4)$.

c) **Non è richiesto lo svolgimento di questo esercizio agli iscritti ad Ingegneria Ambientale.**

Si faccia riferimento al sistema descritto nell'esercizio a):

c.1) Tracciare qualitativamente il luogo delle radici del sistema retroazionato per valori positivi del parametro K . Determinare l'angolo con cui rami entrano o escono dalle radici e la posizione qualitativa dei punti di diramazione. Soluzione: vedi figura 4.

c.2) Determinare il centro degli asintoti, gli angoli che gli asintoti formano rispetto all'asse reale positivo, le intersezioni del luogo delle radici con l'asse immaginario e i corrispondenti valori del parametro K .

Soluzione:

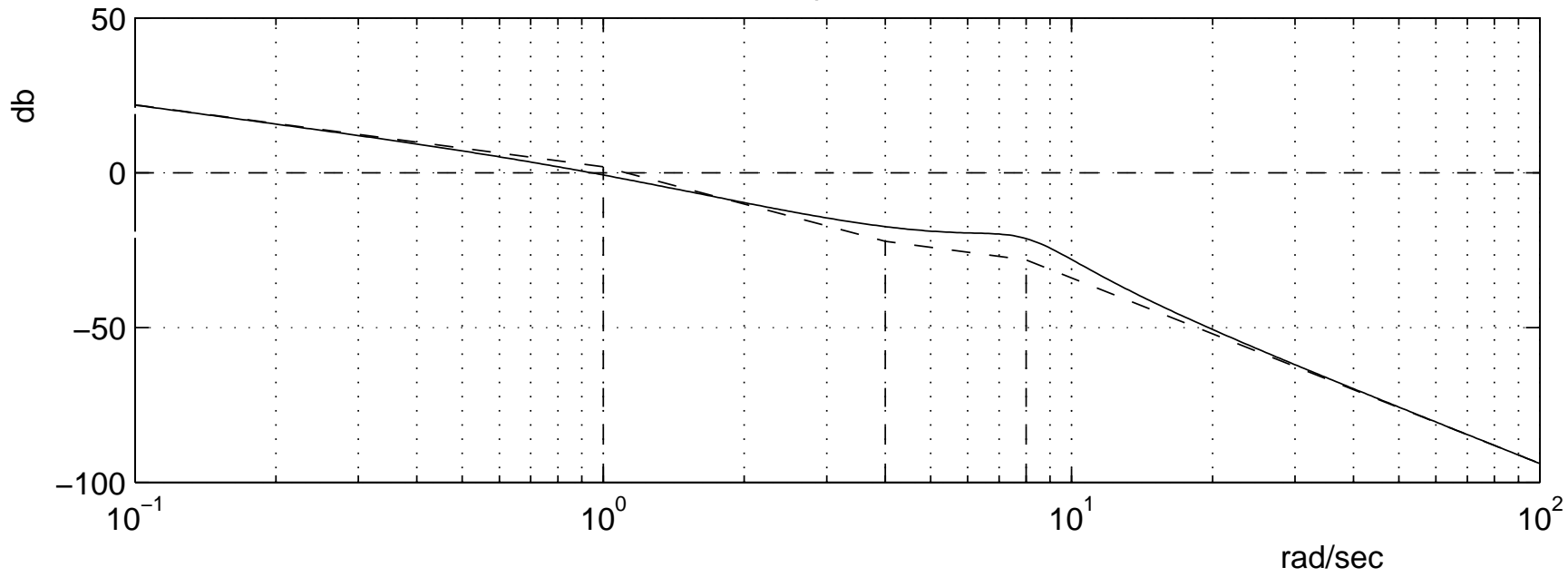
$$\begin{aligned}\sigma &= -0.3 \\ \phi &= 60, 180, 300 \\ s^* &= 7.27i \\ K^* &= 200.2\end{aligned}$$

1. Il sistema con equazione caratteristica $a_n s^n - a_{n-1} s^{n-1} + \dots - a_1 s + a_0 = 0$ con $a_n > 0, \dots, a_0 > 0$:
 - è instabile;
 - è asintoticamente stabile;
 - è stabile.
2. Se gli elementi della prima colonna della tabella di Routh di una equazione caratteristica di 4° grado ha un elemento negativo e i rimanenti positivi, ne segue che l'equazione caratteristica:
 - ha solo una radice a parte reale positiva;
 - ha almeno una radice a parte reale positiva;
 - può avere tutte le radici a parte reale positiva.
3. Un sistema $G(s)$ con grado relativo 3 presenta nel diagramma asintotico di Bode delle ampiezze:
 - una pendenza di -60 db/decade per $\omega \rightarrow \infty$;
 - una pendenza di -40 db/decade per $\omega \rightarrow \infty$;
 - una pendenza di -20 db/decade per $\omega \rightarrow \infty$.
4. Il diagramma di Nyquist della funzione $G(s) = \frac{s-2}{s}$ per $\omega \in [0, \infty]$:
 - si evolve tutto nel quarto quadrante;
 - presenta un asintoto verticale;
 - termina nell'origine.
5. Il sistema $G(s) = \frac{s+z_1}{s(s+p_1)(s+p_2)}$ con $0 < p_1 < p_2 < p_1 + p_2 < z_1$ presenta:
 - margine di ampiezza infinito;
 - margine di fase minore di $\pi/2$;
 - guadagno statico unitario.
6. Si consideri un'equazione caratteristica nella quale compaiono solamente le potenze dispari di s . Utilizzando la tabella di Routh è possibile affermare che l'equazione caratteristica:
 - ha soluzioni simmetriche rispetto all'origine;
 - ha almeno una radice a parte reale positiva;
 - ha un polo nell'origine.
7. La banda passante di sistema retroazionato con guadagno d'anello $G_a(s)$ è determinata da l'intervallo di frequenze per cui:
 - $|G_a(j\omega)| \geq 1$;
 - $|G_a(j\omega)| \gg 1$;
 - $|G_a(j\omega)| \ll 1$.
8. Il diagramma di Nyquist di un sistema di tipo 2:
 - è chiuso all'infinito da una circonferenza percorsa un senso orario;
 - è chiuso all'infinito da una circonferenza percorsa un senso antiorario;
 - è chiuso all'infinito da una semicirconferenza percorsa un senso orario.

Gli studenti di Ingegneria Ambientale non rispondano alle seguenti domande

9. Il *teorema del baricentro* si applica:
 - solo a funzioni $G(s)$ razionali fratte e stabili;
 - solo a funzioni $G(s)$ con grado relativo $r \geq 2$.
 - solo a funzioni $G(s)$ con grado relativo $r > 2$.
10. Il luogo delle radici presenta asintoti verticali se:
 - $K > 0$ e il grado relativo è dispari;
 - $K > 0$ e il grado relativo è pari;
 - $K > 0$ e il grado relativo è 2.

ampiezza



fase

